定常点熱源に対する半無限横等方性弾性体のグリーン関数* (支配微分方程式の特性根が二重根・三重根の場合)

小林 雅 隆^{*1}, 近 藤 俊 美^{*1}, 古 口 日出男^{*2}

Green's Functions for a Steady Heat Source in a Semi-Infinite Transversely Isotropic Elastic Solid (The Case of 2-ple and 3-ple Roots for the Characteristic Roots of the Governing Differential Equations)

Masataka KOBAYASHI, Toshimi KONDO and Hideo KOGUCHI

Green's functions reported in the previous paper were the solutions for single root in the characteristic equation of a semi-infinite transversely isotropic thermoelastic solid with a steady heat source. The functions were expressed in a Cartesian coordinate system. In this paper, Green's functions for 2-ple and 3-ple roots in the characteristic equation of a semi-infinite transversely isotropic thermoelastic solid with a steady heat source are presented. A different term from the functions for single root in the characteristic equation appears in these solutions. For thermal boundary conditions, both cases of adiabatic condition and the temperature prescribed on the boundary plane are treated, and for the stress and the displacement boundary conditions the following three cases are treated; (1) stresses are free, (2) all components of displacement are fixed, (3) only displacement in the normal direction is fixed.

Key Words: Anisotropy, Elasticity, Thermal Stress, Green's Function, Thermoelasticity, Transverse Isotropy, Three-Dimensional Problem, Cartesian Coordinates, Half-Space

1. 緒 言

横等方性弾性体の等温三次元問題における集中力のグリーン関数は通常二個の変位ポテンシャル関数のみで表され, その支配微分方程式は準重調和微分方程式までである。そこに現れる異方性弾性定数に依存する特性根によって解の形が変わり, 集中力に対応するグリーン関数は特性根が高々二重根の場合の解までしか現れない⁽¹⁾⁻⁽⁵⁾。一方, 熱発生のある横等方性弾性体においては, 解を支配する特性根が四種類存在し, 集中力等の作用がない場合には三種類になる⁽⁶⁾。その支配微分方程式の特性根が単根であるか, 二重根・三重根であるかによって解の形が変わり, 集中力の二重根の解と異なるだけでなく, さらに三重根となる場合の解が現れる⁽⁶⁾。熱発生のある場合の横等方性弾性体の三次元問題で, 特性根が二重根・三重根となる場合の解

を求めた論文は, 定常点熱源に対する無限横等方性弾性体のグリーン関数についての著者等の報告が初めてである⁽⁶⁾。またその後, 定常点熱源に対する半無限横等方性弾性体のグリーン関数についても報告したが⁽⁷⁾, その解は単根の場合の解であり, 特性根が二重根あるいは三重根になる場合には直接使用できない。

本報は, 定常点熱源に対する半無限横等方性弾性体で, 特性方程式の根が二重根および三重根となる場合の解を求めたものである。また, 二重根・三重根の解には単根の場合とは性質の異なった項が現れること, および三重根の解の特別な場合として等方性弾性体の解を含むことも明らかにする。その等方性弾性体の解は前報⁽⁷⁾で報告した解と完全に一致する。

本論文で取り扱った解の熱的境界条件は, 基準温度との差が零になる場合および断熱の場合である。また, 変位と応力の力学的境界条件は, (1) 応力自由の場合, (2) 変位固定の場合, (3) 法線方向変位のみ固定の場合, の三種類である。

2. 特性根が二重根の場合に対する半無限横等方性弾性体のグリーン関数

* 原稿受付 1998 年 7 月 21 日。

^{*1} 正員, 長岡工業高等専門学校 (☎ 940-8532 長岡市西片貝町 888)。

^{*2} 正員, 長岡技術大学工学部 (☎ 940-2188 長岡市上富岡町 1603-1)。

E mail: kmasa@nagaoka-ct.ac.jp

2.1 熱源のある横等方性弾性体の基礎方程式 直角座標系を x_i (または x, y, z) とし、横等方性弾性体の等方面内に (x, y) 座標を取り、その法線方向に異方性主軸の z 軸を取るものとする (図1参照)。変位で表した平衡方程式および準静的熱伝導に従う横等方性弾性体の変位解は、各座標方向物体力 b_i ($i=1, 2, 3$) および単位時間・単位体積当たり熱発生量 b_4 として、次式で与えられる変位関数 χ_i

$\Delta \cdot \chi_i = -b_i$, ($i=1, 2, 3, 4$), (1)
を用いて、次のように与えられる⁽⁶⁾。

$u_i = Q_{i1}\chi_1 + Q_{i2}\chi_2 + Q_{i3}\chi_3 + Q_{i4}\chi_4$, ($i=1 \sim 4$). (2)
ここで、

$$\Delta = \lambda_1 C_{11} C_{44} C_{66} \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{v_1^2 \partial z^2} \right) \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{v_2^2 \partial z^2} \right) \times \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{v_3^2 \partial z^2} \right) \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{v_4^2 \partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right),$$

$$\tau = \frac{\lambda_1}{c\rho} t, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad \text{..... (3)}$$

$u_4 = T$ は基準温度からの温度で、 C_{ij} は弾性定数、 λ_i は熱伝導率、 c は定容比熱、 ρ は密度、 Q_{ij} は定係数微分演算子である。また、熱発生だけに関係する変位関数 χ_4 に対しては次の ψ_1 を用いてよい⁽⁶⁾。

$$\psi_1 = \beta_1 C_{44} C_{66} \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{v_3^2 \partial z^2} \right) \chi_4 \quad \text{..... (4)}$$

ここで、 $\beta_j = C_{ij} \alpha_j$ (j は 1, 2, 3 の和)、 α_j は線膨張係数である。また、 v_i は異方性弾性定数に依存する特性根であり、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} v_1 \right\} &= \sqrt{\frac{(C_C - C_{13})(C_C + C_{13} + 2C_{44})}{4C_{33}C_{44}}} \\ v_2 \left\} &\pm \sqrt{\frac{(C_C + C_{13})(C_C - C_{13} - 2C_{44})}{4C_{33}C_{44}}}, \\ v_3 &= \sqrt{\frac{C_{66}}{C_{44}}}, \quad v_4 = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_3}}, \quad C_C = \sqrt{C_{11}C_{33}}. \quad \text{..... (5)} \end{aligned}$$

Fig.1 A semi-infinite transversely isotropic elastic solid with a steady heat source at $z=z_0$.

このとき図1のように点熱源が $(0, 0, z_0)$ にあるものとすれば、基礎式は点熱源を δ 関数を用いて表わし、次式のように与えられる。

$$\frac{\lambda_3 C_{33}}{\beta_1} \left(v_1^2 \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(v_2^2 \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(v_4^2 \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi_1 = -b_4 \frac{\delta(r)}{2\pi r} \delta(z-z_0) \quad \text{..... (6)}$$

式(6)の解は先に報告したようにフーリエ・ハンケル変換を用いて解くことができ、特性根式(5)の値を用いて次の五種類の場合が存在する⁽⁶⁾。

- (1) v_1, v_2, v_4 が単根で独立な場合
- (2) $v_1 = v_2$ の場合 (二重根)
- (3) $v_1 = v_4$ の場合 (二重根)
- (4) $v_2 = v_4$ の場合 (二重根)
- (5) $v_1 = v_2 = v_4$ の場合 (三重根)

(1)については前報で報告している⁽⁷⁾。(2)~(4)の三つの場合は、添え字が異なるのみであり、仮に(2)の場合を記すが、添え字を入れ替えるだけで(3)および(4)の場合になる。ここではこれらを単に二重根の解と呼び、また(5)の場合を三重根の解と呼ぶ。

