接合界面における弾塑性応力特異性*

陳 玳 珩^{*1}, 牛 島 邦 晴^{*2}

Elastic-Plastic Stress Singularity Near a Bonded Interface

Dai-Heng CHEN and Kuniharu USHIJIMA

In the present study, the plastic singularity for problems of a crack meeting and normal to an interface and of a corner of bonded two 90°-wedges. A practical method is introduced to solve homogeneous differential equations obtained in the analysis. Except of the hardening exponent n , the relative resistance of two materials to plastic deformation can be represented by a parameter Δ defined as $\Delta = (a_1/a_2)(E_2/E_1)(\sigma_{02}/\sigma_{01})^{n-1}$. For cases of two bonded materials having the same n , it is found that the singularity values s for the problem of a crack meeting and normal to an interface are restricted in a range of $2 > s > s^*$, where s^* are values for a single 90°-wedge with free-clamped edges, and the values s for the problem of a corner of bonded two 90°-wedges are restricted in a range of $s^* > s > 2 - 1/n$. For cases of two bonded materials having the different n , it is found that the order of singularity depends only on the hardening exponent n of the material with smaller n .

Key Words: Plasticity, Nonlinear Problem, Composite Material, Stress Singularity, Adhesive Joints, Plane Problem

1. 緒 言

最近、互いに異なる材料を接合ないし複合した部材が幅広く利用され、その強度評価が重要な問題となっている。一般に異材の接合部では、材料および形状の不連続のために特異応力場のような応力集中が発生し、これが原因となって接合部のき裂の発生を招き、全体的な破壊へ至ることが多い。一般に材料が破壊を起こす前には必ず塑性変形が生じ、応力特異性は緩和される。したがって異材接合材に対し適切な強度評価を行うためには、そのような塑性変形の影響を考慮した、接合部のき裂先端周りに発生する特異応力場の精密な解析が必要となる。

塑性変形の影響を考慮した特異応力場の解析は、これまで数多くの研究者によって行われてきた^{(1)~(9)}。しかし弾性応力特異性の研究と比較して、その数ははるかに少なく、特にそれらの解析精度は、単一材料でのき裂問題のような比較的簡単な場合を除いて、まだ十分には確認されていないのが現状である。例えば

Chao ら⁽⁹⁾が、Hutchinson の手法⁽¹⁾を異材接合界面にき裂が垂直にぶつかっている問題に適用して解析を行っているが、後に示すようにその研究において材料の組合せによっては、単一材のき裂問題と等しくなる場合があるにもかかわらず、そのときの解析結果と HRR⁽¹⁾⁽²⁾ 解の間にはかなりの差が見られ、解析精度に信頼しがたい点があると思われる。

一方著者らは、先に Hutchinson⁽¹⁾の手法と異なる、特異点領域をくさび状に分割し、各分割くさび要素の表面力と表面変位を結ぶ剛性マトリックスに基づく弾塑性応力特異性の解析手法を提案し、それを両縁応力自由、両縁変位固定、一方応力自由・一方変位固定の V 形切欠き先端の問題に適用して、手法の解析精度を確認した⁽¹⁰⁾。そこで本研究では、接合界面における弾塑性応力特異性の問題に先に著者らが提案した手法⁽¹⁰⁾を適用し、90°と90°の両くさびを接合した接合角部問題 [図 1(a)] およびき裂が接合界面に垂直にぶつかっている問題 [図 1(b)] について解析を行い、塑性変形が応力特異性に及ぼす影響を検討する。

2. 解 析 方 法

座標軸を図 1 のようにとり、 r は接合角部先端 [図 1(a)] またはき裂先端 [図 1(b)] からの距離、 θ は

* 原稿受付 1998 年 8 月 19 日。

*¹ 正員、東京理科大学工学部 (〒162 8601 東京都新宿区神楽坂 1-3)。*² 学生員、東京理科大学大学院。

E-mail: chend@me.kagu.sut.ac.jp

材料1の自由縁〔図1(a)〕またはき裂〔図1(b)〕からの角度である。材料1と材料2に関する各定数は、図中にも示すように上添字⁽¹⁾と⁽²⁾で区別する。ただし、両材料において同じ式を用いる場合は上添字を省略する。

