点対称内部分布を有する周期複合材料の均質化理論における 境界条件および弾-粘塑性解析への適用*

大野 信 忠^{*1}, 松田 哲 也^{*2}

A Homogenization Theory for Periodic Composites with Point-Symmetric Internal Distributions : Boundary Condition and Application to Elastic-Viscoplastic Analysis

Nobutada OHNO^{*3} and Tetsuya MATSUDA

^{*3} Nagoya University, Dept. of Micro System Engineering,
Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya, Aichi, 464-8603 Japan

The homogenization theory for time-dependent nonlinear composites with periodic internal distributions developed by the present authors is rebuilt by taking notice that micro-stress and micro-strain may distribute point-symmetrically in unit cells in periodic composites. It is pointed out that the field of perturbed velocity may satisfy the symmetry with respect to the cell center and facet centers of a unit cell. The symmetry is then used for imposing the boundary condition on perturbed velocity and for developing the theory in an integral form in which a half region of the unit cell is taken as the domain of analysis. As applications of the theory, elastic-viscoplastic elongation of unidirectional composites is analyzed by assuming the square and hexagonal arrays of fibers subjected to either transverse or off-axial loading. It is thus shown that the point-symmetry can be used for computing efficiently the inelastic behavior of nonlinear, periodic composites.

Key Words: Computational Mechanics, Composite Material, Inelasticity, Homogenization Theory, Boundary Condition, Periodicity, Point Symmetry

1. 緒 言

周期内部構造を有する材料の巨視的特性を評価する問題は工学的に重要であり、すでに多くの評価手法が提案されている。このうち、変位の二尺度漸近展開に基づく均質化理論^{(1)~(4)}は、巨視的特性とともにユニットセル内の応力やひずみの分布も解析でき、有用であるから、弾性問題を初めとしてすでに多くの問題に適用されている⁽⁵⁾⁽⁶⁾。しかし時間依存変形に関しては、線形粘弾性問題⁽²⁾⁽⁷⁾⁽⁸⁾と定常クリープ問題⁽⁹⁾を除いて、このような均質化理論の定式化が行われていなかった。

そこで著者らは、前報^{(10)~(12)}において周期複合材料の時間依存変形に対する均質化理論を定式化し、その応用として一方向連続繊維強化複合材料のクリープおよび弾-粘塑性変形を解析した。この理論は、擾乱変位場および応力場が現時点で既知であるとして擾乱変位速度場および応力速度場を求め、微小時間増分後の擾乱変位場および応力場を知る形式である。非線形変形の解析は通常このような増分形で行われ、弾塑性変形や

大変形の均質化理論もこの形で定式化される^{(13)~(17)}。

上述のように増分形で解析を行うとき、既知とする擾乱変位場および応力場がユニットセル内でセル中心に関して点対称分布する場合が多い(後出の図1参照)。このとき、対称性により一つのユニットセルの半分を解析すればよいはずであるが、均質化理論では周期境界条件を用いるため、ユニットセル全体が著者らの研究^{(10)~(12)}を含む最近の研究⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾においても解析されている。内部構造の配置が線対称性や六方対称性を有するような場合の解析領域についてはすでに議論されているが⁽¹⁸⁾⁽¹⁹⁾、擾乱変位場および応力場が点対称分布する場合の検討は見当たらない。非線形問題を増分的に解析するとき、計算時間の短縮は重要であるから、このような検討は工学的に意味がある。

本研究では、内部状態が上述のように点対称分布する場合の擾乱変位速度場の特性についてまず検討する。次に、この検討結果を用いて前報⁽¹¹⁾⁽¹²⁾で定式化した時間依存変形の均質化理論を再構築し、ユニットセルの半分を解析領域にとっても前報⁽¹¹⁾⁽¹²⁾の定式化が境界条件を除いて有効であることを示す。つづいて、これらの検討結果の妥当性を確かめるため、連続繊維強化複合材料が横方向および非主軸負荷を受ける場合の弾-粘

* 原稿受付 1999年3月23日。

^{*1} 正員, 名古屋大学大学院工学研究科 (〒464-8603 名古屋市中種区不老町)。

^{*2} 准員, 名古屋大学大学院。

E-mail: ohno@mech.nagoya-u.ac.jp

塑性変形を解析する。

なお、本論文では特に断らない限り総和規約を用いる。また、ベクトルおよびテンソルに対して直接表示および成分表示を併用し、直接表示は例えばベクトル x 、テンソル A のように太字で、その成分は一つの固定 Cartesian 座標系に関して x_i 、 A_{ij} のように表す。