2.2 境界で熱的境界条件のみを満たす特解 定常点熱源に対する無限横等方性弾性体の式(6)が二重根となる場合の変位関数は、点熱源の位置 z_0 で無次元化した座標系に関して次式で与えられる⁽⁶⁾。従って点熱源は $z=1$ に有ることになり、以後は全て無次元化した座標系で表すものとする。

$$\psi_1 = C_u \int_0^\infty \frac{J_0(\alpha r)}{\alpha^4} \left\{ [A_1 + A_2(-v_1\alpha)(z-1)] e^{-\alpha v_1(z-1)} + A_4 e^{-\alpha v_4(z-1)} \right\} d\alpha \quad \text{..... (7)}$$

ここで、 $z-1 < 0$ では v_j は $(-v_j)$ と置く。また、 J_0 は零次のベッセル関数であり、定数は次式である。

$$A_1 = \frac{v_4^2 - 3v_1^2}{2v_1^3(v_1^2 - v_4^2)^2}, \quad A_2 = \frac{1}{2v_1^3(v_1^2 - v_4^2)},$$

$$A_4 = \frac{1}{v_4(v_1^2 - v_4^2)^2}, \quad C_u = \frac{\beta_1 b_4}{4\pi \lambda_3 C_{33}}. \quad \text{..... (8)}$$

最初に、熱的境界条件のみ満足する解を特解として求める。そのため単根の場合を参考にして、鏡像点熱源の解である次の項を加える。

$$\psi_1 = C_u \int_0^\infty \frac{J_0(\alpha r)}{\alpha^4} \left\{ [D_1 + D_2(-v_1\alpha)(z+1)] e^{-\alpha v_1(z+1)} + D_4 e^{-\alpha v_4(z+1)} \right\} d\alpha \quad \text{..... (9)}$$

式(7)と式(9)の和により熱的境界条件を満たす係数 D_j を求めれば次のようになる。

(1) 境界で基準温度との差が0となる場合 $D_4 = -A_4$

(2) 境界で断熱 (熱流束が零) の場合 $D_4 = A_4$

D_1, D_2 は必ずしも必要ではないが、形を統一的に表すために $D_j = \mp A_j$ に取り、この項を含めて特解とする。

これより求まる変位と応力の閉形解を上付き添え字 p を付けて表せば次式のようにになる。

$$\begin{aligned} \frac{u_x^p}{C_u} &= x \left[a_{ux1} \left(\frac{1}{R_1^+} \mp \frac{1}{R_{11}^+} \right) + a_{ux2} \left(\frac{1}{R_1} \mp \frac{1}{R_{11}} \right) + a_{ux3} \left(\frac{1}{R_4^+} \mp \frac{1}{R_{44}^+} \right) \right], \\ \frac{u_z^p}{C_u} &= a_{uz1} \left(\ln \frac{1}{R_1^+} \mp \ln \frac{1}{R_{11}^+} \right) + a_{uz2} \left(\frac{Z_1}{R_1} \mp \frac{Z_{11}}{R_{11}} \right) \\ &\quad + a_{uz3} \left(\ln \frac{1}{R_4^+} \mp \ln \frac{1}{R_{44}^+} \right), \\ \frac{T^p}{C_T} &= \left(\frac{1}{R_4} \mp \frac{1}{R_{44}} \right), \\ \frac{\sigma_{xx}^p}{C_\sigma} &= \left(a_{sx1} + a_{sx2} \frac{y^2}{r^2} + a_{sx3} \frac{y^2 - x^2}{r^2} \right) \left(\frac{1}{R_1} \mp \frac{1}{R_{11}} \right) \\ &\quad + a_{sx4} \frac{y^2 - x^2}{r^2} \left(\frac{1}{R_1^+} \mp \frac{1}{R_{11}^+} \right) + \left(a_{sx5} + a_{sx6} \frac{y^2}{r^2} \right) \left(\frac{r^2}{R_1^3} \mp \frac{r^2}{R_{11}^3} \right) \\ &\quad + \left(a_{sx7} + a_{sx8} \frac{y^2}{r^2} \right) \left(\frac{1}{R_4} \mp \frac{1}{R_{44}} \right) + a_{sx9} \frac{y^2 - x^2}{r^2} \left(\frac{1}{R_4^+} \mp \frac{1}{R_{44}^+} \right), \\ \frac{\sigma_{zz}^p}{C_\sigma} &= a_{zx1} \left(\frac{1}{R_1} \mp \frac{1}{R_{11}} \right) + a_{zx2} \left(\frac{r^2}{R_1^3} \mp \frac{r^2}{R_{11}^3} \right) + a_{zx3} \left(\frac{1}{R_4} \mp \frac{1}{R_{44}} \right), \\ \frac{\sigma_{yz}^p}{C_\sigma} &= y \left[a_{yz1} \left(\frac{1}{R_1 R_1^+} \mp \frac{1}{R_{11} R_{11}^+} \right) + a_{yz2} \left(\frac{Z_1}{R_1^3} \mp \frac{Z_{11}}{R_{11}^3} \right) \right. \\ &\quad \left. + a_{yz3} \left(\frac{1}{R_4 R_4^+} \mp \frac{1}{R_{44} R_{44}^+} \right) \right], \\ \frac{\sigma_{xy}^p}{C_\sigma} &= \frac{xy}{r^2} \left\{ a_{xy1} \left[\left(\frac{1}{R_1} - \frac{2}{R_1^+} \right) \mp \left(\frac{1}{R_{11}} - \frac{2}{R_{11}^+} \right) \right] + a_{xy2} \left(\frac{r^2}{R_1^3} \mp \frac{r^2}{R_{11}^3} \right) \right. \\ &\quad \left. + a_{xy3} \left[\left(\frac{1}{R_4} - \frac{2}{R_4^+} \right) \mp \left(\frac{1}{R_{44}} - \frac{2}{R_{44}^+} \right) \right] \right\}, \dots (10) \end{aligned}$$

$$\text{ここで, } C_T = \frac{b_4}{4\pi\lambda_3 z_0}, \quad C_\sigma = \frac{\beta_1 b_4}{4\pi\lambda_3 z_0}. \dots (11)$$

u_y^p は u_x^p 中の x と y を置換, σ_{yy}^p および σ_{xx}^p は σ_{xx}^p および σ_{yz}^p 中の y と x を置換したものである。また, 上式(10)において次式を用いた。

$$\begin{aligned} R_j &= \sqrt{r^2 + v_j^2(z-1)^2}, \quad Z_j = v_j(z-1), \\ R_{ij} &= \sqrt{r^2 + (v_i z + v_j)^2}, \quad Z_{ij} = (v_i z + v_j), \\ R_j^+ &= R_j + |Z_j|, \quad R_{ij}^+ = R_{ij} + |Z_{ij}|, \quad r^2 = x^2 + y^2, \\ R_j^- &= R_j - |Z_j|, \quad R_{ij}^- = R_{ij} - |Z_{ij}|, \quad R_j^+ \cdot R_j^- = r^2. \dots (12) \end{aligned}$$

式(10)の係数 a_{ijk} 等は付録A.1に示す。また, 式(10)の $\mp$ は熱的境界条件で得られた符号に対応し, $z=0$ のとき一側で残る量は u_x^p と σ_{yz}^p および σ_{xx}^p のみであり, 他の量は全て消える。+側ではその逆である。

2.3 境界で変位・応力境界条件を満たす一般解

半無限横等方性弾性体の変位や応力の境界条件を満足させるためには, 特解の他に補解が必要である。この補解は上半空間に特異点無く, 下半空間には特異点が在っても良い。このとき, 単根の場合に類似な熱に関連する変位関数の χ_4 の補解を用いる方法と温度に影響を与えない z 方向変位関数 $\chi_3^{(6)}$ の補解を用いる方法