両材料とも加工硬化特性がRamberg-Osgood則で与えられ、材料の1軸応力状態における応力-ひずみ関係は、

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad \dots\dots\dots (1)$$

で与えられるとする。ここで、 σ_0 および、 ϵ_0 は、それぞれ降伏応力および降伏ひずみであり、 $\epsilon_0 = \sigma_0/E$ である。また、 n はひずみ硬化指数($n > 1$)、 α は材料定数、 E はヤング率である。

塑性変形は非圧縮性であり、応力の静水圧部分 σ_{kk} に無関係であると仮定すると、一般に応力-ひずみ関係は、

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} s_{ij} + \frac{1-2\nu}{3E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{3\alpha}{2E} \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n-1} s_{ij} \quad \dots\dots\dots (2)$$

で与えられるが、特異点近傍においては、塑性ひずみに比べて弾性ひずみは無視できると考えられるので、応力-ひずみ関係を、

$$\epsilon_{ij} = \frac{3\alpha}{2E} \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n-1} s_{ij} \quad \dots\dots\dots (3)$$

と近似することができる。ここで、 ν はポアソン比、 s_{ij} は偏差応力、 σ_e は相当応力である。

Airyの応力関数 $\phi(r, \theta)$ を用いれば、応力は次の式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

で表される。固有関数展開法を用いて特異応力場を求

める際、応力関数 $\phi(r, \theta)$ を次式

$$\phi(r, \theta) = K \sigma_0 r^s \tilde{\phi}(\theta) \quad \dots\dots\dots (5)$$

で与えられるものとする。すなわち、各応力は次のように r と θ で変数分離できるものとする。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= K \sigma_0 r^{s-2} \left(s \tilde{\phi} + \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \theta^2} \right) = K \sigma_0 r^{s-2} \tilde{\sigma}_r(\theta) \\ \sigma_\theta &= K \sigma_0 r^{s-2} (s(s-1) \tilde{\phi}) = K \sigma_0 r^{s-2} \tilde{\sigma}_\theta(\theta) \\ \tau_{r\theta} &= K \sigma_0 r^{s-2} \left((1-s) \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \theta} \right) = K \sigma_0 r^{s-2} \tilde{\tau}_{r\theta}(\theta) \\ \sigma_e &= K \sigma_0 r^{s-2} \tilde{\sigma}_e(\theta) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

これによって、対応する変位場も r と θ で変数分離できる形となる。

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{K^n \alpha \sigma_0}{E} \cdot r^{n(s-2)+1} \tilde{u}_r(\theta) \\ u_\theta &= \frac{K^n \alpha \sigma_0}{E} \cdot r^{n(s-2)+1} \tilde{u}_\theta(\theta) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

著者らが先に提案した手法⁽¹⁰⁾を用いて、未知数 s および各材料における応力・変位の分布を求める。すなわち、き裂先端または接合角部先端の領域を、図2のような小さいくさび要素に分割し、各くさび要素に対して $\tilde{\sigma}_e(\theta)$ を一定とし、ひずみの適合条件から $\tilde{\phi}(\theta)$ が満足すべき方程式を求める。その方程式の一般解から要素の両縁における表面力と表面変位は、次のように四つの任意な定数 b_1, b_2, b_3, b_4 で表される。

$$\left\{ \begin{array}{c} -\tau_{r\theta a} \\ -\sigma_{\theta a} \\ \tau_{r\theta b} \\ \sigma_{\theta b} \end{array} \right\} = K \sigma_0 r^{s-2} \left\{ \begin{array}{c} -\tilde{\tau}_{r\theta a} \\ -\tilde{\sigma}_{\theta a} \\ \tilde{\tau}_{r\theta b} \\ \tilde{\sigma}_{\theta b} \end{array} \right\} = K \sigma_0 r^{s-2} A \left\{ \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

Fig. 1 Analysis model

Fig. 2 Displacement and traction on the surface a and b for a notch-shaped element

$$\begin{Bmatrix} u_{ra} \\ u_{\theta a} \\ u_{rb} \\ u_{\theta b} \end{Bmatrix} = \frac{K^n a \sigma_0}{E} \cdot r^{n(s-2)+1} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_{ra} \\ \tilde{u}_{\theta a} \\ \tilde{u}_{rb} \\ \tilde{u}_{\theta b} \end{Bmatrix} \\ = \frac{K^n a \sigma_0}{E} \cdot r^{n(s-2)+1} C \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 A と C は、各成分が未知数 s の関数である 4×4 の行列である。これらの式の詳細は、文献(10)を参照されたい。

