母材クリープを有する一方向繊維強化複合材の
繊維応力分布解析に対する変分法*大野 信 忠^{*1}, 安 藤 隆 章^{*2}
三 宅 卓 志^{*3}, 琵琶 志 朗^{*1}A Variational Method for Analysis of Fiber Stress Profiles
in Unidirectional Composites with Matrix CreepNobutada OHNO^{**}, Takaaki ANDO,
Takushi MIYAKE and Shiro BIWA^{**} Nagoya University, Dept. of Micro System Engineering,
Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya, Aichi, 464-8603 Japan

In this paper, a variational method is developed for analyzing the matrix creep induced change of fiber stress profiles in unidirectional composites. A functional of admissible profiles of fiber stress is first presented by supposing a broken fiber in matrix as well as a fiber pulled out from matrix. The functional is shown to have the stationary function satisfying a rate-type differential equation based on a shear lag theory. Then, the stationary function is determined approximately at every moment by assuming bilinear profiles of fiber stress and a power law of matrix creep, leading to an analytical solution for the time-dependent increase of a stress transfer length. The analytical solution is compared with finite difference computations based on the shear lag model and with an experiment performed by the present authors using a single carbon fiber/acryl model composite. Thus, the effects of matrix creep, matrix shear rigidity, and interfacial slip on the stress transfer length are discussed, and it is shown that the solution has a good agreement with the experiment if interfacial slip is taken into account.

Key Words: Composite Material, Creep, Variational Method, Shear Lag Theory, Stress Transfer Length

1. 緒 言

一方向連続繊維強化複合材料における破断繊維では、破断面からの距離とともに軸方向応力が零から未破断繊維の応力へと変化する。破断繊維内で軸方向応力がこのように過渡的に変化する部分の長さは応力伝達長さと呼ばれ、一方向連続繊維強化複合材料の強度評価上極めて重要である。母材にクリープが生じるとき、複合材に作用する負荷応力が一定であっても応力伝達長さは時間とともに増加するため、複合材料の時間依存破断が生じ得る。したがって、母材クリープに起因する応力伝達長さの時間変化の評価は重要な研究課題であるから、すでに解析解が次に述べるように基礎的な場合に検討されている。

まず Lifshitz-Rotem⁽¹⁾は、界面での完全接着と母材の線形粘弾性を仮定し、ラプラス変換を利用することにより応力伝達長さの時間変化を求めた。彼らは逆ラプラス変換の段階で近似を導入したが、その知見はほぼ

成立することが Lagoudas ら⁽²⁾の数値解析により確かめられている。次に Mason ら⁽³⁾は、同じく界面での完全接着を仮定し、2次元平板モデルではあるが、母材のせん断クリープがべき乗則で表される場合に厳密解を得た。ただしこの厳密解では、母材の弾性変形は無視されている。このほか界面での初期すべりを考慮した数値解析が Du-McMeeking⁽⁴⁾により行われ、それに基づく近似解も報告された⁽⁵⁾⁽⁶⁾。また Ohno-Miyake⁽⁷⁾は、エネルギーの釣合いに着目し、応力伝達長さの時間変化を解析的に評価した。なお実験的検討は、最近、著者ら⁽⁸⁾⁽⁹⁾がレーザラマン法により行っている。

上に述べた解析解のほとんどはシアラグ理論に基づく微分方程式を解いて求められたが、もしこの方程式に対応する汎関数がわかれば変分法を利用できる。変分法は、解を近似的にある形に仮定できる場合に特に有効である。すなわち変分法では、仮定した解の未定係数を汎関数の停留条件より定めることのできるから、近似解が仮定した解の形の範囲で合理的に求められる。しかし、長繊維強化複合材料の弾-クリープ問題に対する変分法の適用は報告されていない。

そこで本研究では、変分法により、軸対称モデルで母材が弾性変形とともにクリープを示す場合の応力伝達長さを解析的に評価する。このためまず、弾-クリ

* 原稿受付 1999年6月17日。

^{*1} 正員, 名古屋大学 (☎ 464-8603 名古屋市中種区不老町)。^{*2} (株)デンソーアイテック (☎ 450-0003 名古屋市中村区名駅南1-27-2)。^{*3} 正員, 名古屋工業研究所 (☎ 456-0058 名古屋市中村区六番3-4-41)。

E-mail: ohno@mech.nagoya-u.ac.jp

ープを示す母材に弾性繊維が埋め込まれた軸対称モデルを考え、繊維応力分布を許容関数とする汎関数を提示するとともに、その停留関数はシアラグ理論による微分方程式の解であることを示す。次に、提示した汎関数に繊維応力の二直線分布と母材クリープのべき乗式を代入し、応力伝達長さの時間変化に関する近似解析解を導く。つづいて、この解の数値例および差分解析との比較を示し、解の妥当性および母材せん断剛性の影響を調べる。さらに、著者らのレーザラマン試験結果の一つ⁽⁹⁾を本解析解に基づいて検討し、繊維／マトリックス界面での初期すべりおよび母材の遷移クリープ特性の効果を明らかにする。