の二種類存在する。すなわち, 次の二法である。

① χ_4 の補解 ψ_0 を用いる方法

$$\begin{aligned} \frac{\psi_0}{C_u} &= \int_0^\infty \frac{J_0(\alpha r)}{\alpha^4} \left\{ [D_{11}^+ + D_{21}^+ v_1 \alpha] e^{-\alpha v_1(z+1)} \right. \\ &\quad \left. + [D_{14}^+ + D_{24}^+ v_1 \alpha] e^{-\alpha(v_1 z + v_4)} \right\} d\alpha \dots (13) \end{aligned}$$

② χ_3 の補解 ϕ_1 を用いる方法

$$\begin{aligned} \frac{\phi_1}{C_u} &= \int_0^\infty \frac{J_0(\alpha r)}{\alpha^2} \left\{ [B_{11} + B_{21} v_1 \alpha] e^{-\alpha v_1(z+1)} \right. \\ &\quad \left. + [B_{14} + B_{24} v_1 \alpha] e^{-\alpha(v_1 z + v_4)} \right\} d\alpha \dots (14) \end{aligned}$$

ここで係数 D_{ij}^+, B_{ij} は未知関数で $D_{ij}^+(\alpha), B_{ij}(\alpha)$ となっている。式(13), (14)より求まる変位が有限の条件より, 指数関数べき乗項の実部に対し次式が必要である。

$$\operatorname{Re}(v_i z + v_j) > 0 \dots (15)$$

また変位や応力に現れる弾性定数に依存する次の係数

$$(1 - a v_j^2), (b - k v_j^2), (d - e v_j^2). \dots (16)$$

が零になる場合には χ_4 の項のみでは決定できなくなる場合がある。三重根はそのような場合の一例である。

この場合は χ_3 の項を用いなければならない。この事は二重根の場合にも起こりうる可能性がある。したがって, ここでは②の場合の変位と応力の結果を記し, ①の結果は付録A.2に記す。また, 式(16)中の特性根以外の定数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} a &= \frac{C_{33}}{C_{44}} - k \left(1 + \frac{C_{13}}{C_{44}} \right), \quad b = k \frac{C_{11}}{C_{44}} - \left(1 + \frac{C_{13}}{C_{44}} \right), \quad k = \frac{\beta_3}{\beta_1}, \\ d &= \frac{(C_{13} - k C_{11})}{C_{33}}, \quad e = \frac{k C_{13}}{C_{33}} - 1. \dots (17) \end{aligned}$$

②の場合の変位および応力は次式のように求まる。

$$\begin{aligned} \frac{u_x^c}{C_u} &= -d_1 \frac{x}{r} \int_0^\infty J_1(\alpha r) v_1 \left\{ (B_{11} - B_{21}) + B_{21} v_1 \alpha \right\} e^{-\alpha v_1(z+1)} \\ &\quad + \left\{ (B_{14} - B_{24}) + B_{24} v_1 \alpha \right\} e^{-\alpha(v_1 z + v_4)} \right\} d\alpha, \\ \frac{u_z^c}{C_u} &= -(e_1 - v_1^2) \int_0^\infty J_0(\alpha r) \left\{ B_{11} + \frac{2v_1^2}{e_1 - v_1^2} B_{21} + B_{21} v_1 \alpha \right\} \\ &\quad \times e^{-\alpha v_1(z+1)} + \left\{ B_{14} + \frac{2v_1^2}{e_1 - v_1^2} B_{24} + B_{24} v_1 \alpha \right\} e^{-\alpha(v_1 z + v_4)} \right\} d\alpha, \\ \frac{\sigma_{xx}^c}{C_\sigma} &= - \int_0^\infty \alpha J_0(\alpha r) v_1 \left\{ \left(a_1 + f v_1^2 - b_1 \frac{y^2}{r^2} \right) (B_{11} - B_{21}) \right. \\ &\quad \left. + B_{21} v_1 \alpha \right\} - 2f v_1^2 B_{21} \left\{ e^{-\alpha v_1(z+1)} d\alpha + b_1 \left(\frac{x^2 - y^2}{r^3} \right) \right. \\ &\quad \times \int_0^\infty J_1(\alpha r) v_1 \left\{ (B_{11} - B_{21}) + B_{21} v_1 \alpha \right\} e^{-\alpha v_1(z+1)} d\alpha \\ &\quad - \int_0^\infty \alpha J_0(\alpha r) v_1 \left\{ \left(a_1 + f v_1^2 - b_1 \frac{y^2}{r^2} \right) (B_{14} - B_{24}) \right. \\ &\quad \left. + B_{24} v_1 \alpha \right\} - 2f v_1^2 B_{24} \left\{ e^{-\alpha(v_1 z + v_4)} d\alpha + b_1 \left(\frac{x^2 - y^2}{r^3} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^\infty J_1(\alpha r) v_1 \left\{ (B_{14} - B_{24}) + B_{24} v_1 \alpha \right\} e^{-\alpha(v_1 z + v_4)} d\alpha \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{xx}^c}{C_\sigma} &= \nu_1(p - \nu_1^2) \int_0^\infty \alpha J_0(\alpha r) \left\{ \left[B_{11} - \left(1 - \frac{2\nu_1^2}{p - \nu_1^2} \right) B_{21} + B_{21}\nu_1\alpha \right] \right. \\ &\quad \times e^{-\alpha\nu_1(z+1)} + \left[B_{14} - \left(1 - \frac{2\nu_1^2}{p - \nu_1^2} \right) B_{24} + B_{24}\nu_1\alpha \right] e^{-\alpha(\nu_1 z + \nu_4)} \Big\} d\alpha, \\ \frac{\sigma_{yz}^c}{C_\sigma} &= \frac{y}{r} (a_1 + f\nu_1^2) \int_0^\infty \alpha J_1(\alpha r) \left\{ \left[B_{11} - \frac{2f\nu_1^2}{a_1 + f\nu_1^2} B_{21} + B_{21}\nu_1\alpha \right] \right. \\ &\quad \times e^{-\alpha\nu_1(z+1)} + \left[B_{14} - \frac{2f\nu_1^2}{a_1 + f\nu_1^2} B_{24} + B_{24}\nu_1\alpha \right] e^{-\alpha(\nu_1 z + \nu_4)} \Big\} d\alpha, \\ \frac{\sigma_{xy}^c}{C_\sigma} &= -b_1 \frac{xy}{r^2} \int_0^\infty \alpha J_0(\alpha r) - \frac{2}{r} J_1(\alpha r) \left\{ \left[(B_{11} - B_{21}) + B_{21}\nu_1\alpha \right] \right. \\ &\quad \times e^{-\alpha\nu_1(z+1)} + \left[(B_{14} - B_{24}) + B_{24}\nu_1\alpha \right] e^{-\alpha(\nu_1 z + \nu_4)} \Big\} d\alpha. \quad (18)\end{aligned}$$

u_y^c は u_x^c 中の x と y を置換, また σ_{yy}^c および σ_{xx}^c は σ_{xx}^c および σ_{yz}^c 中の y と x を置換したものである. また式中の無次元定数は, 次式で与えられる⁽⁷⁾.

$$\begin{aligned}d_1 &= 1 + \frac{C_{33}}{C_{44}}, \quad e_1 = \frac{C_{11}}{C_{44}}, \quad a_1 = \frac{C_{11}}{C_{33}}, \quad b_1 = \frac{2C_{66}(C_{13} + C_{44})}{C_{33}C_{44}}, \\ f &= \frac{C_{13}}{C_{33}}, \quad p = \frac{C_{33}C_{11} - C_{13}^2 - C_{13}C_{44}}{C_{33}C_{44}}. \quad \dots\dots\dots (19)\end{aligned}$$

これらを用いて, 境界条件を満たす四つの未知関数 B_j を求め, 閉形表現して解を求める.