式(8)、(9)から、一つの要素の表面力と表面変位を結ぶ剛性マトリックス m が得られる。

$$\begin{Bmatrix} -\tilde{\tau}_{r\theta a} \\ -\tilde{\sigma}_{\theta a} \\ \tilde{\tau}_{r\theta b} \\ \tilde{\sigma}_{\theta b} \end{Bmatrix} = m \begin{Bmatrix} \tilde{u}_{ra} \\ \tilde{u}_{\theta a} \\ \tilde{u}_{rb} \\ \tilde{u}_{\theta b} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (10)$$

$$m = AC^{-1} \dots\dots\dots (11)$$

全要素について m を計算し、隣り合う両要素の境界面における応力と変位の連続条件により、各分割線での変位 $\tilde{u}_{r,k}$, $\tilde{u}_{\theta,k}$, $k=1, 2, \dots$ に関する線形同次方程式が得られる。この方程式は、 $n_1=n_2$ の場合と $n_1 \neq n_2$ の場合とでは異なり、その詳細については3章で述べる。そしてこの同次方程式の係数マトリックスの各成分が未知数 s の関数であるので、同次方程式の非零解が存在するための条件、すなわち係数マトリックスの行列式が零でなければならない条件から、未知数である応力特異性指数 s を求めることができる。

s を求めれば、各分割線での変位 $\tilde{u}_{r,k}$, $\tilde{u}_{\theta,k}$, $k=1, 2, \dots$ がその同次方程式の非零解として求まる。またこれにより、各要素内の応力も求まる。ただし、以上の計算を行うために、各要素における $\tilde{\sigma}_e$ の値が必要であるが、それを事前に知ることはできないため、反復計算が必要である。本研究では先の解析⁽¹⁰⁾と同様に、弾性応力分布に対応する各要素の二等分線上の $\tilde{\sigma}_e$ の値を、 $\tilde{\sigma}_e$ の初期値として用いて上に述べた計算を行い、そして求めた各要素の二等分線上の $\tilde{\sigma}_e$ を次の計算における $\tilde{\sigma}_e$ の設定値として再計算を行い、 s および $\tilde{\sigma}_e$ の値が収束するまで繰返し計算を行う。

3. 解析結果

3・1 $n_1=n_2$ の場合 $n_1=n_2$ の場合、接合界面における応力と変位の連続条件、例えば図1(a)の $\theta=\pi/2$ の界面における応力と変位の連続条件、

$$\begin{cases} u_r^{(1)}|_{\theta=(\pi/2)-0} = u_r^{(2)}|_{\theta=(\pi/2)+0} \\ u_\theta^{(1)}|_{\theta=(\pi/2)-0} = u_\theta^{(2)}|_{\theta=(\pi/2)+0} \\ \tau_{r\theta}^{(1)}|_{\theta=(\pi/2)-0} = \tau_{r\theta}^{(2)}|_{\theta=(\pi/2)+0} \\ \sigma_\theta^{(1)}|_{\theta=(\pi/2)-0} = \sigma_\theta^{(2)}|_{\theta=(\pi/2)+0} \end{cases} \dots\dots\dots (12)$$

より、以下の式

$$\begin{cases} \tilde{u}_r^{(1)}|_{\theta=(\pi/2)-0} = \tilde{u}_r^{(2)}|_{\theta=(\pi/2)+0} \\ \tilde{u}_\theta^{(1)}|_{\theta=(\pi/2)-0} = \tilde{u}_\theta^{(2)}|_{\theta=(\pi/2)+0} \\ \tilde{\tau}_{r\theta}^{(1)}|_{\theta=(\pi/2)-0} = \tilde{\tau}_{r\theta}^{(2)}|_{\theta=(\pi/2)+0} \\ \tilde{\sigma}_\theta^{(1)}|_{\theta=(\pi/2)-0} = \tilde{\sigma}_\theta^{(2)}|_{\theta=(\pi/2)+0} \end{cases} \dots\dots\dots (13)$$

が得られる。式(13)より全解析領域の各分割線での変位に関する同次方程式

$$M \begin{Bmatrix} \tilde{u}_{r,1}^{(1)} \\ \vdots \\ \tilde{u}_{r,N^{(1)+1}}^{(1)} \\ \tilde{u}_{\theta,N^{(1)+1}}^{(1)} \\ \tilde{u}_{r,2}^{(2)} \\ \vdots \\ \tilde{u}_{\theta,N^{(2)+1}}^{(2)} \end{Bmatrix} = O \dots\dots\dots (14)$$