2. 軸対称モデルおよびシアラグ方程式

最初に、本論文で考える軸対称モデルおよびシアラグ方程式について述べる。

半径 r_f の連続繊維により一方向強化された複合材料内で繊維破断が生じていることを想定し、図1に示すように破断繊維が母材に埋め込まれた軸対称セル（長さ 2ℓ 、半径 R ）を考える。このセルの外周は未破断繊維に接しているとし、従来の研究⁽¹⁾⁽⁴⁾と同じくセル外周および軸端では軸方向に一樣ひずみ $\varepsilon_0(t)$ が生じていると仮定する。すなわち、

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \varepsilon_0(t) \text{ at } r = R \quad \cdots (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \varepsilon_0(t) \text{ at } z = \pm \ell \quad \cdots (2)$$

ここで、 u はセル中の軸方向変位、 r と z は半径方向座標と軸方向座標、また t は時間を示す。

シアラグ理論⁽¹⁰⁾を用いると、繊維は1次元の棒とみなされるから、本研究では繊維の軸方向変位 u_f は z と t の関数となる。このとき、繊維の変形に対して Hooke の法則を仮定すれば、その軸方向変形に関して式

$$\frac{\partial u_f}{\partial z} = \sigma_f / E_f \quad \cdots (3)$$

が成り立つ。ここで、 σ_f と E_f はそれぞれ繊維の軸方向応力およびヤング率を示す。

Fig. 1 Axisymmetric cell consisting of broken fiber and elastic-creeping matrix subjected to overall strain $\varepsilon_0(t)$

シアラグ理論ではさらに、母材のせん断変形のみが σ_f の軸方向分布に影響すると仮定される⁽¹⁰⁾。これは、繊維／母材界面の軸方向せん断応力を τ_i とすると、釣合式

$$\tau_i = -\frac{r_f}{2} \frac{\partial \sigma_f}{\partial z} \quad \cdots (4)$$

が成り立つため σ_f の軸方向勾配が τ_i と比例関係にあり、しかも τ_i は主に母材のせん断変形に依存すると考えられるからである。なお今後、 σ_f と τ_i をそれぞれ単に繊維応力および界面せん断応力と呼ぶことにする。

母材において弾性変形に加えてクリープが生じる場合、母材のせん断ひずみ速度 $\dot{\gamma}_m$ は

$$\dot{\gamma}_m = \dot{\tau}_m / G_m + \dot{\gamma}_m^c \quad \cdots (5)$$

と表される。ここで、 $(\dot{})$ は時間 t に関する微分、 τ_m と G_m は母材のせん断応力と剛性率、また $\dot{\gamma}_m^c$ は母材のせん断クリープひずみ速度を示す。図1に示した軸対称モデルでは $\dot{\gamma}_m = \partial \dot{u} / \partial r$ が成り立つと考えてよいから、上式より次式が導かれる。

$$\dot{u}_R - \dot{u}_f = \int_{r_f}^R (\dot{\tau}_m / G_m + \dot{\gamma}_m^c) dr \quad \cdots (6)$$

ここで u_R は、セル外周での軸方向変位を示す。

繊維体積率が大きく R と r_f の差が小さければ、上式において τ_m の半径方向への変化は無視できる。しかし本研究では、 $R \gg r_f$ の場合も考えるから、 τ_m の半径方向への変化を考慮する。このため、修正シアラグ理論⁽¹¹⁾⁽¹²⁾に基づいて母材せん断応力の自己釣合式

$$r \tau_m = r_f \tau_i \quad \cdots (7)$$

を仮定する。このとき、式(6)は

$$\dot{u}_R - \dot{u}_f = \ln \frac{R}{r_f} \cdot \frac{r_f \dot{\tau}_i}{G_m} + \int_{r_f}^R \dot{\gamma}_m^c dr \quad \cdots (8)$$

となる。上式に式(4)を代入した後に z で微分し、さらに式(1)と(3)を用いると、次のシアラグ方程式が導かれる。

$$\frac{r_f^2}{2G_m} \ln \frac{R}{r_f} \cdot \frac{\partial^2 \dot{\sigma}_f}{\partial z^2} - \frac{\dot{\sigma}_f}{E_f} - \int_{r_f}^R \frac{\partial \dot{\gamma}_m^c}{\partial z} dr + \dot{\varepsilon}_0(t) = 0 \quad \cdots (9)$$