2. 変位速度場の特性

周期的内部構造を有する物体 Ω を考え、そのユニットセルを Y とする。 Ω は無限に広がっており、巨視的一様負荷を受けるとする。ただし、 Ω に生じる変形は巨視的にも微視的にも微小であるとする。このとき、時間 t での Ω 中の微視的変位速度 $\dot{u}_i$ は、巨視的一様変形のごう配および剛体変位をそれぞれ $\dot{E}_{ij}(t)$ および $c_i(t)$ とすると、

$$\dot{u}_i(y, t) = \dot{E}_{ij}(t)y_j + c_i(t) + \dot{u}_i^\#(y, t) \quad (1)$$

と書ける。ここで、 $(\dot{})$ は時間 t に関する微分を示し、 y_i は Ω に対して設けた直交座標である。また $u_i^\#$ は、巨視的一様変形による変位と剛体変位の和からのずれ、すなわち擾乱変位を表し、 Ω 内で Y を単位として周期分布する。この周期性を今後 Y -周期性と呼ぶことにする。上式を用いると、 Ω 内のひずみ速度（微視的ひずみ速度）は、

$$\dot{e}_{ij} = \dot{E}_{ij} + e_{ij(y)}(\dot{u}^\#) \quad (2)$$

と表される。ここで、 $\dot{E}_{ij}$ と $e_{ij(y)}(\dot{u}^\#)$ はそれぞれ巨視的ひずみ速度と擾乱ひずみ速度を示し、

$$\dot{E}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{F}_{ij} + \dot{F}_{ji}) \quad (3)$$

$$e_{ij(y)}(\dot{u}^\#) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i^\#}{\partial y_j} + \frac{\partial \dot{u}_j^\#}{\partial y_i} \right) \quad (4)$$

と定義される。

上で述べた擾乱ひずみ速度は、 Ω 内の内部分布、すなわち Ω 内の構成相の分布や微視的応力・ひずみの分布に起因しており、もしこれらの内部分布（今後、単に内部分布と呼ぶ。）がなければ巨視的ひずみ速度のみが生じる。

いま、内部分布は Y -周期的であるだけでなく、各ユニットセル内でセル中心 C_0 に関する点対称性を有するとする（図 1）。この周期性と点対称性を組み合わせると、内部分布はセル面（2 次元では辺）の中心 C_i ($i=1, 2, \dots, N$) に関する点対称となるのが次のように示される。ここで、 N はセル面（2 次元では辺）の総数を表し、例えば図 1 (a) の四角形セルでは $N=4$ 、図 1 (b) の六角形セルでは $N=6$ である。いま、 Y 内に任意の点 P を考え、その点 C_0 および C_i に関する対称点

を P_0 および P_i とする。このとき、点 P_0 と点 P_i は図 1 (a) や図 1 (b) からわかるように互いに Y -周期条件を満たす位置となり、これらの点での内部状態は同じとなる。したがって、点 P と点 P_0 の内部状態が同じであれば、点 P と点 P_i も同じ内部状態を有することになり、内部分布は点 C_i ($i=1, 2, \dots, N$) に関する点対称となる。逆に、内部分布が点 C_0 および C_i ($i=1, 2, \dots, N$) に関して点対称であれば、点 P_0 と点 P_i の内部状態は同じとなるから、内部分布の Y -周期性が成り立つ。

今後、点 C_0 および C_i に関する点対称性を C -対称性と呼び、内部分布が C -対称性を有する場合を考える。このとき、 Ω 内の物質点を点 C_k ($k=0, 1, \dots, N$) のいずれに関して点対称変換しても内部分布の状態は変わらず、また明らかに巨視的一様負荷の状態もその影響を受けない。したがって、このような内部分布を有する Ω に巨視的一様負荷が作用した結果として生じる擾乱変位速度 $\dot{u}_i^\#$ の場合も点 C_k ($k=0, 1, \dots, N$) に関する対称

(a) Square array

(b) Hexagonal array

Fig. 1. Schematic illustration of internal distributions in periodic composites subjected to macroscopically uniform load; (a) square and (b) hexagonal arrays of unit cells with points of symmetry for internal distributions.

