曲げ応力場におけるだ円形介在物および 回転だ円体状介在物の干渉効果の解析*

林 田 一 志^{*1}, 野 田 尚 昭^{*2}

Analysis of Interaction between Elliptical and Ellipsoidal Inclusions under Bending

Hitoshi HAYASHIDA and Nao-Aki NODA^{*3}

^{*3} Kyushu Institute of Technology, Department of Mechanical Engineering,
1-1 Sensui-cho, Tobata-ku, Kitakyushu, Fukuoka, 804-8550 Japan

This paper deals with interaction problems of elliptical and ellipsoidal inclusions under bending using singular integral equations of the body force method. These problems are formulated as a system of singular integral equations with Cauchy-type or logarithmic-type singularities, where unknown functions are densities of body forces distributed in the x, y and r, θ, z directions in infinite bodies having the same elastic constants as those of the matrix and inclusions. In order to satisfy the boundary conditions along the elliptical and the ellipsoidal boundaries, the unknown functions are approximated by a linear combination of fundamental density functions and polynomials. The present method is found to yield the exact solutions for an elliptical and spherical inclusion under bending. Also, the present method yields rapidly converging numerical results for interface stresses in the interaction of inclusions.

Key Words: Elasticity, Body Force Method, Numerical Analysis, Stress Concentration, Singular Integral Equations, Elliptical and Ellipsoidal Inclusions

1. 緒 言

だ円形介在物およびだ円体状介在物の解は、その形状比や剛性比を変えれば構造材料中に存在する種々の欠陥の評価に有用であり、これまでに多くの研究がなされている⁽¹⁾⁻⁽¹³⁾。しかし、母材中にランダムに多数個存在している介在物を解析したり、遠方での荷重が一樣引張だけでなく、せん断応力や曲げ応力を受ける場合などのような、一般的な境界条件に対して問題を厳密に解析することは、特に 3 次元問題ではまだ困難であり、高精度で一般性のある解析法を検討することは依然重要である。

著者らは最近、曲げ応力場における複数のだ円孔の干渉問題における体積力法の特異積分方程式の数値解析法(2次元)を考察した⁽¹⁴⁾。その結果、

(1) 従来の体積力法で 1 だ円孔問題を解析すると、引張応力場では選点数 1 で厳密解が得られるのに対して、曲げ応力場では選点数をある程度大きくとる必要があること、

(2) 著者らが提案する 8 種類の基本密度関数を用いる新解析法では選点数を 2 以上とすることで、曲げ応力場の 1 だ円孔問題に対して厳密解を与えること、

(3) 従って曲げ応力場におけるだ円孔の干渉問題において新解析法が極めて有効であること等を明らかにした。

一方、3 次元問題では複数の回転だ円体状介在物の軸対称一軸引張問題と非軸対称の一軸引張問題を取扱い、新解析法の有効性を確認した⁽¹⁵⁾。これまでのところ、2 次元問題で用いた基本密度関数等の数値解析手法は、そのまま 3 次元回転だ円体状介在物問題にも有効であったが、それらはすべて一様な引張問題での検討であり、遠方で曲げ応力が作用する場合でも、2 次元問題のように有効であるかどうかはまだ不明である。

そこで本研究では、だ円形介在物および回転だ円体状介在物の曲げ応力場における干渉問題にその方法を適用し、著者らの新解析法の有効性を介在物の問題や 3 次元曲げ応力場に対してさらに検討する。また、干渉効果における遠方の応力勾配の影響や、2 次元と 3 次元の干渉効果についても比較し考察する。本解法では境界上の滑らかな応力分布が得られるので、最大応力の位置があらかじめ不明であるこの種の問題には特に有力な方法であると考えられる。

2. 解 析 方 法

本解析法を回転だ円体状介在物の干渉問題(3次元)を例にとって説明する。だ円形介在物の問題(2次元)