が得られる。ここに、 $N^{(1)}$ と $N^{(2)}$ は材料1と2の領域におけるそれぞれの分割数である。したがって、マトリックス M の行列式が零でなければならない条件から、未知数 s を求めることができる。

各材料定数の組合せについて s の解析結果を整理する際、次式

$$\Delta = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{E_2}{E_1} \left(\frac{\sigma_{02}}{\sigma_{01}} \right)^{n-1} \dots\dots\dots (15)$$

で定義される複合パラメータ Δ を導入する。材料の応力-ひずみ関係式(3)からわかるように、応力特異性に及ぼす両材料定数の影響は、複合パラメータ Δ およびひずみ硬化指数 n の二つのパラメータのみで表される。図3と図4はそれぞれ平面応力状態と平面ひずみ状態について、 $\Delta=0.01, 0.1, 0.5, 2, 10, 100$ での指数 s とひずみ硬化指数 n の逆数 $1/n$ の関係を示す。これらの図から次のことがわかる。

(1) ひずみ硬化指数 n が大きくなるほど、指数 s は大きく応力特異性は小さくなる。 $n=1$ のときの指数 s は、 $E_2/E_1=\Delta$, $\nu_1=\nu_2=0.5$ のときの弾性材のそれに等しいが、 $1/n \rightarrow 0$ で二つの材料はともに完全塑性体となるために、 $s \rightarrow 2$ となり応力特異性は消失している。

(2) 90° と 90° の両くさびを接合した接合角部問題 [図1(a)] において、複合パラメータ $\Delta=\Delta_0>1$ と $\Delta=1/\Delta_0<1$ とは同じ特異性をもつので、説明を簡単にするために $\Delta_0>1$ を用いる(以下同様)。 Δ_0 が大きいほど指数 s の値は小さく、応力特異性は大きい。また $\Delta_0 \rightarrow \infty$ のとき、その指数 s の値は両縁を一方応

力自由・一方変位固定した角度 90° の単一くさび問題の場合の s の値(図3, 4中の太線)に等しくなる。

(3) き裂が接合界面に垂直にぶつかっている問題[図1(b)]において、複合パラメータ Δ が大きいほど、指数 s の値は大きく応力特異性は小さくなるが、その値は常に両縁を一方応力自由・一方変位固定した角度 90° の単一くさび問題の場合の s の値(図3, 4中の太線)より小さい。これは該当問題が $\Delta \rightarrow \infty$ のとき、一方応力自由・一方変位固定した角度 90° の単一くさび問題とみなされるからである。また、 Δ が小さいほど s の値は小さくなるが、その値は常に $s = 2 - 1/n$ (図中の一点鎖線)の値より大きい。これはき裂先端近傍の変位が式(9)で示したように $r^{n(s-2)+1}$ に比例し、き裂先端での変位が有限であるため $n(s-2)+1 > 0$ 、すなわち $s > 2 - 1/n$ となるからである。

(4) き裂が接合界面に垂直にぶつかっている問題[図1(b)]において、応力特異性はモード I の変形によるものと、モード II の変形によるものとに分けることができる。モード I の変形による応力特異性(図3, 4中の実線)とモード II の変形による応力特異性(図3, 4中の点線)は、 $n=1$ であれば完全に一致するが、 $n > 1$ のとき、 $\Delta=1$ の場合を除いて両者はわずかながら異なっている。このことは表1に示す s の数値からも理解される。

