局所的不均質部を有する構造体の
グローバル/ローカルモデリング*高野直樹^{*1}, 座古 勝^{*1}, 石園 学^{*2}

Global/Local Modelling of Structures with Local Heterogeneity

Naoki TAKANO^{*3}, Masaru ZAKO and Manabu ISHIZONO^{*3} Osaka University, Dept. Manufacturing Science,
Yamada-oka 2-1, Suita, Osaka, 565-0871 Japan

For the numerical simulation of mechanical behaviors of structures with local heterogeneity, a global/local modelling technique using the finite element mesh superposition technique and shell-solid connection is proposed. Not only the global deformation but also three-dimensional stresses nearby the local heterogeneity can be analyzed precisely with less efforts than conventional methods. The finite element mesh superposition technique makes it possible to overlay local fine solid mesh which considers the local heterogeneity on global rough solid mesh which neglects the local heterogeneity. A plate structure that contains dissimilar material in a local portion is analyzed by the proposed modelling technique. The results agreed well with those calculated using the conventional three-dimensional fine mesh model.

Key Words: Computational Mechanics, Numerical Analysis, Finite Element Method, Global/Local Modelling, Heterogeneity

1. 緒 言

近年, 材料および構造体中の不均質性に注目した数値解析的な研究が盛んに行われている。計算手法の観点から不均質性を大きく分類すると, 図1に示すように大域的な不均質性と局所的な不均質性に分けられ, さらに大域的な不均質性は, 周期性を有するものとランダムなものに分けられる。ここで, 大域的な不均質性とは, 構造体の全体にミクロな不均質性が見られる場合を意味しており, そうした材料の典型例に複合材料が挙げられる。この場合には, ミクロな不均質性を均質化して等価なマクロモデルに置き換えるという研究が多く見られる。近年, 計算機の発達と均質化法^{(1)~(3)}の登場によって, 複合材料の繊維や分散粒子などのミクロ構造における応力が計算可能になってきた。著者ら^{(4)~(8)}も大域的で周期的な不均質性を有する繊維・編物複合材料を対象とし, 最小単位となる繊維と樹脂からなるミクロ構造と, 繊維束と樹脂からなるメゾ構造を考え, マクロ・メゾの連成解析を行って

きた。また, ランダムなミクロ構造配置を有する複合材料への均質化法の適用に関する研究も行われてきた⁽⁹⁾。

一方, 局所的な不均質性とは, 構造体の局所的なごく一部にのみ, 他の領域とは異なり, 不均質性が見られる場合を意味しており, 局所的不均質性の代表スケールは, 必ずしもミクロスケールには限らない。このような場合, 計算機が発達した今日においても, 直接的に有限要素モデルを作成することは実用性に欠け, コストパフォーマンスの良いモデリング手法や計算手法の開発が望まれる。均質化法に代表される従来のミクロ・マクロ局所解析では, マクロ構造を均質化され

Fig.1 Classification of heterogeneity

* 原稿受付 1999年3月18日。

^{*1} 正員, 大阪大学工学研究科 (〒565-0871 吹田市山田丘2-1)。^{*2} 大阪大学大学院。

E-mail: takano@mapse.eng.osaka-u.ac.jp

た単一の材料とみなしてきたため、マクロ構造のごく限られた局所領域に介在する異物や空孔欠陥などの局所的な不均質性を考慮することは不可能であった。もちろん、一般的には不均質部の周期性も仮定できず、等価材料に置き換えることもできない。き裂が周期的に配置していれば、文献⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾に見られるように均質化法の適用は容易である。局所的な不均質部としてき裂を取扱うための高性能有限要素の研究⁽¹²⁾があるが、より一般的な異物や空孔欠陥をも取扱える汎用数値解析法はない。そこで本研究は、局所的に不均質部を有する構造体の効率的な数値解析手法を提案するものである。

局所的に不均質性を有する構造体の挙動解析を行う場合、構造全体のグローバルな変形挙動だけでなく、その不均質部の近傍の三次元的な応力・ひずみ分布の把握が必要である。しかしながら、大規模な構造体中のごく限られた局所領域のモデル化を優先させると、構造全体を三次元要素で細かく分割しなければならないため、データ作成の手間と計算コストの点で実用上の問題がある。