* 原稿受付 1999 年 3 月 23 日。

^{*1} 学生員, 九州工業大学大学院(〒804-8550 北九州市戸畑区仙水町 1-1)。

^{*2} 正員, 九州工業大学工学部。

E-mail: noda@mech.kyutech.ac.jp

は、3次元の場合と同様に2次元問題の集中力の基本解を用いて解くことができる。

図1(c)に示すような、主軸長 $2a$ 、 $2b$ の2個の等大回転だ円体状介在物を有する無限体が遠方で z 方向に勾配をもつ曲げ応力 $\sigma_x^\infty = \sigma_1 z/b + \sigma_0$ を受けている干渉問題を体積力法を用いて解析する。いま直角座標系を (x, y, z) とし、円筒座標系を (r, θ, z) として図1(d)のように定義する〔着力点に関する座標の記号は、 (ξ, η, ζ) と (ρ, ϕ, ζ) とする〕。本問題は、図1(a), (b)に示されるように2つの補助問題A(無限体が遠方で $\sigma_x^\infty = \sigma_1 z/b + \sigma_0$ 、 $\sigma_y^\infty = \sigma_x^\infty$ を受ける場合)と補助問題B(無限体が遠方で $\sigma_x^\infty = \sigma_1 z/b + \sigma_0$ 、 $\sigma_y^\infty = -\sigma_x^\infty$ を受ける場合)の重ね合わせにより構成される。問題Aは無限体が遠方で $\sigma_r^\infty = \sigma_1 z/b + \sigma_0$ を受ける軸対称問題であるので、以下では、問題Bの非軸対称問題、すなわち無限体が遠方で $\sigma_r^\infty = (\sigma_1 z/b + \sigma_0) \cos 2\theta$ と $\tau_{r\theta}^\infty = -(\sigma_1 z/b + \sigma_0) \sin 2\theta$ を受ける場合についての解法を中心に説明する。

この問題は、重ね合わせの原理に基づく体積力法の考え方により、介在物のない無限体中の一円周上 $[\rho = a \cos \alpha_k, \zeta = d + b \sin \alpha_k, k=1, 2]$ に大きさが $\cos 2\phi$ または $\sin 2\phi$ で変化する r, θ, z 方向の集中力の輪が作用するときの任意の点 $(r = a \cos \psi_i, z = d + b \sin \psi_i, i=1, 2)$ の応力場の解 $(K_{nn}^{F_r}, K_{nn}^{F_\theta}, \dots, K_{nn}^{F_z}, K_{nn}^{F_\phi})$ と変位場の解 $(K_{ur}^{F_r}, K_{ur}^{F_\theta}, \dots, K_{ur}^{F_z}, K_{ur}^{F_\phi})$ を用いて解くことができる⁽⁸⁾。⁽¹³⁾ このとき問題は、母材 (E_M, ν_M) および介在物 (E_i, ν_i) と同じ弾性定数をもつ無限体(これらを無限

体M、無限体Iとする)中の仮想境界上に分布させた面積 $\rho d\phi ds$ の微小面素 $(-d\rho = a \sin \alpha_k d\alpha_k, d\zeta = b \cos \alpha_k d\alpha_k, ds = \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha_k + b^2 \cos^2 \alpha_k} d\alpha_k)$ に作用させた体積力密度を未知関数とする特異積分方程式(1)等で表現される(未知関数は $\rho_{rM}^*(\alpha_k), \rho_{\theta M}^*(\alpha_k), \rho_{zM}^*(\alpha_k), \rho_{rI}^*(\alpha_k), \rho_{\theta I}^*(\alpha_k), \rho_{zI}^*(\alpha_k)$ ($k=1, 2$), 添字1, 2は各介在物を表す)。

