衝撃外圧力を受ける複合材料積層円筒殻の動的安定性*

粕谷 平和^{*1}, 松岡 一雄^{*2}Dynamic Stability of Composite Laminated Cylindrical Shells
under Impact External PressureHirakazu KASUYA^{*3} and Kazuo MATSUOKA^{*3} Tokai University, Dept. of Prime Mover Engineering,
Kitakaname 1117, Hiratsuka-shi Kanagawa, 259-1292 Japan

Because of their high specific strength and stiffness, fiber-reinforced plastics have been used as structural members in various fields, and hence analysis of thin laminated structures is important. In this paper, the problem of dynamic stability of cross-ply laminated cylindrical shells under impact external pressure is described. First of all, the motion of cylindrical shells under impact external pressure is defined as axially symmetric motion. Following this definition, certain perturbations are superimposed on this motion and their effect on the behavior of the shell is investigated. The symmetric state of motion of the shell is called stable if the perturbations remain bounded. The solutions for the prebuckling motion and the perturbed motion are obtained using the Galerkin's method. Stable regions are examined by utilizing the Mathieu's equation. The inevitability of dynamically unstable behaviors is proved analytically and the effects of various factors, such as external pressure ratio, number of layers, lamination constitution, dynamic unstable mode and dimensions of the cylinder, are clarified.

Key Words: Structural Analysis, Composite Materials, Dynamic Stability, CFRP, Cross-Ply Laminated Cylindrical Shell, Impact External Pressure, Mathieu's Equation

1. 緒 言

CFRP などに代表される高性能複合材料は、高比強度、高比剛性の優れた性能を生かし、航空機や宇宙機器などの構造物の軽量化に対する要求に適用されている。また、それらの要求のために、構造の薄肉化が図られる場合、このような円筒殻構造には衝撃荷重が作用することが多いことを考慮すると、円筒殻の動的安定性を解析することが重要な課題である^{(1)~(3)}。

動的荷重を受ける円筒殻の安定性問題に関して、その不安定領域を明らかにすることが主要な課題であり、不安定領域を Mathieu 形方程式で示しているものが数多くある。その中でも、著者らは前報^{(4)~(6)}において、衝撃軸圧縮荷重の継続時間が十分に長い場合、座屈前軸対称運動を考えることにより静的座屈値以下でも不安定になる可能性のあることを示している。

そこで本論文では、両端単純支持された対称クロスプライ積層円筒殻が衝撃外圧力を受ける場合について、基礎方程式から Mathieu 形方程式を導き、Math-

ieu 形方程式の安定判別を用い、静的座屈値以下の衝撃荷重を負荷させた場合でも、不安定モードが発生することを明らかにする。また、不安定現象に与える諸因子、例えば、積層順序、積層数、形状パラメータ、負荷条件などの影響を解析的手法によって検討する。

2. 理論的解析法

2.1 基礎式 図1に示すような半径 R 、筒長 L 、板厚 h の複合材料積層円筒殻が半径方向に均一な衝撃外圧力 $p(t)$ を受ける場合を考える。座標原点を円筒殻の中央にとり、軸方向、円周方向、板厚方向にそれぞれ x, y, z 軸をとる。円筒殻の中央面における面内ひずみ成分 $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ 、曲率成分 $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ と変位成分 u, v, w との関係は二次の微小項を考慮した Donnell の有限変形理論を用いると非線形となり次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \dots\dots\dots (2)$$

* 原稿受付 1999 年 1 月 18 日。

^{*1} 正員、東海大学工学部(〒259-1292 平塚市北金目 1117)。^{*2} 学生員、東海大学大学院。

E-mail: kasuya@keyaki.cc.u-tokai.ac.jp

面内ひずみ成分と平面応力成分との関係は、弾性限度内に限定すると次式のように表される、

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_y \sigma_y}{E_y}, \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_y} - \frac{\nu_x \sigma_x}{E_x}, \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 E_x, E_y はヤング率、 G_{xy} はせん断剛性率、 ν_x, ν_y はポアソン比である。また、今解析モデルの対称クロスプライ積層の合応力成分、合モーメント成分と面内ひずみ成分、曲率との関係は次式で表される、

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 A_{ij} は伸張剛性マトリックス、 D_{ij} は曲げ剛性マトリックスであり、それぞれ一方向強化材の繊維方向、繊維に直角方向の弾性定数 E_L, E_T 、ポアソン比 ν_L, ν_T およびせん断剛性率 G_{LT} が与えられると求められる。そして、板厚方向の慣性力のみを考慮すると、面内および板厚方向の平衡方程式はそれぞれ次式で表される、