この方程式の境界条件は、

$$\sigma_f(0, t) = 0 \quad \cdots (10)$$

$$\sigma_f(\pm \ell, t) = E_f \varepsilon_0(t) \quad \cdots (11)$$

である。

図1に示した軸対称モデルに代えて図2のような繊維引抜きモデルを考えても、シアラグ方程式(9)がそのまま成り立つことは明らかである。ただし、図中のハッチング部分は剛体と仮定するから、このモデルでは式(9)において

Fig. 2 Axisymmetric model for pull-out of fiber embedded in elastic-creeping matrix

$$\varepsilon_0(t) = 0 \quad (12)$$

とする必要がある。また、繊維応力の境界条件は、繊維端で繊維に作用する応力を $\sigma_0(t)$ とすると (図 2),

$$\sigma_f(0, t) = \sigma_0(t) \quad (13)$$

$$\sigma_f(l, t) = 0 \quad (14)$$

と与えられる。繊維引抜きモデルでは、母材中の応力成分としてはせん断応力が支配的であるから、シアラグ理論の仮定がより精度よく成り立つと考えられる。

なお、母材が弾性変形のみを示す場合のシアラグ方程式は、図 1 および図 2 のどちらのモデルでも次式となる。

$$\frac{r_f^2}{2G_m} \ln \frac{R}{r_f} \cdot \frac{d^2 \sigma_f}{dz^2} - \frac{\sigma_f}{E_f} + \varepsilon_0 = 0 \quad (15)$$

3. 汎関数および停留関数

シアラグモデルでは、2 章で述べたように、母材のせん断変形のみが繊維応力の分布に影響すると仮定される。そこで、母材中の軸方向垂直応力を無視した次の補足エネルギー関数を考える。

$$U = \pi r_f^2 \int_0^l \frac{\dot{\sigma}_f^2}{2E_f} dz + 2\pi \int_0^l \int_{r_f}^R \left(\frac{\dot{\tau}_m^2}{2G_m} + \dot{\tau}_m \dot{\gamma}_m^c \right) r dr dz - 2\pi R \int_0^l \dot{\tau}_R \dot{\varepsilon}_0 z dz \quad (16)$$

ここで、 τ_R は $r = R$ での τ_m を示す。上式の右辺第一項は繊維の弾性ひずみエネルギーに、また第二項は母材のせん断変形による弾性ひずみエネルギーとクリープエネルギー散逸に対応する。さらに第三項は、 $r = R$ での一様ひずみ $\varepsilon_0(t)$ による補足エネルギーの変化として解釈できる。

式(4)と(7)により、 τ_m は次式のように表される。

$$\tau_m(r, z, t) = -\frac{r_f^2}{2r} \frac{\partial \sigma_f(z, t)}{\partial z} \quad (17)$$

したがって、式(16)は

$$U[\dot{\sigma}_f(z, t)] = \pi r_f^2 \int_0^l F(z, \dot{\sigma}_f, \dot{\sigma}_f') dz \quad (18)$$

となる。ここで、

$$F = \frac{\dot{\sigma}_f^2}{2E_f} + \frac{r_f^2}{4G_m} \ln \frac{R}{r_f} \cdot \dot{\sigma}_f'^2 - \dot{\sigma}_f' \int_{r_f}^R \dot{\gamma}_m^c dr + \dot{\sigma}_f' \dot{\varepsilon}_0 z \quad (19)$$

であり、 σ_f' は次式のように定義される。

$$\sigma_f' = \partial \sigma_f / \partial z \quad (20)$$

この結果、補足エネルギー関数 U は繊維応力 σ_f の許容速度分布 $\dot{\sigma}_f(z, t)$ の汎関数となった。ただし、この速度分布は次の境界条件を満たすとする。

$$\dot{\sigma}_f(0, t) = \dot{\sigma}_0(t) \quad (21)$$

$$\dot{\sigma}_f(l, t) = E_f \dot{\varepsilon}_0(t) \quad (22)$$

ここで、図 1 の繊維破断モデルでは $\sigma_0(t) = 0$ 、また図 2 の繊維引抜きモデルでは $\varepsilon_0(t) = 0$ である。

上述の汎関数の停留関数は、よく知られているように、オイラーの方程式

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{\sigma}_f} - \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\sigma}_f'} \right) = 0 \quad (23)$$

の解となる。式(19)を上式に代入すると、

$$\frac{\dot{\sigma}_f}{E_f} - \frac{r_f^2}{2G_m} \ln \frac{R}{r_f} \cdot \frac{\partial^2 \dot{\sigma}_f}{\partial z^2} + \int_{r_f}^R \frac{\partial \dot{\gamma}_m^c}{\partial z} dr - \dot{\varepsilon}_0(t) = 0 \quad (24)$$