そこで本研究では、局所的に細分化された有限要素メッシュが必要な局所的不均質部に対し、不均質部を詳細にモデル化した局所メッシュを粗い大域メッシュに節点の整合性を無視して重ね合わせるだけでモデル化することが可能な有限要素メッシュ重ね合わせ法を用いて詳細解析を行う。さらに、大形シェル構造体を

想定し、三次元的な応力・ひずみ分布の把握が必要な不均質部付近に対しては三次元ソリッド要素でモデル化を行うが、全体構造に対してはシェル要素でモデル化を行うシェル-ソリッド結合による有限要素モデリング手法を導入する。

2. 数値解析手法

2.1 メッシュ重ね合わせ法 図2に示すように、三次元弾性体領域 Ω とその境界 Γ を考え、境界 Γ_t に表面力が作用しているとする。領域 Ω 内に任意の局所領域 Ω^L ($\Omega^L \subset \Omega$) を考える。この局所領域には不均質部が含まれており、応力・ひずみこう配が大きい領域とする。領域 Ω は、 Ω^L と $\Omega^G (= \Omega \setminus \Omega^L)$ に分けられ、 Ω^G は均質材料よりなるとする(均質化された等価材料を含む)。 Ω^L の境界を Γ^L 、 Ω^G と Ω^L の境界を $\Gamma^{GL} [= \Gamma^L \setminus (\Gamma \cap \Gamma^L)]$ とそれぞれ定義する。全体構造の Ω では、粗い有限要素メッシュ(大域メッシュ)分割を行い、局所的不均質部付近 Ω^L では細かい有限要素メッシュ(局所メッシュ)分割を行う。互いのメッシュは独立であるとし、節点やメッシュパターンの整合性に関係なく、局所メッシュを大域メッシュに重ね合わせる。これにより、粗い大域メッシュではとらえることのできない局所的な不均質部の応力・ひずみ集中をとらえることを目指す。

このようなメッシュ重ね合わせの概念は Belytschko ら⁽¹³⁾ によって提案されており、以下の定式化は Fish ら^{(14)~(16)} によってアダプティブ有部要素法の一連の研究として hp 法を発展させた s 法と名付けられた手法に基づいている。

構造体の変位場を式(1)のように定義する。以後、右上添字の G, L はそれぞれ大域、局所領域を意味する。

$$\{u\} = \begin{cases} \{u^G\} & \text{on } \Omega^G \\ \{u^G\} + \{0\} & \text{on } \Gamma^{GL} \dots\dots\dots (1) \\ \{u^G\} + \{u^L\} & \text{on } \Omega^L \end{cases}$$

大域メッシュと局所メッシュの境界における変位の連続性から、式(2)を考えている。

$$\{u^L\} = \{0\} \text{ on } \Gamma^{GL} \dots\dots\dots (2)$$

大域・局所メッシュのそれぞれについて、要素内の変位を形状関数 $[N]$ と節点変位ベクトル $\{a\}$ を用いて式(3)、(4)のように補間する。

$$\{u^G\} = [N^G]\{a^G\} \text{ on } \Omega^G \dots\dots\dots (3)$$

$$\{u^L\} = [N^L]\{a^L\} \text{ on } \Omega^L \dots\dots\dots (4)$$

これにより、ひずみは変位-ひずみマトリックスを用いて式(5)のように表される。

Fig. 2 Definition of the problem domain for global/local modelling

$$\{\epsilon\} = \begin{cases} [B^G]\{a^G\} & \text{on } \Omega^G \\ [B^G]\{a^G\} + [B^L]\{a^L\} & \text{on } \Omega^L \end{cases} \dots\dots\dots (5)$$

上式を用い、大域メッシュ、局所メッシュの応力-ひずみマトリックスをそれぞれ $[D^G]$, $[D^L]$ とする。ここで $[D^L]$ は、異材から構成される不均質部を含む局所メッシュ要素ごとに材料種類に応じて定義されるものである。以上より、仮想仕事の原理式は次式のようになる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \setminus \Omega^L} ([B^G]\{\delta a^G\})^T [D^G] ([B^G]\{a^G\}) d\Omega \\ & + \int_{\Omega^L} ([B^G]\{\delta a^G\} + [B^L]\{\delta a^L\})^T \\ & \times [D^L] ([B^G]\{a^G\} + [B^L]\{a^L\}) d\Omega \\ & = \int_{\Gamma} ([N^G]\{\delta a^G\})^T \{t\} d\Gamma \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