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{N_y}{R} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p(t) \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 ρ は密度を示す、式(5)の面内平衡方程式を満足する応力関数 F を次のように定義する、

$$N_x = h \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, N_y = h \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, N_{xy} = -h \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad \dots\dots\dots (7)$$

上式(7)の応力関数 F と合モーメント成分を板厚方向の平衡方程式に代入すると、

Fig. 1 Configuration and coordinates of composite laminated cylindrical shell

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{h}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - h \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - h \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2h \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p(t) = 0 \quad \dots\dots (8)$$

となり、式(1)から変位 u, v を消去し、式(2)と応力関数 F で整理すると適合条件式が次式のようになる、

$$E_x \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - \left(2\nu_x E_y - \frac{E_x E_y}{G_{xy}} \right) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + E_y \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = E_x E_y \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

円筒殻に荷重が作用したとき、初期に起こる運動は軸対称運動を仮定し、初期運動に添字 A を付けて表すと、

$$u_A = u_A(x, t), v_A = 0, w_A = w_A(x, t) \quad \dots\dots\dots (10)$$

となり、初期運動の板厚方向の平衡方程式は次式のように変換される、

$$H(w_A) \equiv D_{11} \frac{\partial^4 w_A}{\partial x^4} + E_y \frac{w_A h}{R^2} + p(t) + \rho h \frac{\partial^2 w_A}{\partial t^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

初期運動の安定、不安定を論ずるために、この運動に微小擾乱を与え、その時間に対する変化を調べる。この擾乱に添字 B を付けて表すと擾乱の加わった運動は、

$$u = u_A + u_B, v = v_A + v_B, w = w_A + w_B \quad \dots\dots (12)$$

となる。ここで、 u_B, v_B, w_B は x, y, t の関数である。擾乱変位 u_B, v_B, w_B を微小であると仮定し、式(8)、(9)に代入して非線形項を省略すると、擾乱成分に関する平衡方程式および適合条件式が得られる、

$$I(w_B) = D_{11} \frac{\partial^4 w_B}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_B}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_B}{\partial y^4} - E_y h \frac{w_A}{R} \frac{\partial^2 w_B}{\partial y^2} + \frac{h}{R} \frac{\partial^2 F_B}{\partial x^2} - h \frac{\partial^2 w_A}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F_B}{\partial y^2} + \rho h \frac{\partial^2 w_B}{\partial t^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$E_x \frac{\partial^4 F_B}{\partial x^4} - \left(2\nu_x E_y - \frac{E_x E_y}{G_{xy}} \right) \frac{\partial^4 F_B}{\partial x^2 \partial y^2} + E_y \frac{\partial^4 F_B}{\partial y^4}$$

Fig. 2 Load condition

$$= E_x E_y \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w_B}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_A}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_B}{\partial y^2} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

境界条件は、両端単純支持を想定し、円筒殻両端 $x = \pm L/2$ の条件は、次のようになる。

$$w=0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0, N_{xB}=0, v_B=0 \dots\dots\dots (15)$$

2・2 荷重条件 円筒殻に作用する外圧力 $p(t)$ の荷重条件を次式で示し、状態図を図2に示す。

$$p(t) = p_0 \frac{t}{t_p} \quad (0 \leq t \leq t_p) \dots\dots\dots (16 \cdot a)$$

$$p(t) = p_0 \quad (t \geq t_p) \dots\dots\dots (16 \cdot b)$$

つまり、外圧力が $t=0$ から作用し、 $0 \leq t \leq t_p$ で直線的に作用し、 t_p 時間後一定値 p_0 に保たれる。ここでは荷重の継続時間を無限と仮定している。

2・3 初期運動 式(11)で示した初期運動の平衡方程式の近似解を求めるにあたり、 w_A の波形として静的に p_0 が作用した場合を考え、 w_A を次式で仮定する。

$$w_A = a(t)h \{ 1 + A_1 \sin a_1 x \sinh a_2 x + A_2 \cos a_1 x \cosh a_2 x \} \dots\dots\dots (17)$$

ここで、

$$a_1 = a_2 = \sqrt{\frac{1}{2R} \sqrt{\frac{1}{D_{11}} \left(A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}} \right)}} \dots\dots\dots (18)$$