となる。この方程式はシアラグ方程式(9)にほかならないから、式(18)と(19)により与えられる汎関数の停留関数を求めることはシアラグ方程式(9)を解くことと等価となる。

なお、母材に弾性変形のみが生じる場合には、補足エネルギー関数として次式を考える。

$$U = \pi r_f^2 \int_0^l \frac{\sigma_f^2}{2E_f} dz + 2\pi \int_0^l \int_{r_f}^R \frac{\tau_m^2}{2G_m} r dr dz - 2\pi R \int_0^l \tau_R \varepsilon_0 z dz \quad (25)$$

このとき、式(17)と(20)を用いると汎関数は

$$U[\sigma_f(z)] = \pi r_f^2 \int_0^l F(z, \sigma_f, \sigma_f') dz \quad (26)$$

$$F = \frac{\sigma_f^2}{2E_f} + \frac{r_f^2}{4G_m} \ln \frac{R}{r_f} \cdot \sigma_f'^2 + \sigma_f' \varepsilon_0 z \quad (27)$$

と表され、そのオイラーの方程式を求めると微分方程式(15)となることが示される。

4. 近似解析解の導出

繊維破断モデル (図 1) および繊維引抜きモデル (図 2) における繊維応力分布の概略を図 3 に実線で示す。

Fig. 3 Schematic illustration of fiber stress profile

この分布を最も単純に近似すると、図3に破線で示すような二直線分布となる。そこで、二直線近似の範囲で3章の汎関数の停留関数を求め、繊維応力分布の時間変化を近似的に解くことにする。なお以下では、5章で述べる実験結果との比較の便宜上、繊維引抜きモデルの場合に解を求めるが、求められた解は繊維破断モデルに対しても成り立つ。

繊維引抜きモデルにおいて作用応力 σ_0 が一定の場合を考え、 σ_f の軸方向分布を次式のように二直線近似する。

$$\sigma_f(z, t) = \begin{cases} \sigma_0[1 - z/a(t)], & 0 \leq z \leq a \\ 0, & a \leq z \leq \ell \end{cases} \quad (28)$$

ここで $a(t)$ は応力伝達長さを示す。このとき $\dot{\sigma}_f$ の分布は

$$\dot{\sigma}_f(z, t) = \begin{cases} -\sigma_0 \dot{a}(t)/a^2, & 0 \leq z \leq a \\ 0, & a \leq z \leq \ell \end{cases} \quad (29)$$

と表される。上式を式(19)に代入すると、式(18)の汎関数 U は

$$U = \frac{\pi r_f^2 \sigma_0}{a} \left[\sigma_0 \dot{a}^2 \left(\frac{1}{6E_f} + \frac{r_f^2}{4G_m a^2} \ln \frac{R}{r_f} \right) - \dot{a} \int_{r_f}^R \dot{\gamma}_m^c dr \right] \quad (30)$$

となる。この問題では応力伝達長さが時間とともに変化するから、その時間変化率 $\dot{a}$ を、汎関数が各瞬間で停留するように決める。すなわち、

$$\partial U / \partial \dot{a} = 0 \quad (31)$$

この結果、 $\dot{a}$ は次式のように決まる。

$$\dot{a} = \frac{\int_{r_f}^R \dot{\gamma}_m^c dr}{\sigma_0 \left(\frac{1}{3E_f} + \frac{r_f^2}{2G_m a^2} \ln \frac{R}{r_f} \right)} \quad (32)$$

上式を時間に関して積分すれば、応力伝達長さの時間変化 $a(t)$ が求められる。

繊維引抜きモデルの母材ではせん断応力が支配的であるから、 $\dot{\gamma}_m^c$ は簡単に

$$\dot{\gamma}_m^c = B |\tau_m|^{n-1} \tau_m \quad (33)$$

と書けるとする。ここで、 B と n はクリープ定数である。上式は、式(17)と(28)を用いると

$$\dot{\gamma}_m^c = B \left(\frac{r_f^2 \sigma_0}{2ar} \right)^n \quad (34)$$

となる。したがって、式(32)より

$$\left(\frac{a^n}{3E_f} + \frac{r_f^2 a^{n-2}}{2G_m} \ln \frac{R}{r_f} \right) \dot{a} = \frac{B r_f^{2n} \sigma_0^{n-1}}{2^n} \int_{r_f}^R \frac{dr}{r^n} \quad (35)$$