図3, 4で用いた複合パラメータ Δ は、両材料にお

いて $\alpha_1 = \alpha_2$, $\sigma_{01} = \sigma_{02}$ のときの縦弾性係数の比 E_2/E_1 、または $E_1 = E_2$, $\sigma_{01} = \sigma_{02}$ のときの定数 α の比 α_1/α_2 とみなされるので、図3, 4は、そのまま二つの材料の縦弾性係数 E のみ、もしくは材料定数 α のみが異なる場合の指数 s とひずみ硬化指数 n の関係となる。しかし、両材料で $\alpha_1 = \alpha_2$, $E_1 = E_2$ のときの降伏応力 σ_0 の比 σ_{02}/σ_{01} のみによる影響を見るために、図3, 4のデータを図5, 6のように再整理する必要がある。これらの図からわかるように、 $1/n = 0.5$ のところで、 $\sigma_{02}/\sigma_{01} = \Delta_0$ での図5, 6の各指数 s の値[図1(a)と図1(b)のモード I, モード II] は、それぞれ図3, 4の $\Delta = \Delta_0$ のそれに等しいが、 $1/n \neq 0.5$ ではそれぞれ異なった挙動を示す。具体的には、 $1/n < 0.5$ での任意の n において、図5, 6で $\sigma_{02}/\sigma_{01} = \Delta_0 \neq 1$ のときの各指数 s の値と $\sigma_{02}/\sigma_{01} = 1$ のそれとの差は、図3, 4で $\Delta = \Delta_0$ の s の値と $\Delta = 1$ のそれとの差より大きい。 $1/n$

Table 1 s for a crack normal to and terminating at a bimaterial interface

		$\Delta = 0.1$	$\Delta = 1.0$	$\Delta = 10.0$
$n = 1$	Mode I	1.2453	1.5000	1.6532
	Mode II	1.2453	1.5000	1.6532
$n = 2$	Mode I	1.5703	1.6668	1.7540
	Mode II	1.5599	1.6668	1.7603
$n = 5$	Mode I	1.8159	1.8333	1.8514
	Mode II	1.8136	1.8333	1.8624
$n = 10$	Mode I	1.9053	1.9090	1.9127
	Mode II	1.9048	1.9090	1.9163

Fig. 3 Dependence of singularity s on $1/n$ and Δ under plane stress

Fig. 4 Dependence of singularity s on $1/n$ and Δ under plane strain

>0.5 においては逆にその差は小さくなっている。また $n=1.0$ においては、 σ_{02}/σ_{01} の大小にかかわらず応力特異性指数 s は常に弾性の厳密解 2 [図 1(a)] または 1.5 [図 1(b)] となる。

本研究で取扱っているき裂が接合界面に垂直にぶつかっている問題は、Chao ら⁽⁹⁾ によっても解析されて

Fig. 5 Dependence of singularity s on $1/n$ and σ_{02}/σ_{01} under plane stress

Fig. 6 Dependence of singularity s on $1/n$ and σ_{02}/σ_{01} under plane strain

いる。彼らは

$$\beta = \Delta^{1/n} = \left\{ \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{E_2}{E_1} \left(\frac{\sigma_{02}}{\sigma_{01}} \right)^{n-1} \right\}^{1/n} \quad \dots\dots\dots (16)$$

となるパラメータ β を用いて計算結果を整理している。そこで本解析を Chao らの結果⁽⁹⁾ と比較するために、図 7, 8 では該当問題を平面応力状態でモード I, モード II の変形について、 $\beta=0.1, 1, 10$ のときの s と $1/n$ の関係を示す。ここで、図中の実線は本解析結果を、点線は Chao らの結果⁽⁹⁾ を表している。これらの図からわかるように、本解析結果と Chao の結果は一致しておらず、特にモード I の場合での両者の差は大きい。しかし $\beta=1$ のとき、本解析結果は単一材料に存在するき裂問題の HRR 解⁽¹⁾ (図中の ●) とよく一致していること、また $n=1$ のとき、本解析結果が $\nu_1=\nu_2=0.5$, $E_1=E_2=0.1, 10$ での弾性解析結果 (図中の数値 1.245 と 1.653) とよく一致していることから、Chao ら⁽⁹⁾ の解析精度には問題があると考えられる。

3・2 $n_1 \neq n_2$ の場合 $n_1 \neq n_2$ の場合、接合界面、例えば図 1(a) の $\theta=90^\circ$ の界面における変位の連続条件は、

$$\gamma^{n_1(s-2)+1} \tilde{u}_i^{(1)}|_{\theta=(\pi/2)-0} = \gamma^{n_2(s-2)+1} \tilde{u}_i^{(2)}|_{\theta=(\pi/2)+0} \quad (i=r, \theta) \quad \dots\dots\dots (17)$$

となる。解析対象が角部先端のごく近傍に限られているので、上式は次式

Fig. 7 Dependence of singularity s on β for MODE I deformation

$$\frac{\tilde{u}_i^{(1)}}{\tilde{u}_i^{(2)}} \Big|_{\theta=(\pi/2)-0} = \lim_{r \rightarrow 0} r^{(2-s)(n_1-n_2)} \dots \dots \dots (18)$$