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \left\{ \rho_{rM}^*(\psi_i) \cos \psi_{i0} + \rho_{zM}^*(\psi_i) \sin \psi_{i0} \right\} \\ & -\frac{1}{2} \left\{ \rho_{rI}^*(\psi_i) \cos \psi_{i0} + \rho_{zI}^*(\psi_i) \sin \psi_{i0} \right\} \\ & + \sum_{k=1}^2 \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nnM}^{F_r}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{rM}^*(\alpha_k) ds + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nnM}^{F_\theta}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{\theta M}^*(\alpha_k) ds \right. \\ & \quad + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nnM}^{F_z}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{zM}^*(\alpha_k) ds - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nnI}^{F_r}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{rI}^*(\alpha_k) ds \\ & \quad \left. - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nnI}^{F_\theta}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{\theta I}^*(\alpha_k) ds - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nnI}^{F_z}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{zI}^*(\alpha_k) ds \right] \\ & = -(\sigma_1 z/b + \sigma_0) \cos^2 \psi_{i0} \cos 2\theta \quad (i=1, 2) \quad \dots\dots(1) \end{aligned}$$

式(1)は仮想境界上における境界条件 $\sigma_{nm} - \sigma_{ni} = 0$ 、に相当する。他の境界条件式 $\tau_{n\theta i} - \tau_{n\theta} = 0, \tau_{niM} - \tau_{niI} = 0, u_{rM} - u_{rI} = 0, u_{\theta M} - u_{\theta I} = 0, u_{zM} - u_{zI} = 0$ も同様に表される。式(1)はコーシー形の特異性を有する項を含んでいる。そのため式(1)に含まれる積分が特異性を含むときコーシーの主値をとるものとする。また式(1)で、 ψ_{i0} は点 (r, z) における介在物の外向き法線と r 軸とのなす角である。特異積分方程式の未知関数である $\rho_{rM}^*(\alpha_k), \rho_{\theta M}^*(\alpha_k), \rho_{zM}^*(\alpha_k)$ は次式で定義される $(\rho_{rI}^*(\alpha_k), \rho_{\theta I}^*(\alpha_k), \rho_{zI}^*(\alpha_k))$ も同様)

$$\begin{aligned} \rho_{rM}^*(\alpha_k) \cos 2\varphi &= \frac{dF_r}{\rho d\phi ds}, \quad \rho_{\theta M}^*(\alpha_k) \sin 2\varphi = \frac{dF_\theta}{\rho ds d\phi}, \\ \rho_{zM}^*(\alpha_k) \cos 2\varphi &= \frac{-dF_z}{\rho d\phi ds} \quad \dots\dots(2) \end{aligned}$$

ここで、 dF_r, dF_θ, dF_z は、面積 $\rho d\phi ds$ の微小面素に作用する体積力の合力の r, θ, z 方向の成分である。

結局問題は式(1)の未知関数 $\rho_{rM}^*(\alpha_k) \sim \rho_{zI}^*(\alpha_k)$ を求めることに帰着されるが、それらを直接求めるかわりに以下のような補助関数 $(f_1(\alpha_k), f_2(\alpha_k))$ を求める。以下で $f(\alpha_k)$ は $\rho_{rM}^*(\alpha_k) \sim \rho_{zI}^*(\alpha_k)$ の各関数を意味している。そして、 $f(\alpha_k)$ から得られる補助関数 $f_1(\alpha_k), f_2(\alpha_k)$ を式(3)で定義する。

$$f_1(\alpha_k) = \{f(\alpha_k) + f(-\alpha_k)\}/2, \quad f_2(\alpha_k) = \{f(\alpha_k) - f(-\alpha_k)\}/2 \quad \dots\dots(3)$$

ここで、 $f_1(\alpha_k), f_2(\alpha_k)$ は以下の関係を満たす。

$$f_1(\alpha_k) = f_1(-\alpha_k), \quad f_2(\alpha_k) = -f_2(-\alpha_k) \quad \dots\dots(4)$$

すなわち、未知関数 $f(\alpha_k)$ を $-\pi/2 \leq \alpha_k \leq \pi/2$ で求めることは式(4)を満たす補助関数 $f_1(\alpha_k), f_2(\alpha_k)$ を $0 \leq \alpha_k \leq \pi/2$ で求めることに等しい。つまり、 $0 \leq \alpha_k \leq \pi/2$ で