となるから、次の解析解が得られる。

$$\frac{a(t)^2 - a(0)^2}{3E_f} + \frac{r_f^2}{G_m} \ln \frac{R}{r_f} \ln \frac{a(t)}{a(0)} = B r_f^2 \ln \frac{R}{r_f} \cdot t, \quad n=1 \quad (36a)$$

$$\frac{a(t)^{n+1} - a(0)^{n+1}}{3(n+1)E_f} + \frac{r_f^2 \ln(R/r_f)[a(t)^{n-1} - a(0)^{n-1}]}{2(n-1)G_m} = \frac{B r_f^{n+1} \sigma_0^{n-1}}{2^n(n-1)} \left[1 - \left(\frac{r_f}{R} \right)^{n-1} \right] t, \quad n \neq 1 \quad (36b)$$

上に述べた解の初期値 $a(0)$ は、弾性汎関数より求められる。すなわち、式(28)を式(26)および(27)に代入すると、

$$U = \pi r_f^2 \sigma_0^2 \left(\frac{a}{6E_f} + \frac{r_f^2}{4G_m a} \ln \frac{R}{r_f} \right) \quad (37)$$

となる。したがって、停留条件

$$dU/da = 0 \quad (38)$$

より、 $a(0)$ は次式のように求められる。

$$a(0) = r_f \sqrt{\frac{3E_f}{2G_m} \ln \frac{R}{r_f}} \quad (39)$$

上で導いた解は、繊維破断モデルで ε_0 が一定の場合にも適用できる。すなわちこの場合、繊維応力の二直線分布は、 $0 \leq z \leq \ell$ の部分を考えれば

$$\sigma_f(z, t) = \begin{cases} \sigma_0 z/a(t), & 0 \leq z \leq a \\ \sigma_0, & a \leq z \leq \ell \end{cases} \quad (40)$$

と書ける。ここで、 $\sigma_0 = E_f \varepsilon_0$ である。この分布を式(18)と(19)および式(26)と(27)に代入し、同様な式展開を行えば式(36)および式(39)と同じ結果が得られる。ただし、繊維破断モデルでは、母材中に繊維方向垂直応力 σ_m が存在し、 σ_m は $\dot{\gamma}_m^c$ に影響するから、式(33)が成り立たない。しかし、一方向連続繊維強化金属基複合材料を対象とした検討結果⁽⁴⁾⁽⁷⁾によると、 σ_m は τ_m に比べて極めて早い速度で緩和する。この場合、式(33)が近似的に成立するから、本解析解は繊維破断モデルに対しても適用可能である。

5. 検 討

4章では、繊維応力の二直線分布を仮定し、汎関数の停留条件より近似解析解を導いた。ここでは、この解析解の妥当性を調べるため、差分解析およびレーザラマン試験の結果と比較する。また、本解析解で考慮した母材せん断弾性変形の影響についても議論する。

5.1 数値解析結果との比較 導出した近似解の妥当性を調べるため、シアラグ方程式(9)および(15)を繊維引抜きの場合に差分近似し、数値的に解いた。差分近似は、次の無次元量を用いて文献(4)と同様に行った。

$$\hat{r} = \frac{r}{r_f}, \quad \hat{z} = \frac{z}{r_f}, \quad \hat{t} = BE_f \sigma_0^{n-1} t, \quad \hat{\sigma}_f = \frac{\sigma_f}{\sigma_0} \cdots \cdots (41)$$

このような数値解析の結果を本解析解の結果と比較した例を図4(a), (b)に示す。材料定数等は図題に示したように設定し、差分解析における繊維分割長さ Δz および時間増分 Δt は十分に小さいことを確認した。

図4(a), (b)は母材クリープの応力指数が $n=1$ および $n=3$ の場合の比較であり、両場合とも本解析解は二直線近似の範囲で数値解析の結果とよく一致することがわかる。特に図4(b)に示す $n=3$ の場合、時間の経過とともに差分解析による繊維応力分布が二直線分布に近づいており、本解析解はより精度よく数値解析結果を近似するようになる。

5.2 母材せん断弾性変形の影響 緒言で述べたように、Mason ら⁽⁹⁾は単純な2次元平板モデルを用い、母材がべき乗則クリープを示す場合に解析解を求めたが、彼らは母材のせん断弾性変形を無視した。これに対して本研究では、母材のせん断弾性変形を考慮して解を導いたから、次にこの影響について議論する。

$G_m = \infty$ のとき、式(39)より $a(0) = 0$ となるから、式(36a)と(36b)はそれぞれ

Fig. 4 Time-dependent profiles of fiber stress by analytical solution and finite difference computation ($G_m/E_f = 0.01$, $R/r_f = 5$, $\ell/r_f = 200$, $\Delta z = 2$); (a) $n=1$, (b) $n=3$