2.4 各種境界条件の決定

境界条件の種類は緒言に述べた六種類であり, 以下に順に述べる.

(1) 境界で基準温度との差が零かつ応力自由の解:

この場合の条件式は次式で与えられる.

$$z=0 \text{ で } \quad \sigma_{xx} = \sigma_{yz} = \sigma_{xx} = 0. \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここで, $D_j = -A_j$ で式(10)の-側を取る. $z=0$ において r に無関係に零となる条件から未知関数が次式のように求まる.

$$\begin{aligned}B_{11} &= \frac{2\nu_1(d - e\nu_1^2)(p - 3\nu_1^2)}{Q} \left[\left(A_1 + \frac{d - 3e\nu_1^2}{d - e\nu_1^2} A_2 \right) \frac{1}{\alpha} - \nu_1 A_2 \right], \\ B_{21} &= \frac{2\nu_1(d - e\nu_1^2)(p - \nu_1^2)}{Q} \left[\left(A_1 + \frac{d - 3e\nu_1^2}{d - e\nu_1^2} A_2 \right) \frac{1}{\alpha} - \nu_1 A_2 \right], \\ B_{14} &= \frac{2\nu_4(d - e\nu_4^2)(p - 3\nu_1^2)}{Q} A_4 \frac{1}{\alpha}, \\ B_{24} &= \frac{2\nu_4(d - e\nu_4^2)(p - \nu_1^2)}{Q} A_4 \frac{1}{\alpha}, \\ Q &= (a_1 - f\nu_1^2)(p - \nu_1^2) - 2\nu_1^2(a_1 + f\nu_1^2). \quad \dots\dots\dots (21)\end{aligned}$$

(2) 境界で基準温度との差が零かつ変位固定の解:

この場合の条件式は次式で与えられる.

$$z=0 \text{ で, } \quad u_x = u_y = u_z = 0. \quad \dots\dots\dots (22)$$

これも式(10)の-側を取る. $z=0$ で r に無関係に零となる条件より, 同様に未知関数は次式に求められる.

$$\begin{aligned}B_{11} = B_{21} &= -\frac{2\nu_1(b - k\nu_1^2)}{e_1 + \nu_1^2} \left[\left(A_1 + \frac{b - 3k\nu_1^2}{b - k\nu_1^2} A_2 \right) \frac{1}{\alpha} - \nu_1 A_2 \right], \\ B_{14} = B_{24} &= -\frac{2\nu_4(b - k\nu_4^2)}{e_1 + \nu_1^2} A_4 \frac{1}{\alpha}. \quad \dots\dots\dots (23)\end{aligned}$$

(3) 境界で基準温度との差が零かつ法線方向変位のみ

固定の解: この場合の条件は次式である.

$$z=0 \text{ で, } \quad u_z = 0, \quad \sigma_{yz} = \sigma_{xx} = 0. \quad \dots\dots\dots (24)$$

この場合式(10)で ν_4 の項は-側を取るが, 他の ν_1 の項は+側にとると簡単になる. このとき, $z=0$ で r に無関係に零となる条件より, 未知関数は次式で与えられる.

$$\begin{aligned}B_{11} = B_{21} &= 0, \quad B_{14} = \frac{2\nu_4(d - e\nu_4^2 - fb + fkv_4^2)A_4}{a_1 + fe_1} \frac{1}{\alpha}, \\ B_{24} &= \frac{-\nu_4[(b - k\nu_4^2)(a + f\nu_1^2) + (d - e\nu_4^2)(e_1 - \nu_1^2)]A_4}{a_1 + fe_1} \frac{1}{\alpha} \quad (25)\end{aligned}$$

(4) 境界で断熱かつ応力自由の解: この場合の条件式は式(20)と同じである. 特解は式(10)の+側を取る. 未知関数は次式で与えられる.

$$\begin{aligned}B_{11} &= \frac{4f\nu_1(d - e\nu_1^2)}{Q} \left[\left(A_1 - \frac{2e\nu_1^2}{d - e\nu_1^2} A_2 \right) \frac{1}{\alpha} - \nu_1 A_2 \right], \\ B_{21} &= \frac{2(a_1 + f\nu_1^2)(d - e\nu_1^2)}{\nu_1 Q} \left[\left(A_1 - \frac{2e\nu_1^2}{d - e\nu_1^2} A_2 \right) \frac{1}{\alpha} - \nu_1 A_2 \right], \\ B_{14} &= \frac{4f\nu_1(d - e\nu_4^2)A_4}{Q} \frac{1}{\alpha}, \quad B_{24} = \frac{2(a_1 + f\nu_1^2)(d - e\nu_4^2)A_4}{\nu_1 Q} \frac{1}{\alpha}, \\ Q &= 2f\nu_1^2(p - \nu_1^2) - (a_1 + f\nu_1^2)(p - 3\nu_1^2). \quad \dots\dots\dots (26)\end{aligned}$$

(5) 境界で断熱かつ変位固定の解: この場合の条件は式(22)と同一である. 特解は式(10)の+側を取るものとする. 未知関数は次式で与えられる.

$$\begin{aligned}B_{11} &= \frac{4\nu_1(1 - a\nu_1^2)}{d_1(e_1 + \nu_1^2)} \left[\left(A_1 - \frac{2a\nu_1^2}{(1 - a\nu_1^2)} A_2 \right) \frac{1}{\alpha} - \nu_1 A_2 \right], \\ B_{21} &= \frac{2(e_1 - \nu_1^2)(1 - a\nu_1^2)}{\nu_1 d_1(e_1 + \nu_1^2)} \left[\left(-A_1 + \frac{2a\nu_1^2}{1 - a\nu_1^2} A_2 \right) \frac{1}{\alpha} + \nu_1 A_2 \right], \\ B_{14} &= \frac{4\nu_1(1 - a\nu_4^2)A_4}{d_1(e_1 + \nu_1^2)} \frac{1}{\alpha}, \\ B_{24} &= -\frac{2(e_1 - \nu_1^2)(1 - a\nu_4^2)A_4}{\nu_1 d_1(e_1 + \nu_1^2)} \frac{1}{\alpha}. \quad \dots\dots\dots (27)\end{aligned}$$

(6) 境界で断熱かつ法線方向変位のみ固定の解:

この場合は特解項の+側を取れば付加項の補解は不要である. 結果的に式(10)の+側の特解はこの境界条件の場合の解に相当している.

以上により, 全ての未知関数が決定されたことになる. これらを式(18)に代入し, 積分を閉形表現すれば, 全ての変位と応力が計算できる. そのための閉形公式を付録A.3に示す.

