熱弾性応力測定における主応力分離逆解析の高精度化*

早 房 敬 祐^{*1}, 井 上 裕 嗣^{*2}, 清 水 卓^{*3}
岸 本 喜 久 雄^{*2}, 渋谷 壽 一^{*2}Improvement of Accuracy of Inverse Analysis
for Stress Separation in Thermoelastic Stress AnalysisKeisuke HAYABUSA^{*4}, Hirotsugu INOUE, Taku SHIMIZU,
Kikuo KISHIMOTO and Toshikazu SHIBUYA^{*4} Graduate School, Tokyo Institute of Technology, Dept. of Mechanical Engineering for Production,
2-12-1 O-okayama, Meguro-ku, Tokyo, 152-8552 Japan

This paper considers determination of individual stress components from the sum of the principal stresses obtained experimentally by the thermoelastic stress analysis. The stress separation problem is divided into two parts: (1) an inverse problem to estimate the unknown boundary values from the knowledge of the sum of the principal stresses inside the analysis region, and (2) a forward problem to compute the stress components inside the analysis region based on the estimated boundary values. These two problems can be formulated and solved by the BEM. As the inverse problem is often ill-posed, two techniques are adopted so as to attain an accurate result. One is pre-processing of experimental data, that is filtering based on the compatibility equation. The other is regularization of the inverse problem by Tikhonov's method with Hansen's L-curve method. The effectiveness of developed method is verified by applying it to an experimental data. The effect of configuration of the analysis region on the accuracy of stress separation is also discussed.

Key Words: Thermoelastic Stress Analysis, Stress Separation, Boundary Element Method, Inverse Problem, Tikhonov Regularization, L-Curve Method, Laplace Filter

1. 結 言

熱弾性応力測定法は、弾性体の熱弾性効果による温度変化を介して主応力和を測定する方法である。この方法は2次元かつ非接触的な測定が可能という利点を有し、近年の赤外線放射温度測定装置の進歩により有用な応力測定法として注目されている。しかし、この方法では応力成分が直接測定できないため、主応力和の測定データから応力成分を算定する主応力分離の手法が多く研究されてきた。

従来から知られている代表的な主応力分離法の一つに Ryall ら⁽¹⁾および Rowlands ら⁽²⁾⁻⁽⁵⁾の方法がある。これらの方法は応力関数あるいは応力成分を級数表示し、主応力和データに適合するようにその係数を求める方法である。しかし、これらの方法は応力関数や応力成分を適切な級数で表示するために解析の対象とする領域の形状に制約があり、汎用性に難点があった。これに対し Waldman ら⁽⁶⁾および村上ら⁽⁷⁾⁽⁸⁾は解析領域を任意に設定し、この領域に関する主応力分離

問題を以下の2つの境界値問題に分離する方法を提案した。

- (1) 主応力和データに基づいて未知の境界値を推定する境界値逆問題
- (2) 境界値に基づいて応力成分を求める境界値順問題

これらの境界値問題を有限要素法や境界要素法などによって解析すれば、解析領域の設定などの制約を受けない汎用性のある主応力分離法が実現できる。なお、熱弾性応力測定法には試験片の縁近傍における測定精度が低いという欠点があるが、この方法では主応力和データの測定位置と応力成分の評価位置とが一致している必要はないため、精度の低い縁近傍のデータを用いなくても解析領域全体の応力成分の分布を計算することが可能である。

しかしながら、上記(1)の境界値逆問題は解の一意性や安定性が欠如した不適切問題であるため、これを直接的に解いても境界値の推定精度は著しく低く、結果として主応力分離の精度も低下する。したがって、高精度な主応力分離を行うためには上記(1)の境界値逆問題の解法を十分に検討する必要がある。村上ら⁽⁷⁾⁽⁸⁾は推定すべき未知量の個数に対して測定データ数を過剰に与え、最小二乗法を適用しているが、不適切問題では最小二乗法のみを適用しても解の不安定性は十分に改善されない場合が多い。一方、Waldman

* 原稿受付 1998年9月25日。

^{*1} 正員、東京工業大学大学院 (〒152-8552 東京都目黒区大岡山2-12-1)。^{*2} 正員、東京工業大学工学部。^{*3} 東京工業大学学生。