Fig. 5 Influence of matrix shear rigidity on time-dependent increase of stress transfer length ($R/r_f = 5$); (a) $n=1$, (b) $n=3$

$$a(t) = r_f \sqrt{3BE_f \ln(R/r_f)} \cdot t, \quad n = 1 \dots \dots \dots (42a)$$

$$a(t) = r_f \left\{ \frac{3(n+1)BE_f \sigma_0^{n-1}}{2^n(n-1)} \left[1 - \left(\frac{r_f}{R} \right)^{n-1} \right] t \right\}^{1/(n+1)}, \quad n \neq 1 \dots \dots \dots (42b)$$

を与える。したがって $G_m = \infty$ のとき、応力回復長さ a は初期値零から $t^{1/(n+1)}$ に比例して発達する。これは、Mason⁽³⁾らの解と同じ結果である。しかし実際には、 $G_m \ll E_f$ の場合が多く、このとき a は式(39)で与えられるような正の初期値から大きくなる。この結果、 $G_m = \infty$ とした解〔式(42a), (42b)〕は、図5(a), (b)に示すように a が式(39)による値と同程度となるまでは適切な予測を与えないから、母材のせん断弾性変形を無視した解の適用には注意が必要である。

5.3 実験結果との比較 つづいて、著者らが実施した定荷重繊維引抜き試験の結果⁽⁹⁾を本解析解に基づいて議論する。この試験では、単繊維モデル複合材料（炭素繊維／アクリル）の繊維端に一定応力 $\sigma_0 = 2.7 \text{ GPa}$ を負荷し、レーザラマン分光法により繊維応力分布の時間変化を測定した。試験結果を参考のため図6に示す。

応力伝達長さ a の時間変化に関して本解析解〔式(36b), (39)〕による予測を試験結果と比較したところ、図7の破線のようになった。この予測に用いた材料定数を表1に示す。表中の E_f はカタログ値、 G_m は母材の単軸引張試験より材料の等方性を仮定して求めた値、またクリープ定数 B と n は母材の引張クリープ試験結果の定常クリープ近似に基づく値である（付録参照）。さらに R/r_f は、Li-Grubb⁽¹²⁾の検討結果に従って $R/r_f = 4$ としたが、この影響については後に議論する。なお、応力伝達長さの実験値は、各時間での繊維応力分布（図6）を二直線近似することにより求めた。た

Fig. 6 Time-dependent change of fiber stress profile in single carbon fiber/acryl model composite tested using laser Raman spectroscopy⁽⁹⁾

Table 1 Material constants

Elastic constants etc.		$E_f = 490 \text{ GPa}$, $G_m = 570 \text{ MPa}$, $r_f = 2.7 \mu\text{m}$, $R/r_f = 4$
Matrix creep constants	No hardening	$B = 1.25 \times 10^{-4} \text{ MPa} \cdot \text{s}^{-n}$, $n = 3.5$
	Time- hardening	$B' = 1.25 \times 10^{-4} \text{ MPa} \cdot \text{s}^{-n}$, $n = 3.5$, $t_0 = 50 \text{ h}$, $k = 0.65$
Interfacial slip stress		$\tau_s = 4.9 \text{ MPa}$

だし、 $0 \leq z \leq 125 \mu\text{m}$ の部分は、完全に界面剥離しているから、応力伝達長さから除外した。

図7を見ると、本解析解による予測（破線）は、特に負荷直後において実験結果との不一致が著しい。この原因として、本解析解における界面完全接着の仮定や母材の遷移クリープ特性の無視、あるいは R/r_f の値の選択が考えられるから、以下ではこれらの影響について検討する。

まず、界面完全接着の仮定の妥当性を議論する。この仮定に基づく弾性シアラグ方程式(15)を $\varepsilon_0 = 0$ として式(13)の境界条件のもとで解くと、 σ_f の分布は

$$\sigma_f = \sigma_0 \exp \left\{ - \sqrt{\frac{2G_m}{E_f \ln(R/r_f)}} \frac{z}{r_f} \right\} \dots \dots \dots (43)$$

となる。したがって、式(4)を用いると、界面せん断応力の最大値は

$$\tau_{\max} = \sigma_0 \sqrt{\frac{G_m}{2E_f \ln(R/r_f)}} \dots \dots \dots (44)$$

と求められるから、上式に $\sigma_0 = 2.7 \text{ GPa}$ と表1の材料定数を代入すると $\tau_{\max} = 55.3 \text{ MPa}$ となる。一方、図6の実験結果から $\tau_{\max}$ を式(4)により評価すると、負荷直後でも $\tau_{\max} \approx 4.9 \text{ MPa}$ 、すなわち上述の予測結果の1割程度にしかならない。これは、繊維に荷重を負荷した

Fig. 7 Comparison of experiment with analytical solution based on creep constants determined by steady-state fitting of creep curves