のように理解される。ここでさらに $s < 2$ を考慮すればわかるように、もし $n_1 > n_2$ であれば式(18)から

$$\tilde{u}_i^{(1)} \Big|_{\theta=(\pi/2)-0} = 0 \quad (i=r, \theta) \dots \dots \dots (19)$$

が得られ、もし $n_1 < n_2$ であれば式(18)から

$$\tilde{u}_i^{(2)} \Big|_{\theta=(\pi/2)+0} = 0 \quad (i=r, \theta) \dots \dots \dots (20)$$

が得られる。したがって、 $n_1 \neq n_2$ の場合の接合界面における境界条件は、

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_\theta^{(1)} \Big|_{\theta=(\pi/2)-0} = \tilde{\sigma}_\theta^{(2)} \Big|_{\theta=(\pi/2)+0} \\ \tilde{\tau}_{r\theta}^{(1)} \Big|_{\theta=(\pi/2)-0} = \tilde{\tau}_{r\theta}^{(2)} \Big|_{\theta=(\pi/2)+0} \end{cases} \dots \dots \dots (21)$$

$$\begin{cases} \tilde{u}_r^{(1)} \Big|_{\theta=(\pi/2)-0} = 0 \\ \tilde{u}_\theta^{(1)} \Big|_{\theta=(\pi/2)-0} = 0 \end{cases} \text{ for } n_1 > n_2 \dots \dots \dots (22)$$

$$\begin{cases} \tilde{u}_r^{(2)} \Big|_{\theta=(\pi/2)+0} = 0 \\ \tilde{u}_\theta^{(2)} \Big|_{\theta=(\pi/2)+0} = 0 \end{cases} \text{ for } n_1 < n_2$$

のように表される。各領域(1)と(2)に関する各分割線での変位と領域の表面力は $2(N^{(1)}+1) \times 2(N^{(1)}+1)$ と $2(N^{(2)}+1) \times 2(N^{(2)}+1)$ のマトリックス $M^{(1)}$ と $M^{(2)}$ によって次式のように結ばれる。

$$M^{(1)} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_{r,1}^{(1)} \\ \tilde{u}_{\theta,1}^{(1)} \\ \vdots \\ \tilde{u}_{r,N^{(1)}+1}^{(1)} \\ \tilde{u}_{\theta,N^{(1)}+1}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \tilde{\tau}_{r\theta}^{(1)} \Big|_{\theta=\pi/2-0} \\ \tilde{\sigma}_\theta^{(1)} \Big|_{\theta=\pi/2-0} \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (23)$$

$$M^{(2)} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_{r,1}^{(2)} \\ \tilde{u}_{\theta,1}^{(2)} \\ \vdots \\ \tilde{u}_{r,N^{(2)}+1}^{(2)} \\ \tilde{u}_{\theta,N^{(2)}+1}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\tilde{\tau}_{r\theta}^{(2)} \Big|_{\theta=\pi/2+0} \\ -\tilde{\sigma}_\theta^{(2)} \Big|_{\theta=\pi/2+0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (24)$$

例えば $n_1 > n_2$ の場合を考えると、式(22)より $\tilde{u}_{r,N^{(1)}+1}^{(1)} = \tilde{u}_{\theta,N^{(1)}+1}^{(1)} = 0$ である。これによって式(23)から領域(1)の変位 $\tilde{u}_{r,1}^{(1)}, \tilde{u}_{\theta,1}^{(1)}, \dots, \tilde{u}_{r,N^{(1)}}^{(1)}, \tilde{u}_{\theta,N^{(1)}}^{(1)}$ に関する $2N^{(1)}$ 個の同次方程式が得られる。このとき、式(24)は右辺では $-\tilde{\tau}_{r\theta}^{(2)} \Big|_{\theta=(\pi/2)+0} = -\tilde{\tau}_{r\theta}^{(1)} \Big|_{\theta=(\pi/2)-0}$, $\tilde{\sigma}_\theta^{(2)} \Big|_{\theta=(\pi/2)+0} = \tilde{\sigma}_\theta^{(1)} \Big|_{\theta=(\pi/2)-0}$ となるように $2(N^{(2)}+1)$ 個の未知数 $\tilde{u}_{r,1}^{(2)}, \dots, \tilde{u}_{\theta,N^{(2)}+1}^{(2)}$ を求める問題である。したがって検討される 90° と 90° の接合角部の特異応力