性を満足することになるから、次式が成り立つ。

$$\dot{u}_i^\#(y(P_k), t) = -\dot{u}_i^\#(y(P), t), \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (5)$$

ここで P_k は、点 P の点 C_k に関する対称点を示す。上式の特別の場合として点 P が点 C_k に一致する場合を考えると、次式が得られる。

$$\dot{u}_i^\#(y(C_k), t) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (6)$$

また、微視的ひずみ速度 $\dot{e}_{ij}$ および微視的応力速度 $\dot{\sigma}_{ij}$ も点 C_k に関する対称性を満足するように生じるから、次式が成り立つ。

$$\dot{e}_{ij}(y(P_k), t) = \dot{e}_{ij}(y(P), t), \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (7)$$

$$\dot{\sigma}_{ij}(y(P_k), t) = \dot{\sigma}_{ij}(y(P), t), \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (8)$$

なお、この章で示した内部分布の点対称性および式(5)~(8)は、四角形セルではセル頂点に関しても[図1(a)参照]、また直方体セルではセル頂点およびセル辺の中点に関しても成り立つ。

3. 半ユニットセルの導入

内部分布が C -対称性を有する場合、擾乱変位速度場 $\dot{u}_i^\#(y, t)$ は式(5)を満足する。そこで、ユニットセル Y の半分 $\tilde{Y}$ (今後、半ユニットセルと呼ぶ。) を、その境界での $\dot{u}_i^\#$ の境界条件として C -対称性あるいは Y -周期性のいずれかを課し得るように導入する。図2(a), (b)は2次元の $\tilde{Y}$ の例を示しており、図2(a)の場合、辺 AB と

Fig. 2. Semiunit cell with boundary on which either C -symmetry or Y -periodicity of $\dot{u}_i^\#$ is prescribed; (a) C -symmetry on AB and CD , and Y -periodicity on AD and BC , (b) C -symmetry on all edges.

CD では中点に関する $\dot{u}_i^\#$ の点対称性が、また辺 AD と BC では Y -周期性が $\dot{u}_i^\#$ の境界条件として成り立つ。一方、図2(b)の例では、すべての辺で中点に関する $\dot{u}_i^\#$ の点対称性が成立する。

上述のように半ユニットセル $\tilde{Y}$ を導入し、 $\tilde{Y}$ の境界およびその外向き単位法線をそれぞれ $\tilde{\Gamma}$ および n_i 、 $\dot{u}_i^\#(y, t)$ の任意の変分を $v_i(y, t)$ とすると、以下に示すように次式が成り立つ。

$$\int_{\tilde{\Gamma}} \dot{\sigma}_{ij} n_j v_i d\tilde{\Gamma} = 0 \quad (9)$$

すなわち、 $\dot{u}_i^\#$ の境界条件として C -対称性を課す各境界面では、その中心 C_k に関する対称点 P と P_k で v_i と $\dot{\sigma}_{ij}$ がそれぞれ式(5)および(8)を満足し、しかも法線 n_i の向きが変わらない[図2(b)参照]。したがって、この境界面での $\dot{\sigma}_{ij} n_j v_i$ の積分は零となる。一方、 Y -周期性を $\dot{u}_i^\#$ の境界条件として考える境界面では、図2(a)に示すような対応する2つの点 P と P' で $\dot{\sigma}_{ij}$ と v_i が等しく、 n_i は逆向きとなるから、 $\dot{\sigma}_{ij} n_j v_i$ の積分は零となる。したがって、式(9)が成り立つ。

また、 $\dot{u}_i^\#$ の C -対称性あるいは Y -周期性が $\tilde{\Gamma}$ 上で成り立てば、式(9)と同様に次式が示される。

$$\int_{\tilde{\Gamma}} \frac{\partial \dot{u}_i^\#}{\partial y_j} d\tilde{\Gamma} = \int_{\tilde{\Gamma}} \dot{u}_i^\# n_j d\tilde{\Gamma} = 0 \quad (10)$$

なお渋谷⁽⁷⁾は、六角形ユニットセルの境界条件として $\dot{u}_i^\#$ のセル辺中点に関する点対称性を Y -周期性の代わりに用いたが、2章で述べた内部分布の C -対称性や上述の半ユニットセルの導入についてはまったく議論していない。