Fig.1 Problems and coordinate system

$f_1(\alpha_k), f_2(\alpha_k)$ が与えられるとき、次式に示すように $f(\alpha_k)$ が $-\pi/2 \leq \alpha_k \leq \pi/2$ で与えられる。

$$\begin{aligned} f(\alpha_k) &= f_1(\alpha_k) + f_2(\alpha_k) \\ f(-\alpha_k) &= f_1(-\alpha_k) + f_2(-\alpha_k) = f_1(\alpha_k) - f_2(\alpha_k) \end{aligned} \quad \dots\dots(5)$$

いま、基本密度関数を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} w_{r3}(\alpha_k) &= w_{\theta3}(\alpha_k) = n_r(\alpha_k), \quad w_{r4}(\alpha_k) = w_{\theta4}(\alpha_k) = n_r(\alpha_k) \sin \alpha, \\ w_{z1}(\alpha_k) &= n_z(\alpha_k) / \sin \alpha, \quad w_{z2}(\alpha_k) = n_z(\alpha_k) \end{aligned}$$

$$n_r(\alpha_k) = \frac{b \cos \alpha_k}{\sqrt{a^2 \sin^2 \alpha_k + b^2 \cos^2 \alpha_k}}, \quad n_z(\alpha_k) = \frac{a \sin \alpha_k}{\sqrt{a^2 \sin^2 \alpha_k + b^2 \cos^2 \alpha_k}} \quad \dots\dots(6)$$

$$\dots\dots(7)$$

ここで、 $w_{r3}(\alpha_k), w_{\theta3}(\alpha_k), w_{z1}(\alpha_k)$ は式(4)の第1式を、 $w_{r4}(\alpha_k), w_{\theta4}(\alpha_k), w_{z2}(\alpha_k)$ は式(4)の第2式を満足する連続関数である。そして、 $\rho_{rM}^*(\alpha_k) \sim \rho_{z1}^*(\alpha_k)$ を以下のように基本密度関数と重み関数 $\rho_{r3M}(\alpha_k)$ 等で表現する。

$$\begin{aligned} \rho_{rM}^*(\alpha_k) &= \rho_{r3M}(\alpha_k) w_{r3}(\alpha_k) + \rho_{r4M}(\alpha_k) w_{r4}(\alpha_k) \\ \rho_{\theta M}^*(\alpha_k) &= \rho_{\theta3M}(\alpha_k) w_{\theta3}(\alpha_k) + \rho_{\theta4M}(\alpha_k) w_{\theta4}(\alpha_k) \quad \dots\dots(8) \\ \rho_{zM}^*(\alpha_k) &= \rho_{z2M}(\alpha_k) w_{z2}(\alpha_k) + \rho_{z1M}(\alpha_k) w_{z1}(\alpha_k) \end{aligned}$$

式(8)で $\rho_{rM}^*(\alpha_k)$ 等も同様に表現される。いま、 $\rho_{rM}^*(\alpha_k)$ を例にとると右辺第1項の $\rho_{r3M}(\alpha_k) w_{r3}(\alpha_k)$ は式(5)の $f_1(\alpha_k)$ に相当する。また、右辺第2項の $\rho_{r4M}(\alpha_k) w_{r4}(\alpha_k)$ は式(5)の $f_2(\alpha_k)$ にそれぞれ対応している。このとき $\rho_{r3M}(\alpha_k)$ 等が満足すべき条件は

$$g(\alpha_k) = g(-\alpha_k) \quad \dots\dots(9)$$

ここで、 $g(\alpha_k)$ は $\rho_{r3M}(\alpha_k), \rho_{r4M}(\alpha_k), \dots, \rho_{z1M}(\alpha_k)$ の各関数(重み関数)を意味する。問題Bでは、未知関数を連続関数として近似するために次のような表現を用いる。