際に界面すべりが生じたためと考えられる⁽⁹⁾。

そこで、界面すべりの影響を本解析解の枠内で考慮する。負荷の際の界面すべりは界面せん断応力 τ_i が界面すべり応力 τ_s に達したことによって生じ、 τ_s は実験結果における負荷直後の $\tau_{\max}$ に等しいと考えられる。また、この機構による応力伝達長さ a_s は、繊維応力の2直線分布を仮定すると、式(4)より

$$a_s = r_f \sigma_0 / (2\tau_s) \cdots \cdots \cdots (45)$$

と表される。図7の実線は、このような考察に基づいて $\tau_s = 4.9 \text{ GPa}$ 、 $a(0) = a_s$ として式(36b)による $a(t)$ をプロットした結果であり、実験結果とかなりよく一致している。つまり、負荷の際の界面すべりを考慮すれば、本解析解は実験結果に近い傾向を与える。なお負荷後は、母材せん断クリープの進行によって界面せん断応力が緩和するから、界面すべりがさらに進行することはないと考えられる。

次に、母材の遷移クリープ特性の影響について検討するため、母材のせん断クリープ速度が次式のような時間硬化理論により表されるとする。

$$\partial \gamma_m^c / \partial t^* = B^* \sigma^n, \quad t^* = t_0 (t/t_0)^k \cdots \cdots \cdots (46)$$

ここで、 B^* 、 n 、 t_0 、 k は材料パラメータである（付録および表1参照）。このとき、式(36a)と式(36b)はそれぞれ

$$\frac{a(t^*)^2 - a(0)^2}{3E_f} + \frac{r_f^2}{G_m} \ln \frac{R}{r_f} \ln \frac{a(t^*)}{a(0)} = B^* r_f^2 \ln \frac{R}{r_f} \cdot t^*, \quad n=1 \cdots \cdots \cdots (47a)$$

$$\frac{a(t^*)^{n+1} - a(0)^{n+1}}{3(n+1)E_f} + \frac{r_f^2 \ln(R/r_f)[a(t^*)^{n-1} - a(0)^{n-1}]}{2(n-1)G_m} = \frac{B^* r_f^{2n} \sigma_0^{n-1}}{2^n (n-1)} \left(\frac{1}{r_f^{n-1}} - \frac{1}{R^{n-1}} \right) t^*, \quad n \neq 1 \cdots \cdots \cdots (47b)$$

となる。上式による予測は、図8に示すように、母材の遷移クリープ特性を無視した予測（図7）より実験結果に近い。したがって、実験結果をより精度よく予測するためには、母材の遷移クリープ特性を適切に考慮する必要があると言える。

最後に、 R/r_f の値の影響について議論する。無限体の母材に埋め込まれた単繊維の引抜きでは本来 $R/r_f = \infty$ であるが、この R/r_f の値を使用すると、式(39)からわかるように応力回復長さが無限大となり、非現実的な予測となる。これは修正シアラグ理論⁽¹¹⁾⁽¹²⁾では式(7)により τ_m の半径方向変化を表すことによる。そこでLi-Grubb⁽¹²⁾は、 R を母材せん断弾変形の消失する半径（有効半径）と解釈し、修正シアラグ理論による予測が実験結果と一致するような R/r_f の値を検討し、 $R/r_f = 4$ という結果を得た。表1に示した R/r_f の値は

Fig. 8 Comparison of experiment with analytical solution with time-hardening of matrix creep

Fig. 9 Influence of R/r_f on time-dependent increase of stress transfer length following initial interfacial slip in analytical solution with time-hardening of matrix creep

この検討結果に基づく。しかし、ここで議論している実験結果に関しては、 R/r_f の値の影響は小さいと考えられる。すなわちこの実験では、すでに述べたように $t=0$ での負荷の際に界面すべりが生じており、式(45)が成り立つから、 $a(0) = a_s$ は R/r_f に依存しない。また、 n が大きいとき、式(36b)の右辺において $(r_f/R)^{n-1}$ は $R \gg r_f$ ならば無視できる。これは、式(34)からわかるように、 n の増加に伴って母材せん断クリープが界面近傍に集中するからである。したがって、式(36b)において R/r_f は左辺第2項（母材せん断弾性項）のみに現れるから、応力伝達長さの時間変化に及ぼす R/r_f の影響は図9に示すように小さい。

6. 結 言

本研究では、一方向連続繊維強化複合材料の応力伝達長さに及ぼす母材せん断クリープの影響を変分法により解析的に議論するとともに、導かれた近似解析解による予測を数値解析結果や著者らの行ったレーザラマン試験結果⁽⁹⁾と比較した。本研究の結果は、次のようにまとめられる。