4. 時間依存変形の均質化理論

前報^{(10)~(12)}では、内部分布の Y -周期性に基づいてユニットセル Y を解析領域に取り、時間依存変形の均質化理論を展開した。ここでは、3章で述べた半ユニットセル $\tilde{Y}$ を解析領域に取って前報⁽¹¹⁾⁽¹²⁾の理論を再構築し、内部分布の C -対称性が成り立つ場合には解析領域を半減できることを示す。

微視的応力 σ_{ij} の釣合式が速度形で

$$\frac{\partial \dot{\sigma}_{ij}}{\partial y_j} = 0 \quad (11)$$

と書かれる場合を考える。前章と同じく $\dot{u}_i^\#(y, t)$ の任意の変分を $v_i(y, t)$ とし、部分積分および発散定理を用いると、半ユニットセル $\tilde{Y}$ に関する次の積分表示が上式より導かれる。

$$\int_{\tilde{Y}} \dot{\sigma}_{ij} e_{ij}(v) d\tilde{Y} - \int_{\tilde{\Gamma}} \dot{\sigma}_{ij} n_j v_i d\tilde{\Gamma} = 0 \quad (12)$$

この式の境界積分項は、内部分布の Y -周期性に加えて C -対称性を仮定すると、3章で示したように零となる。したがって上式は

$$\int_{\tilde{Y}} \dot{\sigma}_{ij} e_{ij(y)}(v) d\tilde{Y} = 0 \quad (13)$$

となる。

いま、物体 Ω は弾-クリープ材料で構成され、その構成式は

$$\dot{\sigma}_{ij} = c_{ijkl} [\dot{e}_{kl} - \beta_{kl}(\sigma)] \quad (14)$$

と表されたとする。ここで c_{ijkl} と $\beta_{kl}(\sigma)$ は、それぞれ弾性剛性およびクリープ速度を表しており、物体 Ω の各構成相ごとに与えられる材料特性である。この構成式と式(2)を式(13)に代入すると、式

$$\int_{\tilde{Y}} c_{ipq} e_{pq(y)}(\dot{u}^{\#}) e_{ij(y)}(v) d\tilde{Y} = -\dot{E}_{kl} \int_{\tilde{Y}} c_{ijkl} e_{ij(y)}(v) d\tilde{Y} + \int_{\tilde{Y}} c_{ijkl} \beta_{kl}(\sigma) e_{ij(y)}(v) d\tilde{Y} \quad (15)$$

が導かれる。この式の $v_i(y, t)$ は、すでに述べたように $\dot{u}_i^{\#}(y, t)$ の任意の変分である。上式から、擾乱変位速度 $\dot{u}_i^{\#}$ は巨視的ひずみ速度 $\dot{E}_{kl}$ に比例する速度非依存成分とクリープ関数 $\beta_{kl}(\sigma)$ による速度依存成分の二つからなることがわかる。そこで、二つの特性関数 $\chi_i^k(y, t)$ および $\varphi_i(y, t)$ をそれぞれ次の境界値問題

$$\int_{\tilde{Y}} c_{ipq} e_{pq(y)}(\chi_i^k) e_{ij(y)}(v) d\tilde{Y} = \int_{\tilde{Y}} c_{ijkl} e_{ij(y)}(v) d\tilde{Y} \quad (16)$$

$$\int_{\tilde{Y}} c_{ipq} e_{pq(y)}(\varphi) e_{ij(y)}(v) d\tilde{Y} = \int_{\tilde{Y}} c_{ijkl} \beta_{kl}(\sigma) e_{ij(y)}(v) d\tilde{Y} \quad (17)$$

の解として定義すると、式(15)より $\dot{u}_i^{\#}(y, t)$ は次式のよう表されることがわかる。

$$\dot{u}_i^{\#}(y, t) = -\chi_i^k(y, t) \dot{E}_{kl}(t) + \varphi_i(y, t) \quad (18)$$

なお、式(16)および(17)を解く際に、 χ_i^k と φ_i には $\dot{u}_i^{\#}$ が $\tilde{Y}$ の境界面で満たすべき条件、すなわち C -対称性あるいは Y -周期性が境界条件として課せられる。

