熱応力・クリープ問題の感度解析*

陳 猷^{*1}, 中村和博^{*1}
森 昌彦^{*1}, 久田俊明^{*2}

Sensitivity Analysis for Thermal Stress and Creep Problems

Xian CHEN^{*3}, Kazuhiro NAKAMURA,
Masahiko MORI and Toshiaki HISADA^{*3} Takasago R & D Center, Mitsubishi Heavy Industries, Ltd.,
2-1-1, Shinhama Arai-cho, Takasago, Hyogo, 676-8686 Japan

In this work, a finite element sensitivity analysis method for thermal stress and creep problems is proposed. The method is characterized by the so-called semi-analytical direct differentiation approach, i. e., the formulation is based on the direct differentiation but the variation of internal force due to the perturbation of design parameters is evaluated numerically. Since the corresponding subroutine of an existing finite element analysis code may be used, it is unnecessary to manipulate the adopted constitutive relation at sensitivity analysis stage. Thus, the proposed method can be applied for various temperature and time dependent problems. The effectiveness of the method is examined through a couple of numerical examples.

Key Words: Computational Mechanics, Finite Element Method, Nonlinear Problem, Thermal Stress, Creep, Sensitivity Analysis

1. 緒 言

高温で運転する各種機器においては熱応力及びクリープ現象が構造強度、信頼性に大きな影響を与えている。しかし現象が複雑である為、材料、構造寸法及び熱条件などに関する設計の合理的改善、さらには最適設計等を行うためには、設計変数の変動に対する構造応答の変化率、即ち感度を知ることが必要である。感度解析法として最も直接的な方法は有限差分法(FDM: Finite Difference Method)である。これは設計変数を実際に変動させた値を用いて有限要素解析を行い、差分法で感度を求める手法である。しかし当然のことながら多変数大規模非線形問題に対しては計算時間及びコストが膨大になるため、より効率的な感度解析法の研究が多数行われている。特に構造挙動が変形履歴に依存するような問題においては計算効率の観点から、有

限要素解析の基礎式を設計変数に対して微分する直接微分法(DDM: Direct Differentiation Method)が主流となっている。しかし弾塑性、クリープのような材料非線形性を表す構成則が多様に提案されている現状では、定式化が冗長になりがちな直接微分法を個別に適用することは現実的でなく、感度解析の普及のためには、より簡便かつ汎用的な手法が望まれる。

一方、著者らは直接微分法に基づく定式化において、設計変数に対する内力や接触力の微分のみを差分的に評価する半解析的直接微分法(SDM: Semi-analytical Differentiation Method)を用いて大変形弾塑性問題⁽¹⁾、無摩擦接触問題⁽²⁾の感度解析を行い、良好な結果を得てきた。本研究では熱ひずみ及びクリープひずみを考慮し、半解析的直接微分法による熱応力・クリープ問題に対する感度解析法を提案する。この方法は反復計算をせず有限要素解析と同時に感度を求めることができるほか、既存の有限要素解析システムの計算ルーチンを利用することにより、構成則の具体的な形式を意識することなく実行可能であるため、効率性と汎用性を併せ持つ手法である。

次節ではまず本問題における感度解析の定式化を行い、第3節では数値解析例を通じて提案した手法の有

* 原稿受付 1999年1月18日。

^{*1} 正員、三菱重工業(株)高砂研究所(〒676-8686 高砂市荒井町新浜2-1-1)。^{*2} 正員、東京大学大学院工学系研究科(〒113-0033 東京都文京区本郷7-3-1)。

E-mail: xchen@sml.k.u-tokyo.ac.jp

効性を検証する。なお本研究では温度場は熱条件により決められ、構造変形による影響は無視できると仮定する。

2. 熱応力・クリープ問題の感度解析定式化

2・1 有限要素解析 変形前の配置を基準配置とする total Lagrange 表記による仮想仕事式は次式で与えられる。

$$\int_V \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV = \int_S \bar{\mathbf{i}} \cdot \delta \mathbf{u} dS + \int_V \rho_0 \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} dV \quad (1)$$