$$\begin{aligned} \left(\begin{aligned} \rho_{r3M}(\alpha_k) &= \sum_{n=1}^{M/2} a_{nr} t_n(\alpha_k) \quad \left(\begin{aligned} \rho_{\theta3M}(\alpha_k) &= \sum_{n=1}^{M/2} c_{n\theta} t_n(\alpha_k) \quad \left(\begin{aligned} \rho_{z2M}(\alpha_k) &= \sum_{n=1}^{M/2} e_{nz} t_n(\alpha_k) \\ \rho_{r4M}(\alpha_k) &= \sum_{n=1}^{M/2} b_{nr} t_n(\alpha_k) \quad \left(\begin{aligned} \rho_{\theta4M}(\alpha_k) &= \sum_{n=1}^{M/2} d_{n\theta} t_n(\alpha_k) \quad \left(\begin{aligned} \rho_{z1M}(\alpha_k) &= \sum_{n=1}^{M/2} f_{nz} t_n(\alpha_k) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \end{aligned} \quad \dots\dots(10) \\ t_n(\alpha_k) &= \cos\{2(n-1)\alpha_k\} \quad \dots\dots(11) \end{aligned}$$

式(10), (11)の表現は式(9)を満足する。ここで、 M は、 $-\pi/2 \leq \alpha_k \leq \pi/2$ の範囲の選点数である。以上の離散化の方法により、特異積分方程式は、 $k=1,2$ のそれぞれの介在物について係数 $a_{nM}, b_{nM}, c_{nM}, d_{nM}, e_{nM}, f_{nM}, a_{n1}, b_{n1}, c_{n1}, d_{n1}, e_{n1}, f_{n1}$ を未知数とする $(6M \times 2)$ 元の連立方程式に還元される。以上の解析方法により無限体中の2個の等大回転だ円体状介在物の境界上の応力分布ならびに最大応力を求める。

3. 解析結果および考察

前報⁽³⁾と同様に、 $E_I/E_M > 1$ のとき境界上の法線方向の垂直応力 σ_n が界面の剥離に重要であると考えられるのでその干渉効果を議論する。また、 $E_I/E_M < 1$ のとき $\theta = \pi/2$ の面上の母材に生じる σ_t が他の応力に比べて大きい値となるのでその干渉効果に注目する。以下ではポアソン比 $\nu_M = \nu_I = 0.3$ とした。

3. 1 1つの介在物の純曲げ問題 本解析における応力の収束性を表1に示す。表1(a)は図2(a)のようなだ円形介在物の純曲げ(2次元)問題において、剛性比 $E_I/E_M = 10^{-5}, 1/2, 10^{+5}$ 、形状比 $a/b = 2.0 \sim 1/4$ とした場合の $0 \leq \psi_i \leq \pi/2$ での選点数 M と点 $B(0, b)$ での応力 σ_t および σ_n を示している。また表1(b)は図2(b)のような回転だ円体状介在物の純曲げ(3次元)問題において、剛性比 $E_I/E_M = 10^{-5}$ 、形状比 $a/b = 2.0 \sim 1/3$ とした場合の問題A, B, C (図1)における $0 \leq \psi_i \leq \pi/2$ での選点数 M と点 $B(0, b)$ での応力 σ_t を示している。表からもわかるように2次元問題では形状比にかかわらず選点数 $M = 2$ で厳密解が得られるのに対し、3次元問題では形状比 $a/b = 1.0$ のときのみ選点数 $M = 2$ で厳密解となる(但し、表1では数値計算上の誤差が小数点以下4桁目にわずかに生じている)。一方、3次元問題で $a/b \neq 1$ のときは選点数を増すことによって有効数字4桁程度収束しており、特に $a/b < 1$ の場合 a/b が小さくなるにつれて M を大きくとることが必要である。このようなことは遠方で一様引張りを受ける問題では見受けられない(2次元3次元に関わらず、また a/b に関わらず、 $M = 1$ で厳密解が得られる)。

図2に示す一個の介在物の純曲げについて介在物の形状比と剛性比を変化させたときの点 $B(0, b)$ での応力 σ_t を図3に示す。比較のため、遠方で一様引張りの場合を図4に示す。なお、図3において $E_I/E_M > 1$ の範囲で界面上の σ_n は1以下となるので $E_I/E_M < 1$ の範囲での σ_t のみを図示した。