式(6)を変形・整理すると、最終的に式(7)を得る。

$$\begin{bmatrix} [K^G] & [K^{GL}] \\ [K^{GL}]^T & [K^L] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{a^G\} \\ \{a^L\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f^G\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (7)$$

ここで $[K^G]$, $[K^L]$ はそれぞれ大域メッシュ、局所メッシュに対する剛性マトリックスであり、 $[K^{GL}]$ は両メッシュの相関を表す剛性マトリックスである。これらは具体的には式(8)から式(10)で表される。

$$\begin{aligned} [K^G] &= \int_{\Omega \setminus \Omega^L} [B^G]^T [D^G] [B^G] d\Omega \\ & + \int_{\Omega^L} [B^G]^T [D^L] [B^G] d\Omega \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

$$[K^L] = \int_{\Omega^L} [B^L]^T [D^L] [B^L] d\Omega \dots\dots\dots (9)$$

$$[K^{GL}] = \int_{\Omega^L} [B^G]^T [D^L] [B^L] d\Omega \dots\dots\dots (10)$$

式(8)から式(10)の計算の内、式(9)の $[K^L]$ は従来の有限要素法と同様に計算することが可能であるが、その他の積分の計算について考察する。まず、式(10)の $[K^{GL}]$ の計算については、ガウス積分を用いてそれぞれの局所メッシュ要素ごとに剛性マトリックスを作成し、合成する。このとき局所メッシュ要素上のガウス積分点を使うが、これは局所メッシュ要素の正規化座標系で表されているため、このままでは $[B^G]$ を直接求めることはできない。そこで、局所メッシュ要素の積分点の座標値を物理座標系に座標変換した後、大域メッシュ要素の正規化座標系に変換を行い、 $[B^G]$ を計算する。この物理座標系から大域メッシュ要素の正規化座標系への座標変換は、陽に表すことができないため、Newton Raphson 法と黄金分割法により探索を行う。次に、式(8)の $[K^G]$ の計算については、次の三とおりに分けて考える必要がある。第一は、大域メッシュ要素が Ω^L を含まない場合、第二、第三はそれぞれ、大域メッシュ要素の一部に Ω^L が含

まれる場合と、大域メッシュ要素の全体が Ω^L に含まれる場合である。第一の場合は、従来の有限要素法と同様に計算することが可能であるが、第二、第三の場合については、積分の計算に留意が必要である。この積分に関しては3章の解析例で詳しく述べる。

なお、従来多用されていたズームング法では、まず粗いメッシュで解析を行い、その結果を境界条件として詳細部の解析を逐次的に行う。この手法は比較的容易に解析が可能であるが、前後の解析が独立しており、局所メッシュを解く際の境界条件を変位形にするか応力形にするかによって解が異なるという問題点があった。また、ズームング法では大域メッシュの要素分割の仕方によって解析精度が大きく左右されるといった報告⁽¹⁷⁾⁽¹⁸⁾もある。提案する手法では、大域メッシュと局所メッシュの相関を $[K^{GL}]$ という形で定式化に含めており、両メッシュについて同時に解くため、ズームング法に優る手法といえる。

次に剛性方程式の求解について述べる。式(7)のように、剛性マトリックスがブロックに分かれていることを利用し、Fish ら^{(14)~(16)}の s 法と同様に、以下の手順でコレスキー分解 $([L][L]^T \text{ 分解})$ する。まず、式(7)の剛性マトリックスが式(11)の下三角マトリックス $[L]$ を用いてコレスキー分解できるとする。

$$[L] = \begin{bmatrix} [L_0] & [0] \\ [M]^T & [L_1] \end{bmatrix} \dots\dots\dots (11)$$