この結果、式(2)、(14)および上式より微視的応力 σ_{ij} の発展式が

$$\dot{\sigma}_{ij}(y, t) = a_{ijkl}(y, t) \dot{E}_{kl}(t) - r_{ij}(y, t) \quad (19)$$

と求められる。ここで、

$$a_{ijkl} = c_{ipq} [\delta_{pk} \delta_{ql} - e_{pq(y)}(\chi_i^k)] \quad (20)$$

$$r_{ij} = c_{ijkl} [\beta_{kl}(\sigma) - e_{kl(y)}(\varphi)] \quad (21)$$

であり、 δ_{ij} はKroneckerのデルタを示す。さらに、半ユニットセル $\tilde{Y}$ の体積を $|\tilde{Y}|$ とし、 $\tilde{Y}$ に関する体積平均を

$$\langle \# \rangle = \frac{1}{|\tilde{Y}|} \int_{\tilde{Y}} \# d\tilde{Y} \quad (22)$$

と定義すると、式(19)より巨視的構成式が

$$\dot{\Sigma}_{ij} = \langle a_{ijkl} \rangle \dot{E}_{kl} - \langle r_{ij} \rangle \quad (23)$$

と導かれる。ここで、

$$\langle \dot{\sigma}_{ij} \rangle = \dot{\Sigma}_{ij} \quad (24)$$

であり、また式(2)、(4)および(10)により次式が成り立つことが示される。

$$\langle \dot{e}_{ij} \rangle = \dot{E}_{ij} \quad (25)$$

以上のように、内部分布の Y -周期性に加えて C -対称性を仮定できる場合には解析領域を半ユニットセル $\tilde{Y}$ に取った形で定式化でき、したがって計算時間の大幅な短縮が可能となる。ただし、式(16)~(25)の結果は、解析領域と境界条件を除いて前報⁽¹¹⁾⁽¹²⁾の結果と同じである。したがって、前報⁽¹¹⁾⁽¹²⁾で示した増分形の計算手順は本報の結果に対しても成り立つ。すなわち、巨視的ひずみ（あるいは巨視的応力）の履歴が与えられ、微視的応力 σ_{ij} と微視的ひずみ e_{ij} の $\tilde{Y}$ 内での分布が現時点で既知であるとする。このとき、式(16)および式(17)は χ_i^k および φ_i を未知関数とする境界値問題となり、一般に有限要素法により解くことができる。関数 χ_i^k および φ_i がこのように求められれば、まず式(23)により巨視的応力（あるいは巨視的ひずみ）の増分を、次に式(19)と(14)により σ_{ij} と e_{ij} の増分を計算できる。したがって、これらの増分を各変数の現在値に加えることにより増分計算を進めることができる。

5. 解析例

本理論の応用例として一方向連続繊維強化複合材料の弾-粘塑性変形（前報⁽¹²⁾でユニットセル Y を解析領域に取り解析済み）を解析し、半ユニットセル $\tilde{Y}$ を解析領域に取る定式化の妥当性を検討する。

5.1 材料特性 繊維配列として図3(a), (b)に示す正方配列と六方配列を考え、 y_1 および y_2 座標軸を図

Fig. 3. Fiber array and coordinates; (a) square array, (b) hexagonal array.

中に示すように面内に、また y_3 座標軸を紙面に垂直に取る。これら 2 種類の繊維配列における繊維の体積率を V_f とし、繊維の変形は Hooke の法則

$$e_{ij} = \frac{1+\nu_f}{E_f} \sigma_{ij} - \frac{\nu_f}{E_f} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (26)$$

に従うとする。ここで、 ν_f と E_f は材料定数である。一方マトリックスは、弾性変形に加えて次式のようにべき乗則クリープに基づく時間依存変形を示すとする。

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1+\nu_m}{E_m} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\nu_m}{E_m} \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} + \frac{3}{2} A \sigma_{eq}^{n-1} s_{ij} \quad (27)$$

ここで、 ν_m 、 E_m 、 A および n は材料定数、 s_{ij} は偏差応力、また $\sigma_{eq} = [(3/2)s_{ij}s_{ij}]^{1/2}$ である。