次に、図5に一個の介在物における未知関数の解析結果を2次元問題と3次元問題(図1の問題A, B)につ

Fig.2 Single inclusion under bending

いて示す。2次元問題（図2(a)）と3次元の問題A（図2(b)）で $\sigma_r^\infty = z/b$ において、新解析法では重み関数 ρ_{x4M}, ρ_{y1M} または ρ_{r4M}, ρ_{z1M} 等を求めることに帰着する。また3次元の問題B（図2(b)）で $\sigma_r^\infty = z/b \cdot \cos 2\theta$, $\tau_{r\theta}^\infty = -z/b \cdot \sin 2\theta$ では重み関数 $\rho_{r4M}, \rho_{\theta4M}, \rho_{z1M}$ 等を求めることに帰着する。それらは表1および図5に示すような検討から結局以下のように表されることがわかる。

- (1) 2次元問題 : $\rho_{x4M} = c_1, \rho_{y1M} = c_2 \cos 2\psi$
 - (2) 3次元の問題A ($\sigma_r^\infty = z/b$ を受けるとき)
 - (i) $a/b=1$ のとき : $\rho_{r4M} = c_3, \rho_{z1M} = (c_4 + c_5 \cos 2\psi)$
 - (ii) $a/b \neq 1$ のとき : $\rho_{r4M} = f_1(\psi), \rho_{z1M} = f_2(\psi)$
 - (3) 3次元の問題B ($\sigma_r^\infty = z/b \cdot \cos 2\theta, \tau_{r\theta}^\infty = -z/b \cdot \sin 2\theta$ を受けるとき)
 - (i) $a/b=1$ のとき : $\rho_{r4M} = \rho_{\theta4M} = c_5, \rho_{z1M} = (c_6 + c_7 \cos 2\psi)$
 - (ii) $a/b \neq 1$ のとき : $\rho_{r4M} = f_3(\psi), \rho_{\theta4M} = f_4(\psi), \rho_{z1M} = f_5(\psi)$
- ここで $c_1 \sim c_7$ は定数 $f_1(\psi) \sim f_5(\psi)$ は偶関数である。なお、 ρ_{x4I}, ρ_{z1I} 等も ρ_{x4M}, ρ_{y1M} 等と同様の形式で表される。このようなことから2次元問題では1個の介在物問題の純曲げまたはそれと引張応力場との組み合わせに対して、 a/b に関わらず選点数 $M=2$ 以上とすることで厳密解

が得られる。また3次元問題では1個の介在物問題の純曲げまたはそれと引張応力場との組み合わせに対して、 $a/b=1$ のときのみ選点数 $M=2$ 以上とすることで厳密解が得られる。3次元問題の $a/b \neq 1$ では体積力密度はこのような形式で表されないで、ある程度 M を増加させて未知関数を近似する必要がある。

3.2 2つの介在物の干渉効果 次に、2個の等大回転だ円体状介在物および等大だ円形介在物の干

 Fig.3 σ_t at B in Fig.2(a), (b)

 Table 1 Convergence of stress σ_t or σ_n at B in Fig.2(a), (b)

 (a) σ_t or σ_n at B in Fig.2(a) and (b)

E_t/E_M	M	a/b				
		2	1	1/2	1/4	1(3D)
10^{-5} (σ_t)	1	1.3837	1.8250	2.8298	5.1309	1.6351
	2	1.5000	2.0000	3.0000	5.0000	1.7082
	4	1.5000	2.0000	3.0000	5.0000	1.7083
	8	1.5000	2.0000	3.0000	5.0000	1.7084
	∞	1.5000	2.0000	3.0000	5.0000	1.7084
	∞	1.5000	2.0000	3.0000	5.0000	1.7084
$1/2$ (σ_t)	1	1.1346	1.2750	1.4725	1.6747	1.2300
	2	1.1404	1.2847	1.4819	1.6696	1.2372
	4	1.1404	1.2847	1.4819	1.6696	1.2372
	8	1.1404	1.2847	1.4819	1.6696	1.2372
	∞	1.1404	1.2847	1.4819	1.6696	1.2372
	∞	1.1404	1.2847	1.4819	1.6696	1.2372
10^{+5} (σ_n)	1	0.1371	0.1750	0.0909	-0.0318	20640.
	2	0.7264	0.3988	0.1793	-0.0712	0.1783
	4	0.7264	0.3988	0.1793	-0.0712	0.1785
	8	0.7264	0.3988	0.1793	-0.0712	0.1783
	∞	0.7264	0.3988	0.1793	-0.0712	0.1783
	∞	0.7264	0.3988	0.1793	-0.0712	0.1783