円筒殻に作用する衝撃外圧力 p_0 と外圧力を受ける対称クロスプライ積層円筒殻の非対称変形を呈する静的座屈値 p_s との比を荷重比 I とする。また、外圧力を受ける対称クロスプライ積層円筒殻の非対称変形を呈する静的座屈値 p_s は、次式で示される⁽⁷⁾⁽⁸⁾。

$$I = p_0/p_s \dots\dots\dots (19)$$

$$p_s = \frac{1}{R} \left(\frac{R}{n_p} \right)^2 \left(T_{33} \right.$$

$$\left. + \frac{2 T_{12} T_{13} T_{23} - T_{11} T_{23}^2 - T_{22} T_{13}^2}{T_{11} T_{22} - T_{12}^2} \right) = [T] \dots\dots\dots (20)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} T_{11} &= A_{11} \left(\frac{m_p \pi}{L} \right)^2 + A_{66} \left(\frac{n_p}{R} \right)^2 \\ T_{12} &= (A_{12} + A_{66}) \left(\frac{m_p \pi}{L} \right) \left(\frac{n_p}{R} \right) \\ T_{22} &= A_{22} \left(\frac{n_p}{R} \right)^2 + A_{66} \left(\frac{m_p \pi}{L} \right)^2 \\ T_{13} &= -\frac{A_{12}}{R} \left(\frac{m_p \pi}{L} \right), \quad T_{23} = -\frac{A_{22}}{R} \left(\frac{n_p}{R} \right) \\ T_{33} &= D_{11} \left(\frac{m_p \pi}{L} \right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{m_p \pi}{L} \right)^2 \\ &\quad \times \left(\frac{n_p}{R} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{n_p}{R} \right)^4 + \frac{A_{22}}{R^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

であり、式(20)は、殻の材料定数のほかに形状パラメータの関数であり、各種の波数 (m_p, n_p ; 軸方向半波数、円周方向波数) の整数値に対する最小値が外圧座屈圧力となる。

一方、無次元量 α_1, α_2 を次のように定める。

$$\alpha_1 = a_1 L/2, \alpha_2 = a_2 L/2 \dots\dots\dots (22)$$

また、式(17)中の A_1, A_2 は式(15)の境界条件から

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -\frac{2\alpha_1 \alpha_2 \sin \alpha_1 \sinh \alpha_2}{2\alpha_1 \alpha_2 (\cosh^2 \alpha_2 - \sin^2 \alpha_1)} \\ A_2 &= -\frac{2\alpha_1 \alpha_2 \cos \alpha_1 \cosh \alpha_2}{2\alpha_1 \alpha_2 (\cosh^2 \alpha_2 - \sin^2 \alpha_1)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

となる。

$a(t)$ を求めるため、式(17)の w_A を式(11)に代入し、

Galerkin 法

$$\int_{-L/2}^{L/2} H(w_A) (1 + A_1 \sin a_1 x \sinh a_2 x + A_2 \cos a_1 x \cosh a_2 x) dx = 0 \dots\dots\dots (24)$$

を用いると、

$$\rho h^2 (Y_0 + A_1 Y_1 + A_2 Y_2) \frac{d^2 a(t)}{dt^2} + h \left\{ \frac{E_y h}{R^2} (Y_0 + A_1 Y_1 + A_2 Y_2) + \left(\frac{2}{L} \right)^4 D_{11} (C_1 Y_1 + C_2 Y_2) \right\} a(t) + p(t) Y_0 = 0 \dots\dots\dots (25)$$

ただし、

$$B_1 = -\{(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) A_1 + 2\alpha_1 \alpha_2 A_2\}, B_2 = 2\alpha_1 \alpha_2 A_1 - (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) A_2 \dots\dots\dots (26)$$

$$C_1 = (\alpha_1^4 - 6\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^4) A_1 + 4\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) A_2, C_2 = -4\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) A_1 + (\alpha_1^4 - 6\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^4) A_2 \dots\dots\dots (27)$$

$$Y_0 = 1 + \{ (A_1 \alpha_2 + A_2 \alpha_1) \sin \alpha_1 \cosh \alpha_2 - (A_1 \alpha_1 - A_2 \alpha_2) \cos \alpha_1 \sinh \alpha_2 \} / (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \dots\dots\dots (28 \cdot a)$$

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{\alpha_2 \sin \alpha_1 \cosh \alpha_2 - \alpha_1 \cos \alpha_1 \sinh \alpha_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} - \frac{A_1}{8} \left(2 - \frac{\sin 2\alpha_1}{\alpha_1} - \frac{\sinh \alpha_2}{\alpha_2} \right) \\ &\quad - \{ (A_1 \alpha_1 - A_2 \alpha_2) \sin 2\alpha_1 \cosh 2\alpha_2 + (A_1 \alpha_2 + A_2 \alpha_1) \cos 2\alpha_1 \sinh 2\alpha_2 \} / (8(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)) \dots\dots\dots (28 \cdot b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_2 &= \frac{\alpha_1 \sin \alpha_1 \cosh \alpha_2 + \alpha_2 \cos \alpha_1 \sinh \alpha_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} + \frac{A_1}{8} \left(2 + \frac{\sin 2\alpha_1}{\alpha_1} + \frac{\sinh \alpha_2}{\alpha_2} \right) \\ &\quad + \{ (A_1 \alpha_2 + A_2 \alpha_1) \sin 2\alpha_1 \cosh 2\alpha_2 - (A_1 \alpha_1 - A_2 \alpha_2) \cos 2\alpha_1 \sinh 2\alpha_2 \} / (8(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)) \dots\dots\dots (28 \cdot c) \end{aligned}$$