解析の便宜上、応力、ひずみおよび時間に対して次の無次元量を導入する。

$$\sigma_{ij}^* = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0}, \quad \Sigma_{ij}^* = \frac{\Sigma_{ij}}{\sigma_0}, \quad e_{ij}^* = \frac{E_f e_{ij}}{\sigma_0}, \quad E_{ij}^* = \frac{E_f E_{ij}}{\sigma_0}, \quad t^* = AE_f \sigma_0^{n-1} t \quad (28)$$

ここで σ_0 は適当な基準応力を表す。このとき、式(26)および(27)は、それぞれ

$$e_{ij}^* = (1+\nu_f) \sigma_{ij}^* - \nu_f \sigma_{kk}^* \delta_{ij} \quad (29)$$

(a)

(b)

Fig. 4. Unit cell Y and finite element mesh of semiunit cell $\tilde{Y}$; (a) square array, (b) hexagonal array.

$$\frac{\partial e_{ij}^*}{\partial t^*} = \frac{E_f}{E_m} \left[(1+\nu_m) \frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial t^*} - \nu_m \frac{\partial \sigma_{kk}^*}{\partial t^*} \delta_{ij} \right] + \frac{3}{2} (\sigma_{eq}^*)^{n-1} s_{ij}^* \quad (30)$$

となる。上式において s_{ij}^* は無次元応力 σ_{ij}^* の偏差を表し、 $\sigma_{eq}^* = [(3/2)s_{ij}^*s_{ij}^*]^{1/2}$ である。この結果、指定すべき材料定数は E_f/E_m 、 ν_f 、 ν_m 、 n に加えて V_f となる。本報では、前報^{(10)~(12)}と同じく金属基複合材料 SCS-6/Ti 合金⁽²⁰⁾を想定し、これらの値を次のように選んだ。

$$E_f/E_m = 4, \quad \nu_f = 0.25, \quad \nu_m = 0.34, \quad n = 4, \quad V_f = 0.395$$

5.2 要素分割

正方配列および六方配列の場合のユニットセル Y を前報^{(10)~(12)}と同じくそれぞれ図 4(a) および(b)のように取り、その上半分を半ユニットセル $\tilde{Y}$ とした。これらの図には本報で使用した $\tilde{Y}$ の有限要素分割が示してある。使用した要素は 4 節点アイソパラメトリック要素であり、各節点に y_1 、 y_2 、 y_3 方向の節点値を割り当て、式(16)および(17)から関数 χ_i^k および φ_i を求めるための有限要素法プログラムを作成した。ただし、 y_3 方向には微視的にも一様変形が生じているとし、 $\partial \chi_i^k / \partial y_3 = 0$ および $\partial \varphi_i / \partial y_3 = 0$ ($i=1, 2, 3$) とした⁽¹²⁾⁽²¹⁾。また、関数 χ_i^k および φ_i に対する境界条件、すなわち χ_i^k と φ_i の C -対称性あるいは Y -周期性〔前出の図 2(a), (b)の説明参照〕はペナルティ法により課した。なお図 4(a), (b)中の記号●は、半ユニットセル $\tilde{Y}$ を用いた本解析で χ_i^k および φ_i の節点値を零とした節点を示す。

なお、弾性解析であれば、解析領域を図 4(a), (b)に示した半ユニットセル $\tilde{Y}$ よりも小さく取ることができる⁽¹⁸⁾⁽¹⁹⁾。しかし、次節で述べる負荷条件のもとでの弾-粘塑性変形の増分解析では、ひずみ場および応力場が図 1 に示したようにセル中心に関して点対称となるため、少なくともユニットセルの半分を解析する必要がある(緒言参照)。

5.3 負荷条件 前報⁽¹²⁾と同じく次の 2 通りの負荷条件を考えた。

(1) 横方向負荷: この負荷では、繊維方向 (y_3 軸方向) には平面ひずみ条件を仮定し、 y_1 - y_2 面内で次式のように巨視的負荷を与えた。

$$\dot{E}_{\xi\xi}^* = 1, \quad \Sigma_{\xi\eta}^* = \Sigma_{\eta\eta}^* = 0, \quad E_{33}^* = E_{3\xi}^* = E_{3\eta}^* = 0 \quad (31)$$