 (b) σ_t at B in Fig.2(b) when $E_t/E_M=10^{-5}$

a/b	M	Problem A	Problem B	Problem C
2	2	1.4376	1.2874	1.3625
	4	1.4386	1.2892	1.3639
	8	1.4386	1.2893	1.3639
	16	1.4386	1.2893	1.3639
1	2	1.8345	1.5819	1.7082
	4	1.8345	1.5822	1.7083
	8	1.8345	1.5823	1.7084
	16	1.8345	1.5823	1.7084
1/2	2	2.6720	2.2321	2.4520
	4	2.5888	2.2024	2.3956
	8	2.5825	2.2020	2.3923
	16	2.5825	2.2006	2.3916
1/3	4	3.7907	2.9363	3.3635
	8	3.7025	2.9543	3.3284
	16	3.6984	2.9292	3.3138
	32	3.6983	2.9293	3.3138

 Fig.4 σ_t at B and σ_n at A in tension problem

渉問題について得られた結果を比較して示す。図6～8は境界上の応力分布を表している。図6は空かの問題を表し、図7、8は剛体介在物の問題を表しているが（空かの問題の*i*=1の場合は紙面の都合上省略した）、ともに干渉効果は*i*=2について $\psi=+90^\circ$ *i*=1について $\psi=-90^\circ$ 付近で顕著に現われている。空かの問題では干渉効果は引張応力の増加として現われる。一方、剛体介在物の問題では干渉効果は大きな圧縮応力となって表われるが、 $\psi=0^\circ$ 付近の剥離に影響する引張応力

(a) 2D

(b) Problem A(3D)

(c) Problem B(3D)

Fig.5 Values of unknown function

(a) 2D (plane strain)

(b) 3D

Fig.6 Interface stress σ_i around *i*=2 (*a*/*b*=1.0, *b*/*d*=0.9, $E_I/E_M=10^{-5}$)

σ_n はあまり干渉によって影響しない。また、介在物*i*=2が*i*=1に及ぼす干渉の効果は、介在物*i*=1が*i*=2に及ぼす干渉の効果に比べ小さくなっている。これは*i*=2で打ち消す応力場が純曲げであるため表面力の合力が0になり、応力が解放されてもその周辺での影響が小さいためである。一般に曲げ応力場は一樣引張と純曲げの組み合わせで表されるが、1つの介在物が他の介在物へ及ぼす影響を考える場合、一樣引張りの効果が大きく、純曲げ（つまり応力勾配）の影響は比較的小さいと考えられる。2次元問題と3次元問題を比較すると、干渉効果は通常の問題では2次元問題の方が3次元問題に比べ大きくなる傾向にあるが、剛体介在物の問題では3次元問題の方が2次元問題に比べ大きくなっている。これは、介在物同士が最も近づいた部分が2次元問題では直線となるのに対し、3次元問題では点となることによると考えられる。同様のことは2次元と3次元の一樣引張応力における干渉問題においても確認された⁽¹⁵⁾。

4. 結 言

本研究では、著者らが先に提案した体積力法の特異積分方程式の数値解析法〔式(1)～(11)〕を用いて、遠

 Fig.7 Interface stress σ_n around $i=1$ ($a/b=1.0, b/d=0.9, E_I/E_M=10^5$)

 Fig.8 Interface stress σ_n around $i=2$ ($a/b=1.0, b/d=0.9, E_I/E_M=10^5$)

方で曲げ応力を受ける2個の回転だ円体状介在物を有する無限体および2個のだ円形介在物を有する無限板の問題を解析し、その干渉効果を考察した結果、以下のような知見が得られた。