時間 t, t_p を次のように無次元化する。

$$\tau = \frac{t}{R} \sqrt{\frac{E_y}{\rho}}, \quad \tau_p = \frac{t_p}{R} \sqrt{\frac{E_y}{\rho}} \quad \dots\dots\dots (29)$$

式(16・a)を式(25)に代入して、

$$\frac{d^2 a(\tau)}{d\tau^2} + \left(q + r \frac{\tau}{\tau_p} \right) a(\tau) + s \frac{\tau}{\tau_p} = 0, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_p \quad \dots\dots\dots (30 \cdot a)$$

$$\frac{d^2 a(\tau)}{d\tau^2} + (q + r) a(\tau) + s = 0, \quad \tau \geq \tau_p \quad \dots\dots\dots (30 \cdot b)$$

ここで、 q, r, s は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} q &= 1 + \frac{D_{11}}{h} \frac{R^2}{E_y} \left(\frac{2}{L} \right)^4 \frac{C_1 Y_1 + C_2 Y_2}{Y_0 + A_1 Y_1 + A_2 Y_2} \\ r &= 0, \quad s = \left(\frac{R}{h} \right)^2 \frac{[T]}{E_y} \frac{Y_0}{Y_0 + A_1 Y_1 + A_2 Y_2} I \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (31)$$

初期条件は、

$$\tau = 0 \text{ で } a(\tau) = 0, da(\tau)/d\tau = 0 \quad \dots\dots\dots (32)$$

初期条件式(32)のもとで式(30)を解けば $a(\tau)$ が求まる。 $0 \leq \tau \leq \tau_p$ のときは、

$$a(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^* \left(\frac{\tau}{\tau_p} \right)^k \quad \dots\dots\dots (33)$$

なる級数展開を行い、式(33)を式(30・a)に代入して係数比較することにより a_k^* が求まる。初期条件式(32)を考慮すると、

$$a_1^* = 0, a_2^* = 0, a_3^* = -\frac{s\tau_p^2}{6}, a_k^* = -\frac{(qa_{k-2}^* + ra_{k-3}^*)\tau_p^2}{k(k-1)} \quad (k=4, 5, 6, \dots) \quad \dots\dots\dots (34)$$

となる。 $\tau = \tau_p$ のときの $a(\tau), da(\tau)/d\tau$ の値をそれぞれ ξ_1, ξ_2 とすれば、

$$\xi_1 = a(\tau_p) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^*, \quad \xi_2 = \left(\frac{da(\tau)}{d\tau} \right)_{\tau=\tau_p} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^* k}{\tau_p} \quad \dots\dots\dots (35)$$

が導かれる。一方、 $\tau \geq \tau_p$ のときは、式(30・b)から

$$a(\tau) = K \{ 1 - \alpha \cos(\Omega\tau + \delta) \} \quad \dots\dots\dots (36)$$

ただし、

$$K = -\frac{s}{q+r}, \quad \Omega = \sqrt{q+r} \quad \dots\dots\dots (37)$$

が導かれる。 α, δ は未定係数で式(35)から求まる。すなわち

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{\xi_1}{K} - 1 \right)^2 + \left(\frac{\xi_2}{K\Omega} \right)^2}, \quad \delta = \cos^{-1} \left\{ \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{\xi_1}{K} \right) \right\} - \Omega\tau_p \quad \dots\dots\dots (38)$$

となる。

2・4 初期運動の安定判別 初期運動の安定、不安定を論ずるにあたり、微小擾乱 u_B, v_B, w_B を初期運動に加え、その不安定現象を調べる。境界条件式(15)を満足する変形様式として、 w_B, F_B を次式で仮定する。

$$w_B = b(t) h \cos(m\pi x/L) \sin(ny/R) \quad \dots\dots\dots (39 \cdot a)$$

$$F_B = f_B(x, t) \sin(ny/R) \quad \dots\dots\dots (39 \cdot b)$$

ここで、 m は軸方向半波数、 n は円周方向波数を表す(ただし、 m : 奇数、 n : 整数)。満たすべき残りの境界条件は、式(15)の后者から両端で、

$$(\partial^2 F_B / \partial x^2) = (\partial^2 F_B / \partial y^2) = 0 \quad \dots\dots\dots (40)$$