ここで V , S は物体の変形前の配置での体積領域及び公称表面力 $\bar{\mathbf{i}}$ の作用する表面領域; $\rho_0 \mathbf{g}$ は単位体積あたり物体力; $\mathbf{S}$, $\mathbf{E}$ は変形前の配置を基準とする第 2 Piola-Kirchhoff 応力と Green-Lagrange ひずみである。上式の両辺はそれぞれ内力及び外力による仮想仕事を表している。さらに, $\mathbf{u}$ を変位, $(\cdot)_s$ をテンソルの対称成分とし, $\nabla_x = (\partial / \partial X_i) \mathbf{e}_i$ を用いて任意ベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ に対するテンソル演算子 $\mathbf{e}(\mathbf{a})$, $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ を次のように定義すれば,

$$\mathbf{e}(\mathbf{a}) \equiv (\mathbf{a} \otimes \nabla_x + (\mathbf{a} \otimes \nabla_x)^T \cdot (\mathbf{u} \otimes \nabla_x))_s \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv ((\mathbf{a} \otimes \nabla_x)^T \cdot (\mathbf{b} \otimes \nabla_x))_s \quad (3)$$

関係式

$$\delta \mathbf{E} = \mathbf{e}(\delta \mathbf{u}) \quad (4)$$

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{e}(\dot{\mathbf{u}}) \quad (5)$$

$$(\delta \mathbf{E})' = (\mathbf{e}(\delta \dot{\mathbf{u}}))' = \boldsymbol{\eta}(\delta \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) \quad (6)$$

が成り立つので, 仮想仕事式及びその微分が次のように表せる。

$$\int_V \mathbf{S} : \mathbf{e}(\delta \mathbf{u}) dV = \int_S \bar{\mathbf{i}} \cdot \delta \mathbf{u} dS + \int_V \rho_0 \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} dV \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \int_V \dot{\mathbf{S}} : \mathbf{e}(\delta \mathbf{u}) dV + \int_V \mathbf{S} : \boldsymbol{\eta}(\delta \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) dV \\ &= \int_S \dot{\bar{\mathbf{i}}} \cdot \delta \mathbf{u} dS + \int_V \rho_0 \dot{\mathbf{g}} \cdot \delta \mathbf{u} dV \end{aligned} \quad (8)$$

微小変形における熱ひずみ $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ 、クリープひずみ $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c$ を考慮した速度型構成則は次式で表すことができる⁽³⁾。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}^{\text{ep}} : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^t - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c) \quad (9)$$

$\mathbf{D}^{\text{ep}}$ は 4 階の弾塑性構成則テンソルであり, 熱及びクリープひずみに関しては次の関係がある。

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^t = \alpha \dot{T} \mathbf{I} \quad (10)$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c = \frac{3\boldsymbol{\sigma}'}{2\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}^c \quad (11)$$

T は温度, α は線膨張係数, $\boldsymbol{\sigma}'$, $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$, $\dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}^c$ はそれぞれ偏差応力及び Mises 型の相当応力, 相当ひずみ速度を表す。 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ と $\dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}^c$ の関係は単軸状態における応力とクリープひずみ速度の間の関係に一致するとしてさまざまな提案があるが, 一般的に $\dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}^c$ は応力、温度及び時間の関数として表すことができる⁽⁴⁾。

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}^c = f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, T, t) \quad (12)$$

大変形微小ひずみを仮定できる場合, $\boldsymbol{\sigma}$ と $\boldsymbol{\epsilon}$ を $\mathbf{S}$ と $\mathbf{E}$ で置き換えることにより微小変形における構成則が利用できること⁽⁵⁾から,

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{D}^{\text{ep}} : (\dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}}_a) \quad (13)$$

が得られる。但し,

$$\dot{\mathbf{E}}_a = \alpha \dot{T} \mathbf{I} + \frac{3\mathbf{S}'}{2\bar{S}} f(\bar{S}, T, t) \quad (14)$$