3. 特性根が三重根の場合に対する半無限横等方性弾性体のグリーン関数

3.1 境界で熱的境界条件のみを満たす特解 三重根の場合の境界で基準温度との差が零および断熱となる特解を, 鏡像点における点熱源の解を用いた次の形で求める.

$$\frac{\psi_{1p}}{C_u} = \int_0^\infty \frac{J_0(\alpha r)}{\alpha^4} \left\{ \left[A_1 + A_2(-\nu_4\alpha)(z-1) + A_3(\nu_4\alpha)^2(z-1)^2 \right] \right\}$$

$$\times e^{a\nu_4(z-1)} + [D_1 + D_2(\nu_4\alpha)(z+1) + D_3(\nu_4\alpha)^2(z+1)^2]e^{-a\nu_4(z+1)}\}d\alpha \dots (28)$$

$$\text{ここで, } A_1 = A_2 = 3A_3 = \frac{3}{8\nu_4^5} \dots (29)$$

境界上で基準温度との差が零および断熱の条件より、二重根の場合と同様に $D_j = \mp A_j$ と求められる。これを代入し、変位と応力を求めて閉形表現すれば、特解項は次式になる。

$$\begin{aligned} \frac{u_x^p}{C_u} &= A_3 x \left[4 \left(\frac{1}{R_4} \mp \frac{1}{R_{44}} \right) - (1 - a\nu_4^2) \left(\frac{r^2}{R_4^3} \mp \frac{r^2}{R_{44}^3} \right) \right], \\ \frac{u_z^p}{C_u} &= A_3 \left[2(b - k\nu_4^2) + 4k\nu_4^2 \left(\frac{\nu_4 Z_4}{R_4} \mp \frac{\nu_4 Z_{44}}{R_{44}} \right) - A_3(b - k\nu_4^2)r^2 \left(\frac{\nu_4 Z_4}{R_4^3} \mp \frac{\nu_4 Z_{44}}{R_{44}^3} \right) \right], \\ \frac{T^p}{C_T} &= \left(\frac{1}{R_4} \mp \frac{1}{R_{44}} \right), \\ \frac{\sigma_{xx}^p}{C_\sigma} &= -4qA_3 \left(\frac{1}{R_4} \mp \frac{1}{R_{44}} \right) + A_3 \left\{ 4d\nu_4^2 + q(1 - a\nu_4^2) + q \left[6(1 - a\nu_4^2) + 4a\nu_4^2 \right] \frac{y^2}{r^2} \left(\frac{r^2}{R_4^3} \mp \frac{r^2}{R_{44}^3} \right) - 3A_3 \left[\nu_4^2(d - e\nu_4^2) + q(1 - a\nu_4^2) \right] \frac{y^2}{r^2} \left(\frac{r^4}{R_4^5} \mp \frac{r^4}{R_{44}^5} \right) \right\}, \\ \frac{\sigma_{zz}^p}{C_u} &= 8dA_3 \left(\frac{1}{R_4} \mp \frac{1}{R_{44}} \right) - 8A_3 \left[(d - e\nu_4^2) + \frac{e}{2}\nu_4^2 \right] \times \left(\frac{r^2}{R_4^3} \mp \frac{r^2}{R_{44}^3} \right) + 3A_3(d - e\nu_4^2) \left(\frac{r^4}{R_4^5} \mp \frac{r^4}{R_{44}^5} \right), \\ \frac{\sigma_{yz}^p}{C_u} &= A_3 y \left[4d \left(\frac{\nu_4 Z_4}{R_4} \mp \frac{\nu_4 Z_{44}}{R_{44}} \right) - 3(d - e\nu_4^2)r^2 \times \left(\frac{\nu_4 Z_4}{R_4^3} \mp \frac{\nu_4 Z_{44}}{R_{44}^3} \right) \right], \\ \frac{\sigma_{xy}^p}{C_\sigma} &= A_3 qxy \left\{ - \left[6(1 - a\nu_4^2) + 4a\nu_4^2 \right] \left(\frac{1}{R_4^3} \mp \frac{1}{R_{44}^3} \right) + 3(1 - a\nu_4^2) \left(\frac{r^2}{R_4^5} \mp \frac{r^2}{R_{44}^5} \right) \right\} \dots (30) \end{aligned}$$

u_y^p は u_x^p 中の x と y を置換、 σ_{yy}^p および σ_{xx}^p は σ_{xx}^p および σ_{yz}^p 中の y と x を置換したものである。式(30)において境界 $z=0$ 上で残る量は - 側の解で u_z^p と $\sigma_{yz}^p, \sigma_{xx}^p$ のみであり、+ 側の解では逆になる。式(30)中の無次元定数は式(17)以外次式で与えられる。

$$q = \frac{2C_{66}}{C_{33}} \dots (31)$$

3.2 各境界条件を満足する解 次に、補解は情報落ちが生じないように、 χ_3 による次式を選ぶ。

$$\phi_1 = C_u \int_0^\infty \frac{J_0(\alpha r)}{\alpha^2} \{B_1 + B_2\nu_4\alpha\} e^{-a\nu_4(z+1)} d\alpha \dots (32)$$

二重根と同様に変位と応力の一般式が求められるが、式(14)、式(18)の B_{i4} の項と同じであるので、ここでは

省略する。各境界条件に対し未知関数は以下のように求められる。

(1) 境界で基準温度との差が零かつ応力自由 $\sigma_{zz} = \sigma_{yz} = \sigma_{xx} = 0$ の場合：式(30)の特解の - 側を用い、未知関数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{2\nu_4^2(p - 3\nu_4^2)(d - e\nu_4^2)A_3}{Q} \left[\left(1 + \frac{4e\nu_4^2}{d - e\nu_4^2} \right) + \nu_4\alpha \right], \\ B_2 &= \frac{2\nu_4^2(p - \nu_4^2)(d - e\nu_4^2)A_3}{Q} \left[\left(1 + \frac{4e\nu_4^2}{d - e\nu_4^2} \right) + \nu_4\alpha \right], \\ Q &= (a_1 + f\nu_4^2)(p - 3\nu_4^2) - 2f\nu_4^2(p - \nu_4^2) \dots (33) \end{aligned}$$

(2) 境界で基準温度との差が零かつ変位固定 $u_x = u_y = u_z = 0$ の場合：式(30)の特解の - 側を用い、未知関数は次式で与えられる。

$$B_1 = B_2 = \frac{-2\nu_4^2(b - k\nu_4^2)A_3}{(e_1 + \nu_4^2)} \left[\left(1 + \frac{4k\nu_4^2}{b - k\nu_4^2} \right) + \nu_4\alpha \right] \dots (34)$$

(3) 境界で基準温度との差が零かつ $u_z = \sigma_{yz} = \sigma_{xx} = 0$ の場合：式(30)の特解の - 側を用い、未知関数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{-2\nu_4^2[f(b + 3k\nu_4^2) - (d + 3e\nu_4^2)]A_3}{(a_1 + fe_1)} \\ &\quad + \frac{-2\nu_4^2[f(b - k\nu_4^2) - (d - e\nu_4^2)]A_3\nu_4}{(a_1 + fe_1)}\alpha, \\ B_2 &= - \frac{(a_1 + f\nu_4^2)(b + 3k\nu_4^2) + (e_1 - \nu_4^2)(d + 3e\nu_4^2)}{(a_1 + fe_1)} A_3 \\ &\quad - \frac{(a_1 + f\nu_4^2)(b - k\nu_4^2) + (e_1 - \nu_4^2)(d - e\nu_4^2)}{(a_1 + fe_1)} A_3\nu_4\alpha \dots (35) \end{aligned}$$