が導かれる。

2・5 擾乱の方程式 $\tau \geq \tau_p$ における初期運動の安定性問題を考える。したがって、式(14)を満足すべき f_B を求め、式(39)に代入すると、応力関数 F_B が以下のように求められる。

$$\begin{aligned} F_B = & \frac{E_y L^2 h}{R} b(t) \left[-\frac{(m\pi)^2}{(\pi m)^4 + k^2(Lm\pi)^2 + (IL)^4} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + a(t) \frac{n^2}{4} \frac{h}{R} \{ F_1 \cosh m_1 x + F_2 \cosh m_2 x \right. \\ & + H_1 \sin\left(a_1 + \frac{m\pi}{L}\right) x \sinh a_2 x + H_2 \sin\left(a_1 - \frac{m\pi}{L}\right) x \sinh a_2 x + J_1 \cos\left(a_1 + \frac{m\pi}{L}\right) x \cosh a_2 x \\ & \left. + J_2 \cos\left(a_1 - \frac{m\pi}{L}\right) x \cosh a_2 x \} \right] \sin\left(\frac{ny}{R}\right) \quad \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

ただし,

$$k^2 = \left(\frac{E_y}{G_{xy}} - 2\nu_y \right) \left(\frac{n}{R} \right)^2, \quad l^4 = \frac{E_y}{E_x} \left(\frac{n}{R} \right)^4, \quad m_1 = \sqrt{\frac{k^2 + \sqrt{k^4 - 4l^4}}{2}}, \quad m_2 = \sqrt{\frac{k^2 - \sqrt{k^4 - 4l^4}}{2}} \quad (42)$$

$$H_1 = \frac{\gamma_1 B_1 - \delta_1 B_2}{2(\gamma_1^2 + \delta_1^2)}, \quad H_2 = \frac{\gamma_2 B_1 - \delta_2 B_2}{2(\gamma_2^2 + \delta_2^2)}, \quad J_1 = \frac{\delta_1 B_1 - \gamma_1 B_2}{2(\gamma_1^2 + \delta_1^2)}, \quad J_2 = \frac{\delta_2 B_1 - \gamma_2 B_2}{2(\gamma_2^2 + \delta_2^2)} \quad (43)$$

$$\delta_1 = 4 \left(\alpha_1 + \frac{m\pi}{2} \right) \alpha_2 \left\{ \left(\alpha_1 + \frac{m\pi}{2} \right)^2 - \alpha_2^2 \right\} + \frac{(kL)^2}{2} \left(\alpha_1 + \frac{m\pi}{2} \right) \alpha_2 \left\{ \dots \right\} \quad (44 \cdot a)$$

$$\gamma_1 = \left(\alpha_1 + \frac{m\pi}{2} \right)^4 - 6 \left(\alpha_1 + \frac{m\pi}{2} \right)^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^4 + \left(\frac{kL}{2} \right)^2 \left\{ \left(\alpha_1 + \frac{m\pi}{2} \right) - \alpha_2^2 \right\} + \left(\frac{lL}{2} \right)^4 \left\{ \dots \right\} \quad (44 \cdot b)$$

また, F_1, F_2 は境界条件式 (40) より次のようになる.

$$F_1 = \frac{m_2^2 Q_1 - (2/L)^2 Q_2}{(m_1^2 - m_2^2) \cosh(m_1 L/2)}, \quad F_2 = \frac{(2/L)^2 Q_2 - m_1^2 Q_1}{(m_1^2 - m_2^2) \cosh(m_2 L/2)} \quad (45)$$

ただし,

$$Q_1 = \{ (H_1 - H_2) \cos \alpha_1 \sinh \alpha_2 - (J_1 - J_2) \sin \alpha_1 \cosh \alpha_2 \} \sin \left(\frac{m\pi}{2} \right) \quad (46 \cdot a)$$

$$Q_2 = \left[\left\{ - \left(\alpha_1 + \frac{m\pi}{2} \right)^2 - \alpha_2^2 \right\} H_1 - 2 \left(\alpha_1 + \frac{m\pi}{2} \right) \alpha_2 J_1 + \left\{ \left(\alpha_1 - \frac{m\pi}{2} \right)^2 - \alpha_2^2 \right\} H_2 + 2 \left(\alpha_1 - \frac{m\pi}{2} \right) \alpha_2 J_2 \right] \cos \alpha_1 \sinh \alpha_2 \\ + \left[- 2 \left(\alpha_1 + \frac{m\pi}{2} \right) \alpha_2 H_1 + \left\{ \left(\alpha_1 + \frac{m\pi}{2} \right)^2 - \alpha_2^2 \right\} J_1 + 2 \left(\alpha_1 - \frac{m\pi}{2} \right) \alpha_2 H_2 - \left\{ \left(\alpha_1 - \frac{m\pi}{2} \right)^2 - \alpha_2^2 \right\} J_2 \right] \sin \alpha_1 \cosh \alpha_2 \\ \times \sin \left(\frac{m\pi}{2} \right) \quad (46 \cdot b)$$