(1) 新解析法で1個の介在物の純曲げまたはそれと一様引張の重ね合せ問題を解析すると、2次元問題では形状比にかかわらず選点数 $M=2$ で厳密解が得られるのに対し、3次元問題では形状比 $a/b=1.0$ のときのみ $M=2$ 以上で厳密解が得られる。3次元問題の $a/b \neq 1$ では選点数を増加させることで有効数字4桁程度収束する。一般に、 a/b が小さくなるにつれて選点数を多くする必要がある。なお、引張問題では形状比にかかわらず $M=1$ で厳密解となる。また、剛性比 E_I/E_M は収束に影響しない。

(2) 一般に曲げ応力場は一様引張と純曲げの組み合わせで表されるが、1つの介在物が他の介在物へ及ぼす影響を考える場合、一様引張りの効果が大きく、純曲げ(つまり応力勾配)の影響は比較的小さい(図7)。また、同じ間隔(b/d)の介在物干渉問題で干渉効果は通常2次元問題の方が3次元問題に比べ大きい、 $E_I/E_M > 1$ で介在物が近づいたとき($b/d=0.9$)には3次元問題の方が2次元問題に比べ干渉効果が大きくなる場

合がある。

文 献

- (1) 西田政孝, 応力集中, (1967), 330-333, 森北出版
- (2) K. Sezawa and G. Nishimura, Stress under Tension in a Plate with a Heterogeneous Intension. Rep. Aero. Res. Inst. Tokyo Imp. Univ., Vol. 68 (1932), 25-43
- (3) J. N. Goodner, Concentration of Stress around Spherical and Cylindrical Inclusions and Flaws. Trans. ASME. Vol. T. Karuman, Calif. Inst. Tech. (1941), 293-309
- (4) Eshelby, J.D., The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems, Proceeding Royal Society London Series A, Vol. 241 (1957), 376-396
- (5) Eshelby, J.D., The Elastic Field outside an Ellipsoidal Inclusion, Proceeding Royal Society London Series A, Vol. 252 (1959), 561-569
- (6) Shadowsky, M.A., and Sternberg, E., Stress Concentration Around an Ellipsoidal Cavity in an Infinite Body under Arbitrary Plane Stress Perpendicular to the Axis of Revolution of Cavity, Trans. ASME. J. Appl. Mech., Vol. 69 (1947), 191-201
- (7) 土田栄一郎・中原一郎・小玉正雄, 数個の球かを有する弾性体の非軸対称問題(第1報, 2球かを有する弾性体), 機論, 42-353, (1976), 46-54.
- (8) 野田尚昭・小笠原望・松尾忠利, 回転だ円体状空か非軸対称一軸引張りにおける干渉効果, 機論, 62-596, A(1996), 1051-1058
- (9) 土田栄一郎・内山直人・中原一郎・小玉正雄, 数個の球かを有する弾性体の非軸対称問題(第2報, 3球かを有する弾性体), 機論, 44-382, (1978), 1876-1883.
- (10) 野田尚昭・小笠原望・松尾忠利, 任意個の回転だ円体状空かを持つ無限体の非軸対称一軸引張りにおける干渉効果, 機論, 62-602, A(1996), 97-103
- (11) 野田尚昭・松尾忠利・原田昭治・中村資生, 特異積分方程式による回転だ円体状介在物の干渉効果の解析, 機論, 61-585, A (1995), 965-973.
- (12) 松尾忠利・野田尚昭・原田昭治, 任意個の回転だ円体状介在物を持つ無限体の引張り, 機論, 62-597, A(1996), 1226-1233
- (13) 野田尚昭・泊賢治・松尾忠利, 回転だ円体状介在物を持つ無限体の非軸対称一軸引張りにおける干渉効果, 機論, 64-622, A (1998), 1577-1582.
- (14) 野田尚昭・林田一志, 面内曲げ応力集中問題における体積法の特異積分方程式の数値解析法, 機論, 64-624, A(1998), 2203-2208.
- (15) 松尾忠利, 特異積分方程式を利用した応力集中問題の高精度解析法, 九州工業大学学位論文(1996), 162-165.