ここで ξ および η は、 y_1 および y_2 座標軸を y_3 軸回りに角度 θ だけ回転した座標軸を示す〔図 5(a)〕。

(2) 非主軸負荷: 繊維方向から角度 φ だけ偏った ζ 軸の方向への巨視的単軸負荷であり、次式のように巨視的負荷履歴を規定した。

$$\dot{E}_{\zeta\zeta}^* = 1, \quad \Sigma_{\xi\xi}^* = \Sigma_{\xi\zeta}^* = 0, \quad \Sigma_{22}^* = \Sigma_{2\xi}^* = \Sigma_{2\zeta}^* = 0 \quad (32)$$

ここで ξ および ζ は、 y_1 および y_3 座標軸を y_2 軸回りに角度 φ だけ回転した座標軸である [図5(b)]。

5.4 解析結果 無次元巨視的相当応力 Σ_{eq}^* および無次元巨視的相当ひずみ E_{eq}^* を次式のように定義し、解析結果を示す。

$$\Sigma_{eq}^* = \left(\frac{3}{2} S_{ij}^* S_{ij}^* \right)^{1/2}, \quad E_{eq}^* = \left(\frac{2}{3} E_{ij}^* E_{ij}^* \right)^{1/2} \quad (33)$$

上式の S_{ij}^* は無次元巨視的応力 Σ_{ij}^* の偏差を表す。

Fig. 5. Loading direction; (a) transverse loading, (b) off-axial loading.

Fig. 6. Relation of nondimensional equivalent macro-stress and macro-strain under transverse loading; (a) square array, (b) hexagonal array.

解析は、まず横方向負荷の場合に実施した。この結果、 Σ_{eq}^* と E_{eq}^* の関係が正方配列および六方配列についてそれぞれ図6(a)および(b)のように得られた。また、半ユニットセル $\tilde{Y}$ の変形状態が、例えば $\theta = 45^\circ$ の場合に $E_{eq}^* = 20$ に達した時点で図7(a)および(b)のようになった。ただし、この変形状態は擾乱ひずみのみではなく巨視的ひずみも含んだものである。図6および図7に示した結果は、ユニットセル Y に基づく前報⁽¹²⁾の結果と一致しており、したがって内部分布がC-対称性を有する場合には解析領域として半ユニットセル $\tilde{Y}$ を取り得ることが数値例により確かめられた。なお、すでに前報⁽¹²⁾で議論したように、図6(a)および(b)に示す応力-ひずみ線図は正方配列の場合には異方性が著しいが、六方配列ではほとんど等方的である。

次に、非主軸負荷の解析を六方配列について行った。図8の実線は、この場合に本解析により得られた $\Sigma_{eq}^* - E_{eq}^*$ 曲線であり、ユニットセル Y に基づく前報⁽¹²⁾の結果と同じである。また図9(a)は、 $\tilde{Y}$ の $E_{eq}^* = 20$ での変形状態を $\varphi = 20^\circ$ の場合に示しており、これも前報⁽¹²⁾の結果 [図9(b)] に一致している。したがって、式(32)の非主軸負荷の場合にも解析領域として半ユニットセル $\tilde{Y}$ を実際に取り得ることがわかる。なお図8から、負荷方向が繊維方向から 10° ほど偏ると $\Sigma_{eq}^* - E_{eq}^*$ 曲線がかなり非線形となり、両方向の角度差 φ が 30° 程度以上になると $\Sigma_{eq}^* - E_{eq}^*$ 曲線はほとんど変わらなくなることがわかる。これは、例えばハイブリッド複合材料GLARE2の引張試験⁽²²⁾で見られる傾向と一致する。

計算時間は、両負荷の場合ともユニットセル Y に代

Fig. 7. Deformation of semiunit cell at $E_{eq}^* = 20$ under transverse loading of $\theta = 45^\circ$; (a) square array, (b) hexagonal array.

えて半ユニットセル $\tilde{Y}$ を採用することにより約1/8となった。これは、節点数がほぼ半分となり、しかも境界条件の関係で全体剛性マトリックスのバンド幅がほとんど小さくならないため、有限要素法の連立方程式を解くために必要な時間が未知数の3乗にほぼ比例して短縮されたことによる。

6. 結 言

本報では、構成相、微視的応力等の内部状態がユニットセル内でセル中心に関して点対称分布する場合の均質化理論の増分形式化について考えた。本報の結果は次のようにまとめられる。

Fig. 8. Relation of nondimensional equivalent macro-stress and macro-strain of hexagonal array under off-axis loading.