E-mail: hayabuska@mep.titech.ac.jp

ら⁽⁶⁾は未知境界値である表面力の分布を有限個の直交関数で展開し、解の空間を制限することにより適切化を図っているが、これらの直交関数で任意の表面力の分布を正確に表現することは困難である。これらに対し、岸本ら⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾は階数低下法による適切化を適用する方法を示した。さらに、著者ら⁽¹¹⁾は階数低下法に代えてより柔軟な方法である Tikhonov の方法による適切化を適用するとともに、ひずみゲージにより測定されるデータを補助情報として利用する適切化法を示した。これらの適切化法の有効性は数値シミュレーションにより実証されているが、実測データに適用した場合の有効性は未だ検証されていない。

そこで、本研究では、熱弾性応力測定によって得られた主応力の実験データに基づいて前述の方法による主応力分離解析を行い、その有効性を検討した。さらに、主応力分離のより一層の高精度化を図るために、逆解析の事前処理である実測データのフィルタ処理についても検討した。

2. 熱弾性応力測定法

熱弾性応力測定の基礎式は次式で表される⁽¹²⁾。

$$\Delta s = -\frac{1}{K_m T} \Delta T \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 K_m は熱弾性定数、 T は絶対温度、 s は主応力和であり、 Δ は物理量の微小変化を表す。式(1)は断熱条件の下で成り立つので、測定対象物に一定振幅、一定周期の荷重を負荷し、荷重周期に合わせて温度変化 ΔT を測定する。赤外線放射温度測定装置を用いれば、測定領域全面において温度変化データが得られ、式(1)により主応力和の変化が得られる。以下では、無応力かつ $T = T_0$ の状態を基準状態として、基準状態からの主応力和の変化量を単に s で表す。

3. 境界値逆問題の定式化

均質等方弾性体に対して平面応力問題を考える。熱弾性応力測定により、赤外線放射温度測定装置の撮影範囲（これを測定領域とする）における主応力和

Fig. 1 Description of inverse boundary value problem.

のデータが得られるとする（図1）。さらに、測定領域内において主応力分離を行う領域 Ω （これを解析領域とする）を設定し、その境界を Γ とする。境界 $\Gamma (= \Gamma_0 \cup \Gamma_1)$ のうち、境界 Γ_1 （例えば自由表面）では境界条件が既知であるが、境界 Γ_0 （例えば、内部に設定した仮想境界）では境界条件は未知である。そこで、主応力分離問題を次の2つの境界値問題に分割する。

- (1) 解析領域 Ω の内部の多数の点において測定された主応力和 s に基づいて境界 Γ_0 上の表面力 t_0 を求める境界値逆問題。
- (2) 境界 Γ_0 および Γ_1 上の境界値に基づいて領域 Ω 内部の応力成分を求める境界値順問題。

上記(2)の境界値順問題は既存の手法により比較的容易に解くことが可能であるから、以下では上記(1)の境界値逆問題の定式化について述べる。

体積力がない場合、Somiglianaの式より、内部測定点 p における主応力和 s と境界 Γ 上の点 Q における表面力 t_j および変位 u_j の関係は次式で表される。

$$s(p) = 2 \left(\mu + \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \right) \left[\int_{\Gamma} U_{ij,i}(p, Q) t_j(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ij,i}(p, Q) u_j(Q) d\Gamma \right] \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 T_{ij} 、 U_{ij} は基本解（2次元 Kelvin の解）、 λ および μ は Lamé の定数を表す。境界要素法の手法⁽¹³⁾により境界 Γ を有限個の要素に分割して離散化すれば次式を得る。

$$s = G_s t - H_s u \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 s は領域 Ω の内部の多数の点における主応力和からなるベクトル、 t と u はそれぞれ境界 Γ 上の節点における表面力成分および変位成分からなるベクトル、 G_s と H_s は基本解から定まる既知の行列である。