これより、次式が成り立つことになり、式(11)中の下三角マトリックス $[L_0]$ が計算される。

$$[K^G] = [L_0][L_0]^T \dots\dots\dots (12)$$

次に、式(11)中のマトリックス $[M]$ が次式より計算される。

$$[M] = [L_0]^{-1} [K^{GL}] \dots\dots\dots (13)$$

最後に、 $[L_1]$ は次式の左辺をコレスキー分解することにより得られる。

$$[K^L] - [M]^T [M] = [L_1][L_1]^T \dots\dots\dots (14)$$

なお、局所領域 Ω^L に不均質性がない場合、すなわち $[D^G] = [D^L]$ の場合は、切欠きを有する平板の引張問題⁽⁵⁾⁽⁷⁾ やリブ付構造パネルの問題⁽⁶⁾⁽⁸⁾ を解き手法の妥当性を確認済みである。この場合には、メッシュ重ね合わせ法を単なる要素細分割のための便利な手法として用いていた。こうした用途は近年注目されつつある⁽¹⁷⁾⁽¹⁸⁾。一方、本論文では前述のように $[D^G] \neq [D^L]$ という一般的な場合の定式化を示し、本手法が局所的に不均質部を有する構造体へも適用可能であることを示す。

2.2 シェル-ソリッド結合 板・シェル構造体を対象とする場合においても、局所的不均質部の評価に

は三次元応力場の把握が必要になるため、三次元ソリッド要素でモデル化を行う。しかし、三次元ソリッド要素を用いて板・シェル構造体をモデル化するのは、要素のアスペクト比の増大による精度低下の問題もあり、シェル要素を用いてモデル化を行いグローバルな変形挙動を把握するのが適当である。そこで、シェル-ソリッド遷移要素を用いてシェル要素とソリッド要素間を結合する。

ソリッド要素, シェル要素として, 8 節点六面体ソリッド要素と 4 節点四辺形要素を用いることにすると, 図 3 に示す 6 節点シェル-ソリッド遷移要素を用いればよい。\$\eta=-1\$ 面はソリッド要素の 6 面すべてに接続することができ, \$\eta=+1\$ 面は, シェル要素と接続することができる。このような遷移要素を用いて異なる要素間を結合する考えは Bathe⁽¹⁹⁾ によって精力的な研究がなされた。本研究で用いた以下の定式化は, Surana⁽²⁰⁾ の定式化に従っており, よってその概略のみを示すことにする。

形状関数を \$N\$ とすれば, 6 節点遷移要素内の任意の点の座標は, 節点座標を用いて以下のように表される。

Table 1 Mechanical properties

	W	Cu
Young's modulus(GPa)	280	140
Poisson's ratio	0.3	0.3

Fig. 3 6-node shell-solid transition element

Fig. 4 Plate structure that contains dissimilar material in a local portion

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^4 N_j(\xi, \eta, \zeta) \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{Bmatrix} + \sum_{j=5}^6 N_j(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{Bmatrix} + \sum_{j=5}^6 N_j(\xi, \eta) \frac{\zeta}{2} V_{3j} \dots \dots \dots (15)$$

変位は, 次式で表される。

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^4 N_j(\xi, \eta, \zeta) \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \end{Bmatrix} + \sum_{j=5}^6 N_j(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \end{Bmatrix} + \sum_{j=5}^6 N_j(\xi, \eta) \frac{\zeta}{2} h [v_{1j}, -v_{2j}] \begin{Bmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (16)$$

ここで \$[u_j, v_j, w_j]^T\$ は, ソリッドタイプの節点 \$J(1 \leq J \leq 4)\$ の節点自由度, \$[u_j, v_j, w_j, \alpha_j, \beta_j]^T\$ は, シェルタイプの節点 \$J(J=5, 6)\$ の節点自由度である。ベクトル \$V_{3j}\$ は節点 \$J(J=5, 6)\$ での中央面に対する法線ベクトルであり, その大きさ \$|V_{3j}|\$ は, 要素の厚さ \$h\$ に等しく \$|V_{3j}|=h\$ である。\$v_{1j}, v_{2j}\$ は, \$V_{3j}\$ に垂直で互いに直交する二つの単位ベクトルで, \$\alpha_j, \beta_j\$ はそれぞれ \$v_{2j}, v_{1j}\$ まわりの微小回転角である。

3. 解析例

図 4 のように局所的に異材が含まれている平板を想定する。引張負荷を受けた場合に平板中に含まれる異材近傍の応力・ひずみを精度よく解析することを目的とする。本解析では, タングステン(W)平板に銅(Cu)が含まれているとした。W と Cu の物性値を表 1 に示す。