Fig. 8 Dependence of singularity s on β for MODE II deformation

Fig. 9 Dependence of singularity s on $1/n_1$ for Fig. 1 (a) with $n_1 > n_2$

場の問題は、 n が大きい側の材料では一方応力自由・一方変位固定した単一くさびの同次方程式の非零解の問題と n が小さい側の材料が特異性をもつ表面力を受けるときの非同次方程式の解の問題とに分けることができ、よってそのときの応力特異性は、 n が大きい側の単一材料の一方応力自由・一方変位固定した角度 90° の単一くさび問題のそれに等しい。

図 9 は $n_1 > n_2$ として求めた平面応力状態での応力特異性の指数 s と $1/n$ の関係を示すものである。 s の値は n が小さい側の材料のひずみ硬化指数 n_2 の値に関係せず、 n_1 のみの関数である。またその値は当然のことながら著者ら⁽¹⁰⁾ が先に求めた一方応力自由・一方変位固定した角度 90° の単一くさび問題の s と一致している。

図 1(b) のき裂が接合界面に垂直にぶつかっている問題に対し、同様な議論をすればわかるように、 $n_1 > n_2$ のときの応力特異性は、一方応力自由・一方変位固定した角度 90° の単一くさび問題のそれに等しく、すなわち図 1(a) の問題のそれと同じであり、図 9 中の指数 s は図 3, 4 中に示した一方応力自由・一方変位固定した角度 90° の単一くさび問題 s の値と一致する。しかし $n_1 < n_2$ のとき、応力特異性の問題は領域 (2) の両縁とも変位固定した角度 180° の単一くさびの問題となるが、 180° の単一くさびには応力特異性が生じないので、図 1(b) の問題では $n_1 < n_2$ のときに応力特異性が生じないことがわかる。このこと ($n_1 < n_2$ のときに応力特異性が生じないこと) は、以下のような議論からも理解される。

き裂が接合界面に垂直にぶつかっている問題において、通常き裂先端が変形しやすい材料にぶつかると、応力特異性が上昇する。例えば、弾性応力特異性に関しては、き裂がない側の材料の縦弾性係数 $E^{(2)}$ が、き裂を有する側の $E^{(1)}$ より小さければ、応力特異性は均質材中のそれより大きく、しかも $E^{(2)}/E^{(1)}$ が小さくなるにつれて、それが大きくなる。 $n_1 < n_2$ とは、き裂がない側の材料がより塑性変形しやすいことを意味する。したがってこの場合、単一材料中のき裂問題より大きい応力特異性が生じてもおかしくないと思われる。しかし、ここで注意しなければならないことは、本解析で求めているのは、各材料の領域において式 (5) のように r と θ で変数分離できるような応力の解である、という点である。応力の解に関するこのような制限によって、 $n_1 \neq n_2$ の場合、検討される領域は式 (18) に示すように通常の特異場よりさらに小さい領域である。このような領域において、 $n_1 < n_2$ のとき、式 (22) が示すように材料 1 の接合界面における変位に

対して境界条件がついておらず、すなわち、材料 1 の変形に対して、材料 2 からはなにも制限を与えていない。つまりこれは、弾性応力特異性の場合に例えると、 $E^{(2)}=0$ の場合に相当する。き裂が接合界面に垂直にぶつかっている問題の弾性応力特異性は、 $E^{(2)}$ が小さくなるにつれて大きくなるが、 $E^{(2)}=0$ のときは、逆に応力特異性が生じない。これは取扱う問題が半無限板の自由縁にぶつかるき裂問題とみなされ、き裂と自由縁との交点には応力特異性が生じないからである。したがって弾塑性変形の場合、 $n_1 < n_2$ のとき、き裂先端の極めて小さい領域において、弾性変形の $E^{(2)}=0$ の場合と同様な理由で、応力特異性が生じないことは理解される。

4. 結 言

本研究では、接合界面における弾塑性応力特異性の研究として、先に著者らが提案した応力の特異点領域をくさび状に分割し、各分割くさび要素の表面力と表面変位を結ぶ剛性マトリックスに基づく、弾塑性応力特異性の解析手法を用いて、 90° と 90° の両くさびを接合した接合角部問題 [図 1(a)] およびき裂が接合界面に垂直にぶつかっている問題 [図 1(b)] について解析を行い、塑性変形が応力特異性に及ぼす影響を検討した。解析結果より、次のことが明らかになった。まず二つの材料のひずみ硬化指数が等しい $n_1 = n_2$ の場合、