これにより熱・クリープ変形によるひずみを初期ひずみと見なすことで通常の大変形弾塑性解析法が適用できる。

仮想仕事式 (7) について有限要素法における離散化を行うと, $\mathbf{U}$ を全体節点変位ベクトル, Σ を要素の重ね合わせ, $\mathbf{B}_L$ を $\mathbf{e}(\cdot)$ に対応する一種のひずみ・節点変位マトリックス, $\mathbf{N}$ を形状関数マトリックス, “ $\wedge$ ” をテンソル及びベクトルの成分からなる配列として, 仮想変位の任意性により, 等価節点内力 $\mathbf{Q}$ と外力 $\mathbf{F}$ の間の平衡方程式が次のように導かれる。

$$\mathbf{Q} = \mathbf{F} \quad (15)$$

但し,

$$\mathbf{Q} = \sum_e \int_{V_e} \mathbf{B}_L^T \hat{\mathbf{S}} dV^e \quad (15)\text{-a}$$

$$\mathbf{F} = \sum_e \int_{S_e} \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{i}} dS^e + \sum_e \int_{V_e} \mathbf{N}^T \rho_0 \hat{\mathbf{g}} dV^e \quad (15)\text{-b}$$

上式を解くのに通常増分ステップ i における諸量を既知としてステップ $i+1$ の解を求める増分解析を行う。

但し式 (15)-a が変位の非線形方程式であるため反復計算によって解く必要がある。また増分解析における反復計算の2次収束性及び感度解析の精度を保証するため、連続時間に対する微分形式の構成式 (13) の代わりに時間増分に対する応力積分法と整合する増分型構成則の微分を用いる必要性が指摘されている^{(6),(7)}。ひずみ増分 ΔE を次式のように弾性ひずみ増分 ΔE^e 、塑性ひずみ増分 ΔE^p 、熱ひずみ増分 ΔE^t 及びクリープひずみ増分 ΔE^c に分解し、

$$\Delta E = \Delta E^e + \Delta E^p + \Delta E^t + \Delta E^c \quad (16)$$

と表すと、弾性構成則テンソル D^e を用いて増分 $i+1$ における応力が

$$S_{i+1} = S_i + D^e : (\Delta E - \Delta E^p - \Delta E^t - \Delta E^c) \quad (17)$$

と表される。弾塑性解析においては応力積分法と整合する構成則テンソル D^{ep} がつぎのように得られる⁽⁶⁾。

$$d[D^e : (\Delta E - \Delta E^p)] = D^{ep} : dE_{i+1} \quad (18)$$

時間増分 Δt に対してクリープ則の数値積分を行う場合は式 (11), (12) を参照して、クリープひずみ増分を次式によって求める。但し $0 \leq \theta \leq 1$ である。

$$\Delta E^c = \left[\frac{3S'}{2S} f(\bar{S}, T, t) \right]_{t=t_i + \theta \Delta t} \cdot \Delta t \quad (19)$$

これに関連する項の微分は

$$\begin{aligned} d(D^e : \Delta E^c) &= D^e : \left(\frac{\partial \Delta E^c}{\partial S_{i+1}} : dS_{i+1} \right) \\ &\equiv C^c : dS_{i+1} \end{aligned} \quad (20)$$

と表すことができる。ここでは熱が構造解析と独立に外部から指定される場合を考慮するので、温度増分が変位によらないとして $d\Delta E^t = 0$ 、また式 (18), (20) を考慮すると式 (17) の微分より

$$\begin{aligned} dS_{i+1} &= (I + C^c)^{-1} : (D^{ep} : dE_{i+1}) \\ &\equiv D^{**} : dE_{i+1} \end{aligned} \quad (21)$$

が得られる。但しクリープひずみに関する時間積分を陽的に行う場合は $\theta = 0$, $C^c = 0$ となる。

B_{NL}^T を演算子 $\boldsymbol{\eta}(\cdot, \cdot)$ に対応するマトリックスとして、式 (5) を用いると速度型仮想仕事式 (8) 及び式 (21) の

離散化により接線剛性マトリックスが

$$K = \sum_e \int_{V^e} B_L^T \hat{D}^{**} B_L dV^e + \sum_e \int_{V^e} B_{NL}^T \hat{S} B_{NL} dV^e \quad (22)$$