(4) 境界で断熱かつ応力自由 $\sigma_{zz} = \sigma_{yz} = \sigma_{xx} = 0$ の場合：式(30)の特解の + 側を用い、未知関数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{4f\nu_4^2[3(d - e\nu_4^2) + 4e\nu_4^2]A_3}{\nu_4 Q} \frac{1}{\alpha} \\ &\quad + \frac{4f\nu_4^2[3(d - e\nu_4^2) + 4e\nu_4^2]A_3}{Q} + \frac{4f\nu_4^2(d - e\nu_4^2)A_3\nu_4}{Q}\alpha, \\ B_2 &= \frac{2(a_1 + f\nu_4^2)[3(d - e\nu_4^2) + 4e\nu_4^2]A_3}{\nu_4 Q} \frac{1}{\alpha} + 2(a_1 + f\nu_4^2) \\ &\quad \times \frac{[3(d - e\nu_4^2) + 4e\nu_4^2]A_3}{Q} + 2(a_1 + f\nu_4^2) \frac{(d - e\nu_4^2)}{Q} A_3\nu_4\alpha, \end{aligned}$$

$$Q = (a_1 + f\nu_4^2)(p - 3\nu_4^2) - 2f\nu_4^2(p - \nu_4^2) \dots (36)$$

(5) 境界で断熱かつ $u_x = u_y = u_z = 0$ の場合：式(30)の特解の + 側を用い、未知関数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{4\nu_4[3(1 - a\nu_4^2) + 4a\nu_4^2]A_3}{d_1(e_1 + \nu_4^2)} \frac{1}{\alpha} \\ &\quad + \frac{4\nu_4^2[3(1 - a\nu_4^2) + 4a\nu_4^2]A_3}{d_1(e_1 + \nu_4^2)} + \frac{4\nu_4^2(1 - a\nu_4^2)}{(a_1 + fe_1)} A_3\nu_4\alpha, \\ B_2 &= - \frac{2(e_1 - \nu_4^2)[3(1 - a\nu_4^2) + 4a\nu_4^2]A_3}{\nu_4 d_1(e_1 + \nu_4^2)} \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

$$-\frac{2(e_1 - \nu_4^2)[3(1 - a\nu_4^2) + 4a\nu_4^2]A_3}{d_1(e_1 + \nu_4^2)} - \frac{2(e_1 - \nu_4^2)A_3}{d_1(e_1 + \nu_4^2)}\nu_4\alpha \dots (37)$$

(6) 境界で断熱かつ $u_z = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$ の場合: 式(30)の特解の+側を用い, 付加項は不要である. 結果的に式(30)の特解はこの境界条件に対する解に相当する.

以上により未知関数が決定したので, これを式(18)の B_4 の項と同じ式に代入して変位や応力の閉形表現が可能であり, そのための公式を付録A. 3に示す.

3.3 半無限等方性弾性体の場合の解 等方性弾性体の場合には, ポアソン比 ν , 縦弾性係数 E および各定数の間に次式が成立する.

$$\left. \begin{aligned} \nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = a = b = k = 1, \\ 1 - a\nu_4^2 = b - k\nu_4^2 = d - e\nu_4^2 = 0, q = -d = -e = \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \end{aligned} \right\} (38)$$

$$C_{u0} = \frac{\alpha b_4(1 + \nu)}{4\pi\lambda_3(1 - \nu)}, C_{\tau 0} = \frac{b_4}{4\pi\lambda_3 z_0}, C_{\sigma 0} = \frac{\alpha E b_4}{4\pi\lambda_3(1 - \nu)z_0}. (39)$$

これらを代入して計算し整理すれば, 前報の半無限等方性弾性体の結果と完全に一致する⁽⁷⁾.

4. 単根の解と形が異なる項の特異性の考察

上で求めたグリーン関数が単根の場合の解と形の異なる項について特異性の考察を行う. x 方向変位 u_x は単根の解の場合, 無次元座標表示で

$$\frac{x}{R_j^+} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + \nu_j^2(z-1)^2 + \nu_j(z-1)}} \dots (40)$$

の項だけしか現れない⁽⁶⁾. しかし, 二重根の解の場合には, 式(10)および閉形公式(53)を考慮すれば

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + \nu_j^2(z-1)^2}}, \frac{x(x^2 + y^2)}{[\sqrt{x^2 + y^2 + \nu_j^2(z-1)^2}]^3} \dots (41)$$

の項が現れ, また三重根の解は式(30)および式(53)より

$$\frac{x(x^2 + y^2)}{[\sqrt{x^2 + y^2 + \nu_j^2(z-1)^2}]^3}, \frac{x(x^2 + y^2)^2}{[\sqrt{x^2 + y^2 + \nu_j^2(z-1)^2}]^5} (42)$$

の項が現れるが, これらは本質的には同じ特異性を持つ. しかし一方, z 方向変位 u_z の単根の解は

$$\ln \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + \nu_j^2(z-1)^2 + \nu_j(z-1)}} \right] \dots (43)$$

だけであるが⁽⁶⁾, 二重根の解になるとこの項の他に

$$\frac{\nu_j(z-1)}{\sqrt{x^2 + y^2 + \nu_j^2(z-1)^2}} \dots (44)$$

の項が現れる. また三重根の解になると, 対数特異性の項が全て消え,

$$\frac{\nu_j(z-1)}{\sqrt{x^2 + y^2 + \nu_j^2(z-1)^2}}, \frac{\nu_j(z-1)(x^2 + y^2)}{[\sqrt{x^2 + y^2 + \nu_j^2(z-1)^2}]^3} (45)$$

の項だけになる. これらは単根の解と異なる特異性を

有する項である.

このように, 変位 u_x, u_y の特異性は不変であるが, 変位 u_z は異なる特異性を持つことがわかる. 以上のことから, 特異性の考察を行う場合には, これらの二重根および三重根の場合の解も考慮して論じる必要がある. また, 熱発生を含む問題においては, 通常の等温での集中力問題には生じない, 特別な三重根の解となる場合が含まれる点に注意する必要がある.

5. 結 言

半無限横等方性弾性体中に定常点熱源のある場合で特性根が二重根および三重根となる場合の変位と応力のグリーン関数を, 変位関数法による鏡像原理および補解の重ね合わせの方法を用いて閉形表現で求めた. その結果変位 u_z において, 単根の場合の解とは特異性の形の異なる項が現れることが明らかになった. 本論文の解は, 熱的境界条件が基準温度との差零の場合および断熱の場合の解で, かつ変位と応力の力学的境界条件が緒言で述べた三種類の解である. また, 半無限等方性弾性体の解は, 本論文の三重根の解における特別な場合として含まれることがわかった.

付 録

A.1 2.2節の定数の詳細 二重根の特解である式(10)に現れた定数の詳細を示す.

$$\begin{aligned} a_{ux1} &= (1 - a\nu_1^2)(A_1 + A_2) - 2a\nu_1^2 A_2, \\ a_{ux2} &= -(1 - a\nu_1^2)A_2, \quad a_{ux3} = (1 - a\nu_4^2)A_4, \\ a_{uz1} &= \nu_1(b - k\nu_1^2)(A_1 + A_2) - 2\nu_1 k\nu_1^2 A_2, \\ a_{uz2} &= -\nu_1(b - k\nu_1^2)A_2, \quad a_{uz3} = \nu_4(b - k\nu_4^2)A_4, \\ a_{sx1} &= -\nu_1^2(d - e\nu_1^2)(A_1 + A_2) + 2\nu_1^2 e\nu_1^2 A_2, \\ a_{sx2} &= -q[(1 - a\nu_1^2)(A_1 - A_2) - 2a\nu_1^2 A_2], \\ a_{sx3} &= -q(1 - a\nu_1^2)A_2, \\ a_{sx4} &= q[(1 - a\nu_1^2)(A_1 + A_2) - 2a\nu_1^2 A_2], \\ a_{sx5} &= -\nu_1^2(d - e\nu_1^2)A_2, \quad a_{sx6} = -q(1 - a\nu_1^2)A_2, \\ a_{sx7} &= -\nu_4^2(d - e\nu_4^2)A_4, \quad a_{sx8} = -q(1 - a\nu_4^2)A_4, \\ a_{sx9} &= q(1 - a\nu_4^2)A_4, \\ a_{zz1} &= (d - e\nu_1^2)(A_1 - A_2) - 2e\nu_1^2 A_2, \\ a_{zz2} &= (d - e\nu_1^2)A_2, \quad a_{zz3} = (d - e\nu_4^2)A_4, \\ a_{yz1} &= \nu_1(d - e\nu_1^2)(A_1 + A_2) - 2\nu_1 e\nu_1^2 A_2, \\ a_{yz2} &= -\nu_1(d - e\nu_1^2)A_2, \quad a_{yz3} = \nu_4(d - e\nu_4^2)A_4, \\ a_{xy1} &= q[(1 - a\nu_1^2)(A_1 + A_2) - 2a\nu_1^2 A_2], \\ a_{xy2} &= q(1 - a\nu_1^2)A_2, \quad a_{xy3} = q(1 - a\nu_4^2)A_4 \dots (46) \end{aligned}$$