次に、境界積分方程式を利用して、節点における表面力と変位に関する付加条件を導入する。境界 Γ 上の点 P 、 Q における変位 u_j と表面力 t_j に関する境界積分方程式は次式で表される。

$$C_{ij}(P) u_j(P) = \int_{\Gamma} U_{ij}(P, Q) t_j(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ij}(P, Q) u_j(Q) d\Gamma \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 C_{ij} は境界形状によって定まる定数である。式(2)を離散化した場合と同様に離散化すれば次式を得る。

$$Gt - Hu = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 G と H は基本解から定まる既知の行列である。式(3)と(5)を連立させ、 Γ_1 における既知の境界条件を適用すれば、境界 Γ_0 上の節点における表面力 t_0 に関する次の連立方程式を得る。

$$At_0 = b \quad (6)$$

ここで、 A と b は基本解、既知の境界条件、および、与えられた主応力和から定まる既知の行列とベクトルである。式(6)を t_0 について解けば、未知境界値が求められる。

ところが、式(6)のような境界値逆問題は係数行列 A が悪条件であるため、解 t_0 が観測値 b に対して過度に敏感である⁽¹⁴⁾。観測値である主応力和データには微小な誤差が含まれるため、解 t_0 の精度は極めて低下し、その結果、主応力分離の精度も極端に低下する⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾。

4. 適合条件に基づく事前処理

逆解析による境界値の推定精度を向上させるために、逆解析に先立って測定データに含まれる誤差を低減させる事前処理⁽¹⁵⁾を行う。平面応力状態の均質等方弾性体において、主応力和 $s(x, y)$ は次の Laplace の方程式を満たす。

$$\nabla^2 s(x, y) = 0 \quad (7)$$

式(7)の一般解は次式のような級数で与えられる。

$$s(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x, y) \quad (8)$$

ここで、 $f_n(x, y)$ は

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 & f_6 &= x^3 - 3xy^2 \\ f_2 &= x & f_7 &= 3x^2y - y^3 \\ f_3 &= y & f_8 &= x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \\ f_4 &= x^2 - y^2 & f_9 &= 4x^3y - 4xy^3 \\ f_5 &= xy & & \text{etc.} \end{aligned} \quad (9)$$

であり、 c_n は未定係数である。熱弾性応力測定によって得られた主応力和データに誤差が含まれていなければ、データは式(7)を満足する。しかし、実際の測定データには誤差が含まれており、その誤差 r は次式のように表される。

$$\begin{aligned} r(x, y) &= s^*(x, y) - s(x, y) \\ &= s^*(x, y) - \sum_{n=1}^{N_p} c_n f_n(x, y) \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 s^* は主応力和の測定値を表す。また、上式において級数の高次項は無視できるほど小さいため、級

Fig. 2 Raster method of the Laplace filter.

数を第 N_p 項まで打ち切っている。図2に示すように、解析領域内の一部に正方形領域（これをフィルタ領域とする）を考える。フィルタ領域内部の M_p ($M_p \geq N_p$) 個の点における誤差 $r(x, y)$ の二乗和が最小となるように未定係数 c_n を決定すれば、結果として得られる計算値 $s(x, y)$ は平滑化された値になる。

次に図2に示すように隣の破線で示すフィルタ領域について同様の操作を行い、同様に順次フィルタ領域を走査させて解析領域全体についてこの操作を行う。一点鎖線で示したようにフィルタ領域が縁近傍の精度が低い領域（斜線部）にかかった場合、その部分以外のフィルタ領域のデータについてフィルタ操作を行う。ただし、 $M_p < N_p$ の場合はフィルタ操作は行わない。以上の操作を解析領域全体において c_n が収束するまで繰り返すことにより、適合条件をできる限り満足するように主応力和のデータが平滑化される。

5. Tikhonov の方法による適切化

Tikhonov の方法は次の汎関数を最小とするように解 t_0 を求める方法である⁽¹⁶⁾。

$$\Pi = \|At_0 - b\|^2 + \alpha \|t_0\|^2 \quad (11)$$

ここで、 α は適切化パラメータである。境界 Γ_0 上の未知量の個数 $2N$ （節点数 N ）に対して主応力和データが与えられる点の数 M を過剰にとり、 $M \geq 2N$ とする。この時、汎関数 Π を最小とするような適切化解 t_0^* は次式で表される。

$$t_0^* = V(W^T W + \alpha I)^{-1} W^T U^T b \quad (12)$$

V 、 W および U は A を特異値分解することにより得られる行列、上添字 T は行列の転置を表す。

Tikhonov の方法により正確かつ安定な解を求めるためにはパラメータ α を適切に定める必要がある。本研究ではパラメータの決定法として Hansen の L カープ法⁽¹⁷⁾を採用する。すなわち、パラメータ α を種々変化させて適切化解 t_0^* を求め、残差のノルム $\|At_0^* - b\|$

Fig. 3 Rectangular specimen with a central circular hole.