と導かれ、次の反復計算により変位増分を求めることができる。

$$\Delta U^{(j)} = K^{(j)-1} (F_{i+1} - Q_{i+1}^{(j)}) \quad (23)$$

$$Q_{i+1}^{(0)} = F_i, \quad \Delta U = \sum_j \Delta U^{(j)} \quad (24)$$

収束した時点 ($\Delta U^{(j)} \approx 0$) で ΔU は変位増分、 $K^{(j)}$ は平衡状態における接線剛性となる。

2・2 感度解析 設計変数からなるベクトルを b 、内力、外力による仮想仕事を $\mathcal{R}$ 、 $\mathcal{F}$ として、外力が変位によらないと仮定すると、平衡状態における仮想仕事式を次式で表すことができる。

$$\mathcal{R}(u(b), b) = \mathcal{F}(b) \quad (25)$$

変位 u は設計変数の関数となる。形状を設計変数とする場合は仮想仕事式における積分領域が設計変数に依存するので、以下に行う微分操作の都合上固定した参照配置 Ω 、 Γ へ物体領域を写像する必要がある。即ち、内力及び外力による仮想仕事を

$$\mathcal{R} = \int_{\Omega} S : \delta E J d\Omega \quad (26)$$

$$\mathcal{F} = \int_{\Gamma} \bar{t} \cdot \delta u J d\Gamma + \int_{\Omega} \rho_0 g \cdot \delta u J d\Omega \quad (27)$$

と表す。但し Jacobian J は設計変数の関数となる。

設計変数に対する全微分を $\tilde{d}$ 、変位及び設計変数に対する偏微分を ∂_u 、 ∂_b と表記すると次の関係がある。

$$\tilde{d}(\cdot) = \partial_u(\cdot) + \partial_b(\cdot) \quad (28)$$

従って有限要素解析における増分解析に対応した増分ステップ $i+1$ での仮想仕事の設計変数に対する微分は次のようになる。

$$\begin{aligned} \tilde{d}\mathcal{R}_{i+1} &= \int_{\Omega} \partial_u S_{i+1} : \delta E_{i+1} J d\Omega + \int_{\Omega} S_{i+1} : \partial_u (\delta E_{i+1}) J d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} \partial_b (S_{i+1} : \delta E_{i+1} J) d\Omega \end{aligned} \quad (29)$$

$$\tilde{d}\mathcal{F}_{i+1} = \int_{\Gamma} \partial_b (\bar{t}_{i+1} \cdot \delta u J) d\Gamma + \int_{\Omega} \partial_b (\rho_0 g_{i+1} \cdot \delta u J) d\Omega \quad (30)$$

$\partial_u(\cdot)$ は設計変数が設計値をとる系、即ち「基本系」における変位に対する微分であるため、式(21)が導かれた時と同じように、

$$\partial_u S_{i+1} = D^* : \partial_u E_{i+1} \quad (31)$$

の関係が得られ、さらに式(4)～(6)の関係を使って式(29)は

$$\begin{aligned} \tilde{d}S_{i+1} = & \int_{\Omega} [D^* : e_{i+1}(\tilde{d}u_{i+1})] : e_{i+1}(\delta u) J d\Omega \\ & + \int_{\Omega} S_{i+1} : \eta_{i+1}(\delta u, \tilde{d}u_{i+1}) J d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \partial_b [S_{i+1} : e_{i+1}(\delta u) J] d\Omega \end{aligned} \quad (32)$$

となる。式(30)及び(32)を離散化すると結局全体節点変位の感度 $\tilde{d}U_{i+1}$ が次式によって求められる。

$$\tilde{d}U_{i+1} = \bar{K}^{-1}(\tilde{d}F_{i+1} - \partial_b Q_{i+1}) \quad (33)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \bar{K} = & \sum_{\epsilon} \int_{\Omega^{\epsilon}} B_{L,i+1}^T \hat{D}^* B_{L,i+1} J d\Omega^{\epsilon} \\ & + \sum_{\epsilon} \int_{\Omega^{\epsilon}} B_{NL,i+1}^T \hat{S}_{i+1} B_{NL,i+1} J d\Omega^{\epsilon} \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \tilde{d}F_{i+1} = & \sum_{\epsilon} \int_{\Gamma^{\epsilon}} \partial_b (N^T \hat{t}_{i+1} J) d\Gamma^{\epsilon} \\ & + \sum_{\epsilon} \int_{\Omega^{\epsilon}} \partial_b (N^T \rho_0 \hat{g}_{i+1} J) d\Omega^{\epsilon} \end{aligned} \quad (35)$$

$$\partial_b Q_{i+1} = \sum_{\epsilon} \int_{\Omega^{\epsilon}} \partial_b (B_{L,i+1}^T \hat{S}_{i+1} J) d\Omega^{\epsilon} \quad (36)$$