A.2 ①の式(13)による χ_4 の補解 ψ_0 を用いた結果 この場合の変位および応力は以下のように与えられる.

$$\frac{u_x^c}{C_u} = \frac{x}{r} \int_0^\infty \frac{J_1(\alpha r)}{\alpha} \sum_{j=1,4} \left\{ (1 - a v_1^2) [D_{1j}^* + D_{2j}^* v_1 \alpha] \right. \\ \left. + 2a v_1^2 D_{2j}^* \right\} e^{-\alpha(v_1 z + v_j)} d\alpha,$$

$$\frac{u_z^c}{C_u} = \int_0^\infty \frac{J_0(\alpha r)}{\alpha} \sum_{j=1,4} \left\{ v_1(b - k v_1^2) [(D_{1j}^* - D_{2j}^*) + D_{2j}^* v_1 \alpha] \right. \\ \left. + 2v_1 k v_1^2 D_{2j}^* \right\} e^{-\alpha(v_1 z + v_j)} d\alpha,$$

$$T^c = 0,$$

$$\frac{\sigma_x^c}{C_\sigma} = \int_0^\infty J_0(\alpha r) \sum_{j=1,4} \left\{ [-v_1^2(d - e v_1^2)(D_{1j}^* + 2D_{2j}^* \right. \\ \left. + D_{2j}^* v_1 \alpha) + 2v_1^2 e v_1^2 D_{2j}^*] - q \frac{y^2}{r^2} [(1 - a v) \right. \\ \left. \times (D_{1j}^* + D_{2j}^* v_1 \alpha) + 2v_1^2 a v_1^2 D_{2j}^*] \right\} e^{-\alpha(v_1 z + v_j)} d\alpha \\ + q \frac{y^2 - x^2}{r^3} \int_0^\infty \frac{J_1(\alpha r)}{\alpha} \sum_{j=1,4} \left\{ (1 - a v_1^2) \right. \\ \left. \times (D_{1j}^* + D_{2j}^* v_1 \alpha) + 2a v_1^2 D_{2j}^* \right\} e^{-\alpha(v_1 z + v_j)} d\alpha,$$

$$\frac{\sigma_z^c}{C_\sigma} = \int_0^\infty J_0(\alpha r) \sum_{j=1,4} \left\{ (d - e v_1^2) [D_{1j}^* + D_{2j}^* v_1 \alpha] \right. \\ \left. + 2e v_1^2 D_{2j}^* \right\} e^{-\alpha(v_1 z + v_j)} d\alpha,$$

$$\frac{\sigma_y^c}{C_\sigma} = \frac{y}{r} \int_0^\infty J_1(\alpha r) \sum_{j=1,4} \left\{ v_1(d - e v_1^2) [(D_{1j}^* - D_{2j}^*) + D_{2j}^* v_1 \alpha] \right. \\ \left. + 2v_1 e v_1^2 D_{2j}^* \right\} e^{-\alpha(v_1 z + v_j)} d\alpha,$$

$$\frac{\sigma_{xy}^c}{C_\sigma} = q \frac{xy}{r^2} \int_0^\infty \left[J_0(\alpha r) - \frac{2}{r} \frac{J_1(\alpha r)}{\alpha} \right] \sum_{j=1,4} \left\{ (1 - a v_1^2) \right. \\ \left. \times [D_{1j}^* + D_{2j}^* v_1 \alpha] + 2a v_1^2 D_{2j}^* \right\} e^{-\alpha(v_1 z + v_j)} d\alpha \dots (47)$$

境界条件(1)～(6)までに対応する未知関数は以下のよ
うに求められる。

(1) 境界で基準温度との差が零かつ応力自由の場合：
式(10)の特解の－側を用い、未知関数は次式で与えら
れる。

$$D_{11}^* = \frac{4e v_1^2}{d - e v_1^2} \left[A_1 + \left(1 - \frac{2e v_1^2}{d - e v_1^2} \right) A_2 - A_2 v_1 \alpha \right], \\ D_{21}^* = -2 \left[A_1 + \left(1 - \frac{2e v_1^2}{d - e v_1^2} \right) A_2 - A_2 v_1 \alpha \right], \\ D_{14}^* = \frac{4e v_1 v_4 (d - e v_4^2)}{(d - e v_1^2)^2} A_4, \quad D_{24}^* = -\frac{2v_4 (d - e v_4^2)}{v_1 (d - e v_1^2)} A_4. \quad (48)$$

(2) 境界で基準温度との差が零かつ変位固定の場合：
式(10)の特解の－側を用い、未知関数は次式で与えら
れる。

$$D_{11}^* = \frac{4a v_1^2 (b - k v_1^2)}{Q} \left[A_1 + \frac{b - 3k v_1^2}{b - k v_1^2} A_2 - A_2 v_1 \alpha \right], \\ D_{21}^* = \frac{-2(1 - a v_1^2)(b - k v_1^2)}{Q} \left[A_1 + \frac{b - 3k v_1^2}{b - k v_1^2} A_2 - A_2 v_1 \alpha \right], \\ D_{14}^* = \frac{4a v_1 v_4 (b - k v_4^2)}{Q} A_4, \quad D_{24}^* = \frac{-2v_4 (1 - a v_1^2)(b - k v_4^2)}{v_1 Q} A_4, \\ Q = (1 + a v_1^2)(b - k v_1^2) - 2k v_1^2 (1 - a v_1^2). \dots (49)$$

(3) 境界で基準温度との差が零かつ $u_z = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$ の場合：
式(10)の特解で v_4 の項は－側を用い、
 v_1 の項は＋側を用いる。また、補解の未知関数は次式
で与えられる。

$$D_{11}^* = D_{21}^* = 0, \\ D_{14}^* = \frac{v_4 (3v_1^2 - v_4^2)}{v_1^3} A_4, \quad D_{24}^* = \frac{v_4 (v_1^2 - v_4^2)}{v_1^3} A_4 \dots (50)$$

(4) 境界で断熱かつ応力自由の場合：
式(10)の特解の＋側を用い、未知関数は次式で与えられる。

$$D_{11}^* = 2 \frac{d - 3e v_1^2}{d - e v_1^2} \left(-A_1 + \frac{2e v_1^2}{d - e v_1^2} A_2 + A_2 v_1 \alpha \right), \\ D_{21}^* = 2 \left(-A_1 + \frac{2e v_1^2}{d - e v_1^2} A_2 + A_2 v_1 \alpha \right), \\ D_{14}^* = -\frac{2(d - 3e v_1^2)(d - e v_4^2)}{(d - e v_1^2)^2} A_4, \\ D_{24}^* = -2 \frac{d - e v_4^2}{d - e v_1^2} A_4. \dots (51)$$