(a) Shell-solid connection and local mesh superposition

(b) Cross section nearby the dissimilar material

Fig. 5 Finite element model

図5に示す境界条件の引張り解析を行う。提案するグローバル/ローカルモデリングによる有限要素モデルは図5のようになる。全体構造に対しては、シェル要素を用いてモデル化を行い、グローバルな変形挙動を把握する。局所的不均質部の評価には詳細な三次元応力場の把握が必要になるため、三次元ソリッド要素でモデル化を行う。さらに、メッシュ重ね合わせ法を用いて、平板中に含まれる異材近傍を詳細にモデル化した局所メッシュを図5のように重ね合わせ、詳細解析を行う。

解析規模は、総要素数 333、総節点数 527 である。この内、局所メッシュの要素数は 216、節点数は 343 であり、詳細な応力評価が必要な不均質部近傍に重点的に自由度を多く取っている。

前述の式(8)の計算方法に関し、大域メッシュ要素の一部に Ω^L が含まれる場合と、大域メッシュ要素の全体が Ω^L に含まれる場合についてまとめて述べる。ここで便宜上、式(8)で $[D^G]$ と $[D^L]$ と区別してい

た応力-ひずみマトリックスを単に $[D]$ と書くことにすれば、 $[D]$ の扱いには次の三とおりが考えられる。第一は、大域メッシュ要素の積分点における $[D]$ を用いる、つまり大域メッシュ要素の積分点に局所メッシュ要素が存在する場合に $[D]=[D^L]$ とし、その他の場合は $[D]=[D^G]$ とする手法である。この手法は、今回のような比較的単純なモデルには適用可能であると考えられるが、今後、複雑な局所的不均質性を扱う場合には大域メッシュの分割の仕方の影響を強く受けるため、望ましくない。第二は、複合則などを用いて局所的不均質の影響を簡易な等価モデルとして $[D]$ に反映させる手法である。第三は、大域メッシュでは局所的不均質部を無視して $[D]=[D^G]$ とする手法である。第二、第三の両手法により本例題を解析し、精度比較を行った結果、両者には有為差がなかった。モ

(a) X-displacement normalized by those calculated using the 3-dimensional fine mesh model

(b) Calculation points of X-displacement

Fig. 6 Nodal displacements nearby the local heterogeneity

Fig. 7 Conventional fine mesh

(a) Superimposed local mesh

(b) Conventional fine mesh

Fig. 8 Distribution of X-strain

(a) Superimposed local mesh

(b) Conventional fine mesh

Fig. 9 Distribution of ZX-strain

Table 2 Comparison of strains

	ϵ_x	ϵ_y	ϵ_z	γ_{xy}	γ_{yz}	γ_{zx}
Proposed	3.90×10^{-3}	-1.10×10^{-3}	-1.12×10^{-3}	-0.11×10^{-3}	0.01×10^{-3}	-0.27×10^{-3}
Conventional fine mesh	4.02×10^{-3}	-1.13×10^{-3}	-1.23×10^{-3}	-0.14×10^{-3}	0.02×10^{-3}	-0.25×10^{-3}

Fig. 10 Comparison of stress and strain at the center element

デリングを容易にするという観点から考えると第三の手法が望ましく、今後、例えばき裂のような局所的不均質部を扱う際に、き裂を無視した大域メッシュに、き裂をモデル化した局所メッシュを重ね合わせるといった適用も考えられる。したがって、今回の解析例では、第三の手法を用いて計算を行った結果を以下に述べる。第二、第三の手法のどちらを用いるかについては、他の例題に対しても検討を行う必要がある。

まず、局所的不均質部近傍の X 方向節点変位を図 6 に示す。図 6 には、提案するグローバル/ローカルモデリングによる解析結果を、図 7 に示す全体を細かく分割した従来の有限要素メッシュによる詳細解析結果で正規化した値を示す。提案するグローバル/ローカルモデリングによる解析結果と、従来の細かいメッシュによる解析結果との相対誤差はわずか 0.4% 以内である。

なお、最大変位は、メッシュ重ね合わせ法とシェルソリッド結合を用いた本手法による結果が 0.3559 mm であるのに対し、従来の詳細な解析による結果が 0.3557 mm とほぼ等しく、グローバルな変形挙動も精度よく把握できていることがわかる。

次に、不均質部近傍のひずみ分布 (X 方向垂直ひずみ, ZX せん断ひずみ) を図 8, 9 に示す。図 8, 9 には、提案するグローバル/ローカルモデリングによる解析結果と全体を細かく分割した図 7 の有限要素メッシュ