(1) 図 1(a), (b) どちらの問題とも、ひずみ硬化指数 n が大きくなるほど、応力特異性は小さくなり、 $1/n=0$ で二つの材料はともに完全塑性体となるために、応力特異性は消失する。

(2) 二つの材料の違いを表すパラメータ Δ [式 (15) 参照] による応力特異性の影響について、解析および検討を行ったところ、図 1(a) の問題では Δ が 1 から離れるほど、図 1(b) の問題では Δ が 1 より大きいほど応力特異性は小さくなる。また両問題とも、 $\Delta \rightarrow \infty$ のときの応力特異性は、一方応力自由・一方変位固定した角度 90° の単一くさび問題のそれに等しい。これによって、図 1(a) の問題に対する s の値 $s|_{\text{Fig. 1(a)}}$ と図 1(b) の問題に対する s の値 $s|_{\text{Fig. 1(b)}}$ の間に

$$2 > s|_{\text{Fig. 1(a)}} \geq s|_{\text{Fig. 1(b)}} > 2 - \frac{1}{n}$$

が成立する。

(3) 図 1(b) の問題において、モード I の変形による応力特異性とモード II の変形による応力特異性は、 $n=1$ であれば完全に一致するが、 $n>1$ のとき、 $\Delta=1$ の場合を除いて両者はわずかながら異なってい

る。

(4) 図1(b)の問題において, 本解析結果とChaoらの結果⁽⁹⁾は一致していないが, 本解析結果($n=1$)と弾性解析結果, 本解析結果($\beta=1$)とHRR解⁽¹⁾がよく一致していることから, Chaoらの結果⁽⁹⁾の解析精度に問題があるといえる。

次に $n_1 \neq n_2$ の場合については以下のことが明らかになった。

(5) 図1(a)と $n_1 > n_2$ のときの図1(b)の問題において, 指数 s はひずみ硬化指数 n の小さい方に関係せず, 大きい方の n のみの関数となり, いずれも応力特異性は一方応力自由・一方変位固定した角度 90° の単一くさび問題のそれに等しい。しかし図1(b)の問題において $n_1 < n_2$ のとき, 応力特異性が生じない。

文 献

- (1) Hutchinson, J. W., Singular Behavior at the End of a Tensile Crack in a Hardening Material, *J. Mech. Phys. Solids*, **16** (1968), 13-31.
- (2) Rice, J. R. and Rosengren, G. F., Plane Strain Deformation near a Crack Tip in a Power-Law Hardening Material, *J. Mech. Phys. Solids*, **16** (1968), 1-12.
- (3) Shih, C. F., Small-Scale Yielding Analysis of Mixed Mode Plane-Strain Crack Problems, *Fracture Analysis, ASTM STP*, 560 (1974), 187-210.
- (4) Xia, L. and Wang, T., Singular Behavior near the Tip of a Sharp V-notch in a Power-Law Hardening Material, *Int. J. Fract.*, **59** (1993), 83-93.
- (5) Duva, J. M., The Singularity at the Apex of a Rigid Wedge Embedded in a Nonlinear Material, *J. Appl. Mech.*, **55** (1988), 361-364.
- (6) Duva, J. M., The Singularity at the Apex of a Rigid Wedge After Partial Separation, *J. Appl. Mech.*, **56** (1989), 977-979.
- (7) 藤谷義信, 有限要素固有値解析法によるき裂先端の特異応力場の解析, 合同委員会資料(1991), 1-17.
- (8) Gao, Y. and Lou, Z., Mixed Mode Interface Crack in a Pure Power-Hardening Bimaterial, *Int. J. Fract.*, **43** (1990), 241-256.
- (9) Chao, Y.-J., Sutton, M. A. and Wu, R., Determination of the Asymptotic Crack Tip Fields for a Crack Perpendicular to an Interface between Elastic-Plastic Materials, *Acta Mech.*, **100** (1993), 13-36.
- (10) 陳玳珩・牛島邦晴, V字形切欠き先端における弾塑性応力特異性, 機論, **64**-620, A (1998), 933-941.