式 (13) の平衡方程式に応力関数のほか, 各諸値を代入し Galerkin 法を適用すると,

$$\int_0^{2\pi R} \int_{-L/2}^{L/2} I(w_B) \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} dx dy = 0 \quad (47)$$

となり, 上式を解くにあたり時間 t の無次元量 ζ を導入することにより, Mathieu 形方程式が次式で表される.

$$\frac{d^2 b(\zeta)}{d\zeta^2} + (\phi + \psi \cos \zeta) b(\zeta) = 0 \quad (48)$$

ただし,

$$\phi = \phi_1 = \frac{1}{\Omega^2} \frac{h}{R} \left[\left(\frac{R}{L} \right)^4 \frac{1}{R h^2} \frac{D_{11}(m\pi)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})(m\pi)^2(nL/R)^2 + D_{22}(nL/R)^4}{E_y} \right. \\ \left. + \frac{R}{h} \frac{(m\pi)^4}{(m\pi)^4 + k^2(Lm\pi)^2 + (lL)^4} + K n^2 W_1 \right] \quad (49)$$

$$\psi = \frac{1}{\Omega^2} K n^2 \alpha \frac{h}{R} W_1 \quad (50)$$

ここで, 式 (49) と式 (50) にある W_1 は以下の式で示される. また, 上式 (48) 中の Mathieu 係数 ϕ, ψ は, 円筒殻の幾何学的形状, 各種剛性値および荷重条件が定まると, m, n だけの関数となるので, m, n を順次変化させそれに対する安定判別を行う.

$$W_1 = 1 + \alpha_2 \left\{ \frac{1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(\alpha_1 + m\pi)^2 + \alpha_2^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(\alpha_1 - m\pi)^2 + \alpha_2^2} \right\} (A_1 \sin \alpha_1 \cosh \alpha_2 + A_2 \cos \alpha_1 \sinh \alpha_2) \\ + \left\{ \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} - \frac{1}{2} \frac{(\alpha_1 + m\pi)}{(\alpha_1 + m\pi)^2 + \alpha_2^2} - \frac{1}{2} \frac{(\alpha_1 - m\pi)}{(\alpha_1 - m\pi)^2 + \alpha_2^2} \right\} (A_2 \sin \alpha_1 \cosh \alpha_2 - A_1 \cos \alpha_1 \sinh \alpha_2) \\ - \frac{4(m\pi)^2}{(m\pi)^4 + k^2(Lm\pi)^2 + (lL)^4} \left[\alpha_2 \left\{ \frac{1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(\alpha_1 + m\pi)^2 + \alpha_2^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(\alpha_1 - m\pi)^2 + \alpha_2^2} \right\} \right. \\ \left. \times (B_1 \sin \alpha_1 \cosh \alpha_2 + B_2 \cos \alpha_1 \sinh \alpha_2) \right. \\ \left. + \left\{ \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} - \frac{1}{2} \frac{(\alpha_1 + m\pi)}{(\alpha_1 + m\pi)^2 + \alpha_2^2} - \frac{1}{2} \frac{(\alpha_1 - m\pi)}{(\alpha_1 - m\pi)^2 + \alpha_2^2} \right\} (B_2 \sin \alpha_1 \cosh \alpha_2 - B_1 \cos \alpha_1 \sinh \alpha_2) \right] \\ + F_1(m_1 L)^2 \frac{m\pi}{(m\pi)^2 + (m_1 L)^2} \sin \frac{m\pi}{2} \cosh \frac{m_1 L}{2} + F_2(m_2 L)^2 \frac{m\pi}{(m\pi)^2 + (m_2 L)^2} \sin \frac{m\pi}{2} \cosh \frac{m_2 L}{2}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left[H_1 \left\{ \left(\alpha_1 + \frac{m\pi}{2} \right)^2 - \alpha_2^2 \right\} + 2J_1 \left(\alpha_1 + \frac{m\pi}{2} \right) \alpha_2 \right] \left[\alpha_2 \sin \alpha_1 \cosh \alpha_2 \left\{ -\frac{1}{(\alpha_1 + m\pi)^2 + \alpha_2^2} + \frac{1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right\} \right. \\
 & \left. + \cos \alpha_1 \sinh \alpha_2 \left\{ -\frac{(\alpha_1 + m\pi)}{(\alpha_1 + m\pi)^2 + \alpha_2^2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right\} \right] - \left[J_1 \left\{ \left(\alpha_1 + \frac{m\pi}{2} \right)^2 - \alpha_2^2 \right\} - 2H_1 \left(\alpha_1 + \frac{m\pi}{2} \right) \alpha_2 \right] \\
 & \times \left[\alpha_2 \cos \alpha_1 \sinh \alpha_2 \left\{ -\frac{1}{(\alpha_1 + m\pi)^2 + \alpha_2^2} + \frac{1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right\} + \sin \alpha_1 \cosh \alpha_2 \left\{ -\frac{(\alpha_1 + m\pi)}{(\alpha_1 + m\pi)^2 + \alpha_2^2} + \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right\} \right] \\
 & - \left[H_2 \left\{ \left(\alpha_1 - \frac{m\pi}{2} \right)^2 - \alpha_2^2 \right\} + 2J_2 \left(\alpha_1 - \frac{m\pi}{2} \right) \alpha_2 \right] \left[\alpha_2 \sin \alpha_1 \cosh \alpha_2 \left\{ -\frac{1}{(\alpha_1 - m\pi)^2 + \alpha_2^2} + \frac{1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right\} \right. \\
 & \left. + \cos \alpha_1 \sinh \alpha_2 \left\{ -\frac{(\alpha_1 - m\pi)}{(\alpha_1 - m\pi)^2 + \alpha_2^2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right\} \right] - \left[J_2 \left\{ \left(\alpha_1 - \frac{m\pi}{2} \right)^2 - \alpha_2^2 \right\} - 2H_2 \left(\alpha_1 - \frac{m\pi}{2} \right) \alpha_2 \right] \\
 & \times \left[\alpha_2 \cos \alpha_1 \sinh \alpha_2 \left\{ -\frac{1}{(\alpha_1 - m\pi)^2 + \alpha_2^2} + \frac{1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right\} + \sin \alpha_1 \cosh \alpha_2 \left\{ -\frac{(\alpha_1 - m\pi)}{(\alpha_1 - m\pi)^2 + \alpha_2^2} + \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right\} \right] \\
 & \dots\dots\dots (51)
 \end{aligned}$$