(5) 境界で断熱かつ変位固定の場合：
式(10)の特解の＋側を用い、未知関数は次式で与えられる。

$$D_{11}^* = \frac{2(1 - a v_1^2)(b - 3k v_1^2)}{Q} \left(A_1 - \frac{2a v_1^2}{1 - a v_1^2} A_2 - A_2 v_1 \alpha \right), \\ D_{21}^* = \frac{2(1 - a v_1^2)(b - k v_1^2)}{Q} \left(A_1 - \frac{2a v_1^2}{1 - a v_1^2} A_2 - A_2 v_1 \alpha \right), \\ D_{14}^* = \frac{2(1 - a v_4^2)(b - k v_1^2)}{Q} A_4, \quad D_{24}^* = \frac{2(1 - a v_4^2)(b - k v_1^2)}{Q} A_4, \\ Q = (1 - a v_1^2)(b - 3k v_1^2) + 2a v_1^2 (b - k v_1^2). \dots (52)$$

(6) 境界で断熱かつ $u_z = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$ の場合：
式(10)の特解の＋側を用い、補解は不要である。す
なわち、式(10)の＋側の特解は結果的にこの境界条件
の解に相当している。

A.3 閉形公式 第2, 3章の閉形表現に用いる公式
は、係数を省略して記せば以下のように与えられる。

$$\int_0^\infty J_0(\alpha r) \left(\frac{1}{\alpha} + 1 + \alpha \right) e^{-\alpha(v_1 z + v_j)} d\alpha = \left(\ln \frac{1}{R_{ij}^+} + \frac{1}{R_{ij}^+} + \frac{Z_{ij}}{R_{ij}^3} \right), \\ \int_0^\infty J_0(\alpha r) [\alpha(v_1 z + v_j) - v_j \alpha] \left(\frac{1}{\alpha} + 1 + \alpha \right) e^{-\alpha(v_1 z + v_j)} d\alpha \\ = \left(\frac{Z_{ij}}{R_{ij}} - \frac{v_j}{R_{ij}} \right) + \left[\left(\frac{1}{R_{ij}} - \frac{r^2}{R_{ij}^3} \right) - \frac{v_j Z_{ij}}{R_{ij}^3} \right] \\ + \left[\left(\frac{2Z_{ij}}{R_{ij}^3} - \frac{3r^2 Z_{ij}}{R_{ij}^5} \right) - v_j \left(\frac{2}{R_{ij}^3} - \frac{3r^2}{R_{ij}^5} \right) \right], \\ \int_0^\infty J_1(\alpha r) \left(\frac{1}{\alpha} + 1 + \alpha \right) e^{-\alpha(v_1 z + v_j)} d\alpha = \left(\frac{r}{R_{ij}^+} + \frac{r}{R_{ij}^+ R_{ij}^+} + \frac{r}{R_{ij}^3} \right), \\ \int_0^\infty J_1(\alpha r) [\alpha(v_1 z + v_j) - v_j \alpha] \left(\frac{1}{\alpha} + 1 + \alpha \right) e^{-\alpha(v_1 z + v_j)} d\alpha \\ = \left[\left(\frac{r}{R_{ij}} - \frac{r}{R_{ij}^+} \right) - \frac{v_j r}{R_{ij}^+} \right] + \left(\frac{r Z_{ij}}{R_{ij}^3} - \frac{v_j r}{R_{ij}^3} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\left(\frac{3r}{R_{ij}^3} - \frac{3r^3}{R_{ij}^5} \right) - \frac{\nu_j 3r Z_{ij}}{R_{ij}^5} \right], \\
& \int_0^\infty \alpha J_0(\alpha r) \left(\frac{1}{\alpha} + 1 + \alpha \right) e^{-\alpha(\nu_i z + \nu_j)} d\alpha \\
& = \left[\frac{1}{R_{ij}} + \frac{Z_{ij}}{R_{ij}^3} + \left(\frac{2}{R_{ij}^3} - \frac{3r^2}{R_{ij}^5} \right) \right], \\
& \int_0^\infty \alpha J_0(\alpha r) \left[\alpha(\nu_i z + \nu_j) - \nu_j \alpha \right] \left(\frac{1}{\alpha} + 1 + \alpha \right) e^{-\alpha(\nu_i z + \nu_j)} d\alpha \\
& = \left[\left(\frac{1}{R_{ij}} - \frac{r^2}{R_{ij}^3} \right) - \frac{\nu_j Z_{ij}}{R_{ij}^3} \right] + \left[\left(\frac{2Z_{ij}}{R_{ij}^3} - \frac{3r^2 Z_{ij}}{R_{ij}^5} \right) - \nu_j \left(\frac{2}{R_{ij}^3} - \frac{3r^2}{R_{ij}^5} \right) \right] \\
& \quad + \left[\left(\frac{6}{R_{ij}^3} - \frac{2r^2}{R_{ij}^5} - \frac{15r^4}{R_{ij}^7} \right) - \nu_j \left(\frac{6Z_{ij}}{R_{ij}^5} - \frac{15r^2 Z_{ij}}{R_{ij}^7} \right) \right], \\
& \int_0^\infty \alpha J_1(\alpha r) \left(\frac{1}{\alpha} + 1 + \alpha \right) e^{-\alpha(\nu_i z + \nu_j)} d\alpha = \left(\frac{r}{R_{ij} R_{ij}^*} + \frac{r}{R_{ij}^3} + \frac{3r Z_{ij}}{R_{ij}^5} \right), \\
& \int_0^\infty \alpha J_1(\alpha r) \left[\alpha(\nu_i z + \nu_j) - \nu_j \alpha \right] \left(\frac{1}{\alpha} + 1 + \alpha \right) e^{-\alpha(\nu_i z + \nu_j)} d\alpha \\
& = \left(\frac{r Z_{ij}}{R_{ij}^3} - \frac{\nu_j r}{R_{ij}^3} \right) + \left[\left(\frac{3r}{R_{ij}^3} - \frac{3r^3}{R_{ij}^5} \right) - \frac{\nu_j 3r Z_{ij}}{R_{ij}^5} \right] \\
& \quad + \left[\left(\frac{12r Z_{ij}}{R_{ij}^5} - \frac{15r^3 Z_{ij}}{R_{ij}^7} \right) - \nu_j \left(\frac{12r}{R_{ij}^5} - \frac{15r^3}{R_{ij}^7} \right) \right]. \quad (53)
\end{aligned}$$

文 献

- (1) 古口日出男・大島睦巳・矢田敏夫, 二相横等方性弾性体の基本解, 機論A, 56-521, (1990-1), 84-92.
- (2) Pan, Y.C. & Chou, T.W., Point Force Solution for an Infinite Transversely Isotropic Solid, *J. Appl. Mech.*, 43(1976), 608-612.
- (3) Pan, Y.C. & Chou, T.W., Green's Function Solutions for Semi-Infinite Transversely Isotropic Materials, *Int. Engng. Sci.*, 17 (1979), 545-551.
- (4) Pan, Y.C. & Chou, T.W., Green's Function for Two-Phase Transversely Isotropic Materials, *J. Appl. Mech.*, 46 (1979), 551-556.
- (5) Yu, H.Y., Sanday, S.C. and Chang, C.I., Elastic Inclusion and Inhomogeneities in Transversely Isotropic Solids., *Proc. R. Sci. Lond. A*, 444(1994), 239-252.
- (6) 小林雅隆・古口日出男・近藤俊美, 定常点熱源に対する無限横等方性弾性体のグリーン関数, 機論A, 63-612 (1997-8), 1656-1662.
- (7) 小林雅隆・古口日出男・近藤俊美, 定常点熱源に対する半無限横等方性弾性体のグリーン関数, 機論A, 64-625 (1998-9), 2245-2250.