Fig. 4 Thermoelastic data in the measured region.

を横軸、解のノルム $\|t_0^*\|$ を縦軸に取って描いた曲線の角部に相当するときのパラメータ α の値を最適なパラメータの値とする。

6. 実験データの主応力分離

6.1 実験方法 本実験に供した試験片の形状を図3に示す。材質はSUS304鋼、厚さは2 mmである。試験片表面には放射率を一定にするためにつや消しの黒色スプレーを塗装した。試験片に加えた荷重の周期は10 Hzであり、荷重の大きさは98 Nから7938 Nまで ($\Delta F = 7840$ N) 変化させた。温度変化の計測には、日本電子製のJTG-8010を使用した。測定データには多くのノイズが含まれるので、同一条件で測定を50回繰り返し、データを積算平均したものを最終的な測定データとした。測定時の室温は20°Cであった。

6.2 測定データおよび境界要素分割 実験により得られた温度変化データを等高線表示したものを

図4に示す。測定領域全体のデータ数は512 × 480と非常に多く、これらのデータをすべて用いて解析を行うと計算容量および計算時間の面で効率が悪い。しかし、本研究の主応力分離手法では解析領域を任意に設定することが可能である。そこで、本解析では図3中の正方形ABCDのように解析領域を定めた。このとき、表面力を推定する境界 Γ_0 は境界AB, BC, CD, DAに相当する。

また、熱弾性応力測定では、負荷に伴う試験片の変形による測定位置のずれ、赤外線放射温度測定装置の空間分解能の限界、および、試験片の縁における熱拡散により、試験片の縁近傍において測定精度が低下する。しかし、本手法では解析に用いる測定データを解析領域内部で任意に選択することが可能である。図4によれば、試験片の両側の縁から約1.2 mm以内の範囲において測定精度の低下が観察される。そこで、円孔縁においても同程度の範囲で測定精度の低下が起こっていると考え、図3に×で示すように縁から1.2 mm以上離れた位置の $M = 1228$ 個のデータを用いた。

境界値逆問題における解の推定精度は未知境界上の節点数 N や測定データ数 M に依存し、未知量の個数 $2N$ に対して測定データ数 M を過剰に取ることで推定精度を向上させることができる⁽¹⁰⁾。ところが、測定データを過剰に取りすぎると数値計算の効率が低下する。本解析では円孔部分を36分割、正方形部分を32分割（各辺を8分割）とし、2次要素を用い、領域の各頂点では2重節点を定義した。したがって、未知境界 Γ_0 の未知量の個数 $2N$ は136である。

6.3 境界要素順解析 後述する主応力分離の結果の精度を評価する際に基準とするデータを作成するために、図3の試験片全体をモデル化して境界要素順解析を行い、解析領域内部の応力分布を求めた。解析領域の境界ABCD上の表面力はその位置における応力成分よりCauchyの式を使って求めた。図5(a)~(d)は各境界における表面力を示しており、破線は x 方向の表面力、実線は y 方向の表面力を表す。また、領域ABCD内部の主応力および各応力成分の分布を図6(a)~(d)に示す。

6.4 適切化を行わない場合 適切化処理を行わずに境界値逆解析を行った場合の表面力の推定結果を図7(a)~(d)に示す。図7中の三角印のプロットを持つ破線が x 方向の表面力、丸印のプロットを持つ実線が y 方向の表面力を表す。図7を図5と比較すると、表面力の分布形状および大きさは全く異なっている。さらに、図7に基づいて順解析を行い主応力分離を行った。結果を図8(a)~(d)に示す。この結果を図6

Fig. 5 Traction distribution on Γ_0 . (dotted curve: x -direction, solid curve: y -direction)

Fig. 10 Traction distribution on Γ_0 estimated from filtered data without regularization. (Δ : x-direction, $\circ$: y-direction)

Fig. 9 Sum of the principal stresses. (MPa)

Fig. 11 L-curve in the inverse analysis with Tikhonov regularization. (solid curve: original data, dotted curve: filtered data)