3. 数値計算例と解析結果の検討

数値計算例としては、炭素繊維強化プラスチック

Table 1 Material constants of CFRP

E_L (GPa)	E_T (GPa)	G_{LT} (GPa)
137	8.18	4.75
ν_L	ν_T	ρ (kg/m ³)
0.316	0.0189	1.54×10^3

(CFRP)材を考える。その基本の弾性定数(繊維容積含有率 $V_f=60\%$)は、平均化近似解法による式⁽⁹⁾により計算され、実験でも確かめられた値であり、表1に示す。式(48)中の ϕ, ψ は、円筒殻の幾何学的形状、各種剛性値、負荷条件および振動条件などが定まると、 m, n だけの関数となる。永井ら⁽¹⁾も指摘しているように、円筒殻が十分に薄肉の場合には面内および回転慣性力の影響はいずれも無視することができるので、本解析モデルの積層円筒殻は十分に薄肉と考えられるため、板厚方向すなわち面外慣性力のみを考慮した。

Fig. 3 The relation between ψ and ϕ for cross-ply laminated cylindrical shells under impact external pressure at $Z=900$ (Number of layers $N=7$, Inner lamination angle $\theta=90$ [deg].)

著者の一人が以前に報告した積層円筒殻の外圧座屈⁽⁷⁾⁽⁸⁾、振動特性⁽¹⁰⁾において軸方向半波数 m は、クロスプライ積層では、すべての積層数 N 、形状パラメータ R/h , Z に無関係に一定値 1 であることを示している。そこで、このことを考慮すると、衝撃外圧が作用したとき、固有振動数との連成効果による不安定現象解析では軸方向半波数 m は 1 で励起すると考えられるため、数値計算では $m=1$ とした。そして、 n が

増加すると ϕ , ψ も大きくなり、放物線状に変化する。

数値計算例の一例として、Mathieu 形方程式の無次元係数 ϕ , ψ の関係について示す。最内層積層角 $\theta=90^\circ$ 、形状パラメータ $Z(=L^2/Rh)=900$ の場合を図 3 に示し、 $R/h=50, 100, 250, 500$ と変化させ、その影響を見るために各図 (a), (b), (c), (d) に示している。また、最内層積層角 θ と積層数 N の影響を見るために形状パラメータ $R/h=300, Z=900$ について、

(a) Number of layers $N=3$

(a) Number of layers $N=3$

(b) Number of layers $N=7$

(b) Number of layers $N=7$

(c) Number of layers $N=\infty$

(c) Number of layers $N=\infty$

Fig. 4 The relation between ψ and ϕ for cross-ply laminated cylindrical shells under impact external pressure at $R/h=300, Z=900$ (Inner lamination angle $\theta=0$ [deg.])