明らかに $\bar{K}$ は有限要素解析における接線剛性と一致しており、反復計算が収束した時点（平衡状態）での $K^{(j)-1}$ を利用することができる。大規模非線形問題では反復計算毎に剛性マトリックスの作成及び三角分解に相当な計算時間を要するが、感度解析の段階ではこれらの手順を省き、且つ反復計算が収束した時点の情報のみを利用することにより、式(33)右辺括弧内の項を評価できれば反復計算せずに効率よく感度を求めることができる。

設計変数に対する外力の微分項 $\tilde{d}F_{i+1}$ は通常既知条件として与えられる。一方、内力に関する偏微分の展開は

$$\partial_b Q_{i+1} = \sum_{\epsilon} \int_{\Omega^{\epsilon}} \partial_b (B_{L,i+1}^T J) \hat{S}_{i+1} d\Omega^{\epsilon} + \sum_{\epsilon} \int_{\Omega^{\epsilon}} B_{L,i+1}^T J \partial_b \hat{S}_{i+1} d\Omega^{\epsilon} \quad (37)$$

となる。マトリックス $B_{L,i+1}^T$ 及び Jacobian J は初期形状に依存しており、上式右辺第1項目は用いる要素タイプに対応して微分を求める。形状寸法を設計変数としない場合この項はなくなる。右辺第2項目の評価には設計変数に対する応力の偏微分を求める必要がある。本研究では熱条件が温度分布を決定すると考えるため、温度は一種の設計変数に帰着する。そこで増分ステップをクリープ問題における時刻に対応させて、応力は一般的に次のように表すことができる。

$$S_{i+1} = S_i(u_i, b) + \Delta S(u_{i+1}, u_i, b) \quad (38)$$

構成則及び応力増分を計算する応力積分アルゴリズムが決まれば上式を厳密に微分することが可能であるが、あらゆる入力条件が設計変数になり得るので、複雑な形を呈する構成則に対して計算が冗長になるほか、異なる応力積分法または構成則に対して改めて微分の定式化及びコーディングを行う必要があることは感度解析の実用化、汎用化の支障となっている。

この問題を解決するため次に示す手法を提案する。説明を簡潔にするため外力は設計変数に依存しないとする。

Fig. 1 Variation of structural response with respect to b

増分 $i+1$ (時刻 t_{i+1}) の平衡状態においては変位並びに応力、内力等の構造挙動が設計変数に依存している。図1のように外力 F_{i+1} に対して設計変数が設計値 b_0 をとる構造系（基本系）の平衡状態を点1とする。設計変数が $b_0 + db$ に変わると構造系（摂動系）の平衡状態が点2に移るが、摂動系の変位を基本系の変位 $U_{i+1,0}$ に一致させたとすると、不平衡力を生じて点3となる。 $\partial_b Q_{i+1}$ がこの不平衡力を表している。以下では基本系及び摂動系における量を右下添字 o 及び p を用いて表記する。設計変数の変化量 Δb が小さければ一次近似として

3. 数値解析例

$$\partial_b Q_{i+1} \approx \left. \frac{\partial Q_{i+1}}{\partial b} \right|_{U=U_{i+1,o}} \cdot \Delta b \equiv \Delta Q_{i+1} \quad (39)$$

の関係があるので、内力の偏微分を差分により近似的に評価することができる。即ち式 (15)-a により

$$\begin{aligned} \Delta Q_{i+1} &= Q_{i+1}(U_{i+1,o}, U_{i,p}, b_p) - Q_{i+1}(U_{i+1,o}, U_{i,o}, b_o) \\ &= \sum_{\epsilon} \int_{\Omega^{\epsilon}} B_{L,i+1}^T(U_{i+1,o}, b_p) J(b_p) [\hat{S}_{i,p} + \Delta \hat{S}(U_{i+1,o}, U_{i,p}, b_p)] d\Omega^{\epsilon} \\ &\quad - \sum_{\epsilon} \int_{\Omega^{\epsilon}} B_{L,i+1}^T(U_{i+1,o}, b_o) J(b_o) [\hat{S}_{i,o} + \Delta \hat{S}(U_{i+1,o}, U_{i,o}, b_o)] d\Omega^{\epsilon} \quad (40) \end{aligned}$$