る程度低減され、結果として振動が幾分抑えられた。しかし、依然表面力は大きく振動し、図5とは大きく異なっており、図10に基づいた主応力分離の結果も図6とは大きく異なっていた。したがって、フィルタ操作による事前処理のみでは十分な精度で主応力分離を行うことはできないことがわかる。

6.6 Tikhonovの適切化 図9(a)のオリジナルデータおよび図9(b)のフィルタ操作を行ったデータについてそれぞれ逆解析を行い、Tikhonovの方法による適切化を行った。図11の実線はオリジナルデータの場合の、破線はフィルタ操作を行った場合のLカーブを示す。両者とも適切化パラメータを増加させるにつれてプロットは左上から右下に移動している。図11中のA点およびA'点は適切化パラメータを行列Aの最小特異値に等しくした場合に相当し、オリジナルデータの場合よりもフィルタ操作を行った場合の方が解の

ノルムおよび残差が小さくなっている。また、図11中のB点およびB'点は前述のLカーブの角部を示しており、その時の適切化パラメータ α はそれぞれ1.01および 1.27×10^{-2} であった。B点とB'点を比較すると、解のノルムはほぼ等しいが残差のノルムはオリジナルデータの場合よりもフィルタ操作を行った場合の方が小さい。残差のノルムの値はオリジナルデータの場合は70 MPa、フィルタ操作を行った場合は6 MPaで、1/10以下となった。すなわち、本研究で採用したフィルタ操作による事前処理はデータに含まれる誤差を低減させる方法として有効である。

図11のLカーブ角部B点の時の境界ABCD上の表面力の推定結果を図12(a)~(d)に示す。なお、図中には比較のために順解析の結果(図5)も曲線で示している。これによれば、推定結果は図5の結果にかなり近づいており、推定精度が向上していることがわかる。しかしながら、各節点ごとに振動する傾向が見られるうえに、解析領域角部付近では図5の結果とは大きく異なっている。

図11のLカーブ角部B'点の時の表面力の推定結果を図13(a)~(d)に、図13(a)~(d)の推定結果に基づいて算出した主応力和および応力成分の分布を図14(a)~(d)に示す。図13(a)~(d)によれば、図12に見られるような各節点毎の振動が抑えられており、一層精度が向上している。しかし、解析領域角部近傍の推定値は図5の結果とは一致していない。この原因は次のように考えられる。すなわち、式(6)において未知表面力は単一のベクトル t_0 で表されるため、本来表面力が不連続な部分(解析領域角部など)においても適切化によって表面力が連続となるように解 t_0 が平滑化される。このような解析領域角部近傍などにおける推定精度の低下を避けるためには、推定すべき表面力が不連続に変化しないように、角点のない滑らかな解析領域を設定すればよいと考えられる。

6.7 解析領域の境界が滑らかな場合 前節の結果に基づいて角点のない滑らかな解析領域を設定し、同様の逆問題解析を行った。図15に解析領域および

Fig. 12 Traction distribution on Γ_0 estimated from original data by Tikhonov regularization. (Δ : x -direction, $\circ$: y -direction)

Fig. 13 Traction distribution on Γ_0 estimated from filtered data by Tikhonov regularization. (Δ : x -direction, $\circ$: y -direction)

Fig. 14 Stress components obtained from estimated traction in Fig. 13. (MPa)

測定データの位置を示す。このとき、外側の円が表面力を推定する境界 Γ_0 であり、測定データ点数は $M = 908$ 、未知量の個数は $2N = 144$ である。逆解析を行う際には、測定データに対してフィルタ操作を行い、さらに Tikhonov の適切化を行った。

図 16 は横軸に図 15 中の θ によって表された Γ_0 上の位置、縦軸に表面力の大きさをプロットし、破線は x 方向、実線は y 方向の順解析による表面力を、 Δ は x 方向、 $\circ$ は y 方向の逆解析による表面力の推定結果を表している。これによれば、推定された表面力は順解析の結果と非常によく一致しており、高精度な結果が得られている。そのときの主応力分離の結果は図 17 (a)~(d) であり、図 6 とほぼ一致している。よって、角点がないように解析領域を設定すれば主応力分離を高精度に行うことが可能であることが示された。