Fig. 5 The relation between ψ and ϕ for cross-ply laminated cylindrical shells under impact external pressure at $R/h=300, Z=900$ (Inner lamination angle $\theta=90$ [deg.])

最内層積層角を $\theta=0^\circ$ と $\theta=90^\circ$ とし、それぞれの場合について、図 4, 5 に示し、荷重比 I を 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.7 と変化させ、積層数 $N=3, 7, \infty$ 層の場合について各図 (a), (b), (c) に示す。

(1) 形状パラメータ R/h の影響 図 3 に示すように、Mathieu 形方程式の係数に及ぼす R/h の影響はない。これは、 ϕ, ψ に関する式 (49), (50) の中身がすべて R/h と Z の関数で整理することができるため、このような結果になったと思われる。また、他の積層数、荷重比においても R/h の変化による傾向は変わらず、 R/h の増加に伴い不安定モードを示す円周方向波数 n が増加するだけである。

(2) 積層数 N と最内層積層角 θ の影響 図 4, 5 に示すように、荷重比を一定にすれば、積層数の増加に伴い、不安定領域を占める円周方向のモードは高次の不安定モードとなっていく。また、本解析で使った境界条件での、クロスプライ積層円筒殻の静的座屈特性は、積層数の増加に伴い、最内層積層角 $\theta=0^\circ$ の場合、円周方向波数が減少していくのに対し、最内層積層角 $\theta=90^\circ$ の場合では、円周方向波数が増加していく⁽⁸⁾。このことを考えると、静的座屈特性と衝撃外圧力を受けた場合の動的座屈特性の安定問題において、静的座屈特性については、積層順序による座屈相違の関係を考慮することが重要であるが、円筒殻に衝撃外圧力が作用する場合の不安定領域は最内層積層角の違いによる影響はあまり見られない。また、積層数が増加するに従って、板厚方向に均質な直交異方性の場合 ($N=\infty$) に近づき、積層順序の影響はなくなる。このことから、静的座屈特性と同様に不安定現象に関する不安定モードや無次元係数 ϕ, ψ などが一致している。

(3) 荷重比 I の影響 形状パラメータ R/h , 最内層積層角 θ , 積層数 N にかかわらず、荷重比の増大に伴い、不安定領域に現れる円周方向波数は高次の不安定モードに遷移していく。本解析では最小荷重比を 0.1 の場合まで行っているものがあるが、いずれの場合もこのように静的座屈外圧力よりも低い衝撃外圧力で不安定となるモードが発生している。

4. 結 言

対称クロスプライ積層円筒殻に衝撃外圧力を負荷させたときの動的安定性を、Mathieu 形方程式による安定判別法を用い、座屈前軸対称運動を考慮することで、静的座屈値以下でも不安定となる可能性があることを示した。また、複合材料構造であるために必要な材料定数をパラメータにするには膨大な図面を必要とするので代表的な CFRP 材について検討した。

なお、半径方向外圧力と軸方向外圧力を合わせて受ける静水圧の場合についても同様な解析結果を得ているが、紙面の都合で後報に譲ることとする。

文 献

- (1) 永井健一・八巻昇, 機論, 53-491, C (1987), 1309-1316.
- (2) Yao, J. C., *AIAA J.*, 1-6 (1963), 1391-1396.
- (3) Bieniek, M. P., Fan, T. C. and Lackman, L. M., *AIAA J.*, 4-3 (1965), 495-500.
- (4) 粕谷平和・根本圭一, 機論, 59-558, A (1993), 454-460.
- (5) 根本圭一・粕谷平和, 機論, 60-574, A (1994), 1365-1370.
- (6) 粕谷平和・ほか 2 名, 機論, 61-592, A (1995), 2614-2620.
- (7) 粕谷平和・植村益次, 材料, 34-378 (1985), 262-266.
- (8) 粕谷平和・植村益次, 日本複合材料学会誌, 12-2 (1986), 73-79.
- (9) 植村益次・山田直樹, 材料, 24-257 (1975), 156-163.
- (10) 粕谷平和, 東海大学工学部紀要, 26-2 (1986), 89-94.