(1) 弾-クリープを示す母材に弾性繊維の埋め込まれた軸対称セルの補足エネルギー関数を考え、繊維応力分布を許容関数とする汎関数を提示するとともに、その停留関数はシアラグ理論による微分方程式の解となることを示した。

(2) 繊維応力の二直線分布を上述の汎関数に代入し、汎関数の停留条件から応力伝達長さの時間変化率を求めた。さらに、この時間変化率を母材のせん断クリープがべき乗則で表される場合に解析的に積分し、応力伝達長さの時間変化に関する近似解析解を導いた。

(3) 導いた近似解の妥当性を調べるため、シアラグ方程式の差分解析結果と比較したところ、両者は二直線近似の仮定の範囲で精度よく一致した。

(4) 本解析解で考慮されている母材せん断弾性変形の影響を検討した結果、これを無視したMasonら⁽³⁾の二次元解析解は母材せん断クリープの十分に発達した状態に限られることが明らかとなった。

(5) 本解析解を著者らの定荷重単繊維引抜き試験の結果⁽⁹⁾に適用した。この結果、本解析解は、負荷の際の界面すべりを考慮すれば実験で観察された応力伝達長さの時間変化をかなりの精度で表すことがわかった。また、母材の遷移クリープ特性を単純な時間硬化理論によって考慮したところ、本解析解は実験結果をより精度よく表した。

なお、本研究の一部は、文部省科学研究費補助金〔基盤研究(C)(2) 課題番号 11650086〕により行われたものである。ここに記して、謝意を表する。

付 録

図10に示す母材の引張クリープ試験結果⁽⁹⁾を、まず次式により図中の破線のように定常クリープ近似した。

$$\varepsilon = \sigma/E_m + A\sigma^n t \quad \cdots \cdots \cdots (48)$$

この結果、上式のクリープ定数は、 $A = 5.53 \times 10^{-6}$ (MPa⁻ⁿh⁻¹)、 $n = 3.5$ となった。次に、式

$$\varepsilon = \sigma/E_m + A^* \sigma^n t^*, \quad t^* = t_0(t/t_0)^k \quad \cdots \cdots \cdots (49)$$

を同じ試験結果に適用し（図10の実線）、 $A^* = 5.53 \times 10^{-6}$ (MPa⁻ⁿh⁻¹)、 $n = 3.5$ 、 $t_0 = 50$ (h)、 $k = 0.65$ を得た。

高分子材料の非弾性変形でも、引張りとせん断で金属材料と同様な相当性が成り立つことが報告されている⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾。そこで、最も単純にトレスカの相当性を仮定

Fig.10 Tensile creep curves of acrylic at constant stresses; dashed and solid lines fitted with equations (48) and (49), respectively

すれば、式(33)の B と式(46)の B^* はそれぞれ $B = 2^{n+1}A$ および $B^* = 2^{n+1}A^*$ と表される。表1のクリープ定数は、上述のように定めた値である。

文 献

- (1) Lifshitz, J.M. and Rotem, A., *Fibre Sci. Tech.*, **3** (1970) 1-20.
- (2) Lagoudas, D.C., Hui, C.-Y. and Phoenix, S.L., *Int. J. Solids Struct.*, **25-1** (1989), 45-66.
- (3) Mason, D.D., Hui, C.-Y. and Phoenix, S.L., *Int. J. Solids Struct.*, **29-23** (1992), 2829-2854.
- (4) Du, Z.-Z. and McMeeking, R.M., *J. Mech. Phys. Solids*, **43-5** (1995), 701-726.
- (5) Ohno, N. and Yamakawa, T., *JSME Int. J., Ser. A*, **39-4** (1996), 517-525.
- (6) Iyengar, N and Curtin, W.A., *Acta Mater.*, **45-8** (1997), 3419-3429.
- (7) Ohno, N. and Miyake, T., *Int. J. Plasticity*, **15-2** (1999), 167-189.
- (8) 三宅卓志・大野信忠・水野 衛・山川太郎, 機論, **64-620** (1998), 981-987.
- (9) 三宅卓志・幸川進一・大野信忠, 機論, **65-643** (2000), 464.
- (10) Cox, H.L., *Br. J. Appl. Phys.*, **3** (1952), 72-79.
- (11) Clyne, T.W. and Withers, P.J., *An Introduction to Metal Matrix Composites*, (1993), 20-30, Cambridge Univ. Press.
- (12) Li, Z.-F. and Grubb, D.T., *J. Mater. Sci.*, **29** (1994), 189-202.
- (13) 北川正義・邱 建輝・水谷数信, 機論, **58-548** (1992), 621-626.
- (14) 邱 建輝・北川正義, 機論, **59-568** (1993), 2926-2933.