7. 結 言

本論文では、熱弾性応力測定における主応力分離問題を論じた。円孔を有する帯板について、熱弾性応力測定を行い、その主応力和データに基づいた主応力分離を行った。主応力分離の際に問題となる境界値逆解析における難点の解決法として適合条件式に基づいたフィルタ操作を行う方法と Tikhonov の方法を適用し、両者を組み合わせることで、高精度な主応力分離が行えることを示した。また、解析領域を角点がないように設定することにより、より一層精度が向上することも示した。

謝 辞

本研究の実験に際し試験片および実験装置の便宜を図っていただいた(株)日本電子の増喜彰久氏、実験データの取り込みおよび処理について協力していただ

Fig. 17 Stress components obtained for circular analysis region. (MPa)

Fig. 15 Circular analysis region and its boundary elements.

Fig. 16 Estimated traction distribution on Γ_0 of circular analysis region. (Δ : x-direction, $\circ$: y-direction)

いた(株)日本電子クリエイティブの吉村正昭氏に感謝の意を表します。

文 献

- (1) Ryall, T.G. and Wong, A.K., Determination Stress Components from Thermoelastic Data — A Theoretical Study, *Mech. Mat.*, **7** (1988), 205-214.
- (2) Huang, Y.M., Rowlands, R.E. and Lesniak, J.R., Simultaneous Stress Separation, Smoothing of Measured Thermoelastic Isopachic Information and Enhanced Boundary Data, *Exp. Mech.*, **30-4** (1990), 398-403.
- (3) Feng, Z., Zhang, D., Rowlands R.E. and Sandor,

B.I., Thermoelastic Determination of Individual Stress Components in Loaded Composites, *Exp. Mech.*, **32-2** (1992), 89-95.

- (4) Lin, S.T. and Rowlands, R.E., Thermoelastic Stress Analysis of Orthotropic Composites, *Exp. Mech.*, **35-3** (1995), 257-265.
- (5) Lin, S.T., Miles, J.P. and Rowlands, R.E., Image Enhancement and Stress Separation of Thermoelastically Measured Data under Random Loading, *Exp. Mech.*, **37-3** (1997), 225-231.
- (6) Waldman, W., Ryall, T.G. and Jones, R., On the Determination of Stress Components in 3-D from Thermoelastic Data, *Comput. Struct.*, **36** (1990), 553-557.
- (7) 村上敬宜・吉村正昭, 赤外線応力画像解析法による全応力分離解析システムの確立, *機論*, **61-591, A** (1995), 2482-2488.
- (8) Murakami, Y. and Yoshimura, M., Determination of All Stress Components from Measurements of the Stress Invariant by the Thermoelastic Stress Method, *Int. J. Solids Struct.*, **34** (1996), 4449-4461.
- (9) 井上裕嗣・岸本喜久雄・新保英男・渋谷壽一, 熱弾性応力測定における主応力分離のための境界要素逆解析, *境界要素法論文集*, **12** (1995), 121-126.
- (10) 岸本喜久雄・井上裕嗣・新保英男・渋谷壽一, 熱弾性応力測定における主応力分離に関する逆問題解析, *機論*, **62-597, A** (1996), 1204-1211.
- (11) 早房敬祐・井上裕嗣・岸本喜久雄・渋谷壽一, 熱弾性応力測定における主応力分離のための境界要素逆解析(ひずみゲージによる補助情報を用いた適切化), *境界要素法論文集*, **13** (1996), 101-106.
- (12) 例えば, Harwood, N., Cummings, W.M. and Mackenzie, A.K., *Thermoelastic Stress Analysis*, (1991), 1-34, Adam Hilger.
- (13) 例えば, 結城良治, 本須博行, 境界要素法による弾性解析, (1987), 培風館.
- (14) 例えば, 久保司郎, 逆問題, (1992), 91-92, 培風館.
- (15) Rauch, B.J. and Rowlands, R.E., Filtering Thermoelastically Measured Isopachic Data, *Exp. Mech.*, **37-4** (1997), 387-392.
- (16) 例えば, 久保司郎, 逆問題, (1992), 45-47, 培風館.
- (17) Hansen, P.C. and O'leary, D.P., The Use of the L-curve in the Regularization of Discrete Ill-posed Problems, *SIAM J. Sci. Comput.*, **14-6** (1993), 1487-1503.