が得られる。ここで、

$$b_p = b_o + \Delta b \quad (41)$$

$$U_{i,p} = U_{i,o} + \Delta U_i \quad (42)$$

$$\hat{S}_{i,p} = \hat{S}_{i,o} + \Delta \hat{S}_i \quad (43)$$

の定義を使った。 ΔU_i 及び $\Delta \hat{S}_i$ は増分 i における変位及び応力の感度である。式 (40) 最右辺第 2 項目については有限要素解析における内力計算結果を直接使うことができる。右辺第 1 項目については、増分 $i+1$ における設計変数以外の諸量の計算に基本系の変位を用いるが、感度の履歴依存性により増分 i における変位などの感度を考慮する必要がある。但し、この右辺第 1 項目の評価は形式上有限要素解析の内力計算と全く同様なので、内力計算ルーチンをそのまま利用することができる。結局、変位感度が次式によって求められることになる。

$$\Delta U_{i+1} \approx \bar{K}^{-1}(\Delta F_{i+1} - \Delta Q_{i+1}) \quad (44)$$

式 (40) の計算に有限要素解析プログラムの内力計算ルーチンを利用することが可能であるということは、感度解析の段階においては要素タイプ、構成則及び応力積分アルゴリズムなどに特別な配慮をすることなく、既存の有限要素解析コードに整合する感度解析機能を追加することが容易である、ということの意味する。但し、式 (33) または (44) の $\bar{K}^{-1}$ は有限要素法における厳密な接線剛性の逆行列を表しており、前記の増分型構成則における応力積分法と整合する接線剛性 (consistent tangent stiffness) の逆行列を用いる必要がある。

前節に示した定式化に基づき、著者らが開発した大変形弾塑性問題の感度解析プログラム⁽¹⁾を拡張し、熱弾塑性、クリープ問題に適用して数値解析を行った。但し熱応力及びクリープ現象に対する本手法の有効性を検証することを主目的として、解析例は微小変形問題を対象とした。解析には 8 節点 6 面体ソリッド要素を用い、塑性構成則として Mises 型等方硬化則及び関連流れ則を仮定した。クリープについては Norton 型クリープ則を用いた。また設計変数は

$$b = b_o(1 + \beta) \quad (45)$$

と定義し、無次元量 β に対する感度を求めた。

3・1 中空円盤の熱弾塑性問題 解析モデルを図 2 に示す。まず初期温度 293 K の中空円板に時刻 $t > 0$ から内、外面に流体による熱伝達条件を与え、直交する両平面を断面面として温度分布の時刻歴を熱解析によって求めた。解析に用いた物性値及び熱条件を表 1 に示す。設計変数は円盤外面の熱伝達係数とし、汎用コード MARC により熱解析を行い、差分的に求めた各積分点の温度感度を用いて本研究で開発したプログラムにより構造挙動の感度解析を行った。なお円盤の熱膨張による熱応力解析については解析モデルの対称性により 1/8 対称条件を与えた。

Fig 2 A hollow circle plate under heat convection (1/8 model)

図 2 の A 点に最も近い積分点における x 方向応力成分を外表面の周応力と見なし、A 点における半径方向変位と共に図 3 に示す。円盤の熱膨張による半径方向変位は全時刻を通して増え続けた。一方、高温流体による加熱の初期段階で急上昇した円盤外表面付近の温度勾配 (図 4) により熱応力が生じ、加熱から約 0.15 秒で円板外表面に最も近い積分点が降伏し始めた。そして約 0.21 秒で外表面要素全ての積分点が降伏した後、円盤内部への熱伝導により温度勾配が緩和され、

降伏した積分点で 0.42 ~ 0.48 秒の間に除荷が起こり、その後円盤が弾性状態に戻った。

Table 1 Material properties and heat conditions

Young's modulus GPa	Poisson's ratio	Yield stress GPa
196	0.3	0.735
Hardening coefficient GPa	Coefficient of thermal expansion 1 / K	Thermal conductivity kJ / mm · s · K
1.94	1.5e-5	1.63e-5
Specific heat (kJ / kg · K)	Mass density (kg / mm ³)	Film coefficient for inner surface kJ / mm ² · s · K
0.511	7.9e-6	2.1e-6
Sink temperature for inner surface K	Film coefficient for outer surface kJ / mm ² · s · K	Sink temperature for outer surface K
323	2.1e-5	973