Fig. 9. Deformation of cell at $E_{eq}^*=20$ under off-axis loading of $\varphi=20^\circ$; (a) semiunit cell, (b) unit cell.

(1) 内部分布のセル中心に関する点対称性をY-周期性と組み合わせると、内部分布はセル境界面の中心に関しても点対称となることが示される。

(2) このとき擾乱変位速度は、セル中心およびセル境界面の中心に関して点対称分布し、これらの点では零となる。したがって半ユニットセルを、擾乱変位速度の境界条件としてこの点対称性あるいはY-周期性が成り立つように導入できる。

(3) 前報⁽¹⁾⁽²⁾で定式化した時間依存変形の均質化理論は、半ユニットセルを解析領域に取っても境界条件を除いて形が変わらない。

(4) 横方向負荷および非主軸負荷を受ける一方向連続繊維強化複合材料の弾-粘塑性変形を本理論により解析し、半ユニットセルを解析領域に取る定式化の妥当性を確かめた。

最後に、本研究の遂行に際して貴重なご意見をいただいた呉 旭 博士（応用地質（株））および寺田賢二郎 助教授（東北大学）に感謝するとともに、本研究の一部に対し文部省科学研究費〔基盤研究(B)(2), No.09450046〕の助成を受けたことを記し、謝意を表する。

参考文献

- (1) Babuska, I. (Glowinski, R. and Lions, J.L. 編), Computing Methods in Applied Sciences and Engineering, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No. 134 (1976), 137-153, Springer-Verlag, Berlin.
- (2) Sanchez-Palencia, E., Non-Homogeneous Media and Vibration Theory, Lecture Notes in Physics, No. 127 (1980), Springer-Verlag, Berlin.
- (3) Bakhvalov, N. and Panasenko, G., Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media, (1984), Kluwer Academic Pub., Dordrecht.
- (4) Guedes, J.M. and Kikuchi, N., Comput. Methods Appl. Mech. Eng., **83**-2 (1990), 143-198.
- (5) 高野直樹・座古勝, 材料, **46**-1 (1997), 97-102.
- (6) 大野信忠, 材料, **48**-7 (1999), 797-802.
- (7) 渋谷嗣, 機論, **62**-599, A (1996), 1665-1671.
- (8) Yi, Y.-O., Park, S.-H. and Youn, S.-K., Int. J. Solids Struct., **35**-17 (1998), 2039-2055.
- (9) Aravas, N., Cheng, C. and Ponte Castaneda, P., Int. J. Solids Struct., **32**-15 (1995), 2219-2244.
- (10) 呉旭・大野信忠, 機論, **63**-613, A (1997), 1971-1978.
- (11) Wu, X. and Ohno, N., Int. J. Solids Struct., **36**-33 (1999), 4991-5012.
- (12) Ohno, N., Wu, X. and Matsuda, T., Int. J. Mech. Sci., (in print).
- (13) Abeyaratne, R. and Triantafyllidis, N., ASME J. Appl. Mech., **51**-3 (1984), 481-486.
- (14) Agah-Tehrani, A., Mech. Mater., **8**-4 (1990), 255-268.
- (15) 寺田賢二郎・弓削康平・菊池昇, 機論, **61**-590, A (1995), 2199-2205.

- (16) 寺田賢二郎・弓削康平・菊池昇, 機論, **62**-601, A (1996), 2072-2079.
 - (17) 岡田裕・福井泰好・熊澤典良・丸山拓也, 機論, **64**-618, A (1998), 450-456.
 - (18) Suquet, P.M. (Sanchez-Palencia, E. and Zaoui, A. 編), Homogenization Techniques for Composite Media, Lecture Notes in Physics, No. 272 (1987), 193-278, Springer-Verlag, Berlin.
 - (19) Lene, F., Thèse de Doctorat d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, (1984).
 - (20) Kroupa, J.L. and Neu, R.W., Compos. Eng., **4**-9 (1994), 965-977.
 - (21) 野口裕久・清水映吾, 機論, **65**-630, A (1999), 225-231.
 - (22) 河井昌道・工田一貴・八戸敦司・川瀬裕子, 機論, **64**-627, A (1998), 2847-2855.
-