による詳細結果の比較を示す。図 8, 9 からわかるように、提案するグローバル/ローカルモデリングによる手法による解析結果は、全体を細かく分割した従来の有限要素メッシュによる詳細解析結果とよく一致している。これを定量的に示すため、一例として異材の要素におけるひずみ値を表 2 に示す。なお、応力も同様によく一致していた。

また、前報⁽⁸⁾ではメッシュ重ね合わせ法において、大域ソリッドメッシュと局所ソリッドメッシュの要素サイズのギャップについて考察したが、本論文では平板と異材の物性値のミスマッチについて考察する。上記の例では平板のヤング率 E_1 と異材のヤング率 E_2 の比が表 1 のように 2:1 の場合を考えたが、この物性値(ヤング率)の差を仮想的に変化させた場合のひずみ・応力の解析結果の比較を図 10 に示す。図 10 の縦軸は、異材の要素におけるひずみ・応力の値を図 7 の詳細メッシュによる解析結果で正規化した値である。物性値の差を仮想的に変化させた場合のひずみ値・応力値の相対誤差はただか 4% 程度であることがわかる。ヤング率の比が 10 000:1 という例は、空孔欠陥のような場合への適用可能性を示唆している。

4. 結 言

本論文では、メッシュ重ね合わせ法とシェルソリッド結合を組合わせたグローバル/ローカルモデリングを提案し、局所的に不均質部を有する構造体を容易に、かつ精度よくモデリングするための手法を提案した。局所的に異材が混合された平板を例に取り上げ、メッシュ重ね合わせ法とシェルソリッド結合を組合わせた提案モデリング手法による解析結果を示し、詳細なソリッドモデルによる解析結果と比較することにより精度検証を行った。提案手法は、局所的不均質部の応力評価を目的とした場合、従来法に比べてデータ作成の手間が少なく精度よい解析結果が得られることから、種々の構造体の数値解析に有効であると考えられる。

さらに均質化法と組合わせることにより、前報^{(4)~(8)}で扱った大域的不均質性と、本報で取扱った局所的不均質性が混在するような複合材料構造体への適用が可

能となる。

文 献

- (1) Lions, J. L., *Some methods in the mathematical analysis of systems and their control*, (1981), 1, Science Press.
- (2) Sanchez-Palencia, E., *Non-homogeneous media and vibration theory*, (1980), 45, Springer-Verlag.
- (3) Guedes, J. M. and Kikuchi, N., *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **83**(1990), 143-198.
- (4) 高野直樹・ほか3名, 機論, **63**-608, A(1997), 808-814.
- (5) 高野直樹・ほか2名, 第47回応用力学連合講演会講演予稿集, (1998-1), 407-408.
- (6) 高野直樹・座古勝, 日本機械学会材料力学部門講演会講演論文集, No. 98-5, B(1998-10), 165-166.
- (7) Takano, N., ほか3名, *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, **7**(1999), 207-231.
- (8) 高野直樹・ほか3名, 機論, **65**-631, A(1999), 498-505.
- (9) 寺田賢二郎・菊池昇, 機論, **64**-617, A(1998), 170-177.
- (10) 京谷孝史・ほか2名, 第41回日本学術会議材料研究連合講演会前刷集, (1997-9), 30-31.
- (11) 中谷彰宏・ほか2名, 機論, **64**-628, A(1998), 7-12.
- (12) 永井学志・ほか2名, 第48回理論応用力学講演会講演論文集, (1999-1), 377-378.
- (13) Belytschko, T., ほか2名, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **81**(1990), 71-89.
- (14) Fish, J., *Comput. & Struct.*, **43**-3(1992), 539-547.
- (15) Fish, J., ほか3名, *Appl. Num. Math.*, **14**(1994), 135-164.
- (16) Fish, J. and Guttal, R., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **39**(1996), 3641-3662.
- (17) 鈴木克幸・ほか3名, 第48回理論応用力学講演会講演論文集, (1999-1), 379-380.
- (18) 白石卓士郎・ほか3名, 第48回理論応用力学講演会講演論文集, (1999-1), 381-382.
- (19) Bathe, K. J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, (1982), 234-260, Prentice-Hall.
- (20) Surana, K. S., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **15**(1980), 991-1020.