Fig 3 History of radial displacement and hoop stress on outer surface

Fig. 4 Temperature history for different radius

Fig 5 Sensitivity history of radial displacement with respect to film coefficient for outer surface

Fig. 6 Sensitivity history of hoop stress with respect to film coefficient for outer surface

次に本手法により感度解析した結果の一部を図 5, 6 に示す。図 5 は熱膨脹に対する外表面半径方向変位の感度履歴であり、最初は増加したが定常状態に近づく傾向に転じた。一方、図 6 に示す外面での周応力感度の履歴を見ると、当初負の側に感度が大きくなることから、熱伝達係数の値が大きくなると周応力も（負の側に）増大することが分かる。しかし降伏が始まる 0.15 秒付近から熱伝達係数の影響は極めて小さくなり、逆に 0.42 秒付近から除荷が始まると感度は正の側に増大し始める。これは熱伝達係数が増加すると、時間の経過と共に温度勾配が小さくなって行く際に生じる周方向の圧縮残留応力が逆に小さくなることを意味している。なお両図に示されるように、本感度解析結果を MARC で差分的に求めた感度と比較しよく一致することを確認した。

3・2 ボルト締め付け問題 前項で示した解析に加え、簡単なクリープ問題で感度解析の妥当性を検証した後、ボルト締め付け問題を解析した。ボルトの締め付けを模擬した簡易解析モデルを諸条件と共に図 7 に示す。解析は対称性を仮定して全周の 1/4 について行った。Norton 則の係数 A と指数 n は応力及び時間の単位を kgf/mm^2 及び hr として与えた。

Fig. 7 Simplified model for screw tightening problem
(1/4 model)

図7に示すD面においてY方向自由度を拘束し、解析モデル全体の温度が初期温度 283 K から最終温度 573Kまで均一に上昇するとして熱弾塑性解析を行い、その後クリープ解析を実施した。最終温度 T_f 、Norton則の指数 n 及び孔の高さ h を設計変数とし、これらに対するD面上の全反力 F の感度解析結果を図8に示す。図8よりNorton則の指数 n の感度が最も大きいことがわかる。 n の増大によるクリープひずみ速度の上昇が応力緩和を促進し、締め付け力が低下することになる。比較のため、汎用コード MARC を使って直接差分法により求めた n に対する反力感度も図8に併記してある。

Fig. 8 Sensitivities of reaction force with respect to
three design parameters

なお本研究では設計変数の変動に対する内力の変化を差分的に評価するため、設計変数に摂動量を与える必要がある。本解析例では摂動量は基準化した $\Delta b/b_0$ について $1.0\text{e-}4 \sim 1.0\text{e-}9$ の範囲で値を変えても良く一致した感度が求められた。本手法は摂動量に依存せず、安定した感度が得られる実用的な手法と言える。

また計算効率については、FEM 解析が約 270 秒を要するのに対し、一つの設計変数に対する感度解析時間が約 40 秒であった。設計変数が多数になっても本手法によれば効率のよい感度解析の行えることが分かる。

4. 結 言

本研究では直接微分法に基づく定式化を行い、設計変数に対する内力の微分項のみを数値的に評価することにより、熱応力及びクリープ問題に対する感度解析を簡便かつ効率的に行う手法を提案した。また数値解析例を通じて本手法の有効性と計算効率を検証した。本手法は構成則の形式などに依存せず、実用性、汎用性を持つので、各種非線形問題への適用が可能であり、また既存の FEM 解析コードへの感度解析機能の追加も容易に行える。

文 献

- (1) 陳, 他 3 名, 機論, **59-567**, A(1993), 2742.
- (2) 陳, 他 3 名, 機論, **61-589**, A(1995), 2100.
- (3) 矢川元基, 宮崎則幸 有限要素法による熱応力・クリープ・熱伝導解析, (1985), サイエンス社.
- (4) Kraus, H., Creep Analysis, (1980), John Wiley & Sons.
- (5) Bathe, K.-J., Finite Element Procedures, (1996), Prentice-Hall.
- (6) Simo, J. C. and Taylor, R. L., Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **48**, (1985), 101.
- (7) Vidal, C. A. and Haber, R. B., Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **107**, (1993), 393.