複合階層塑性変形モデルに基づく二軸ラチェット変形の解析*

小幡谷 洋一^{*1}, 加藤 貴也^{*2}Analysis of Biaxial Ratchetting Deformation Based
on Multiple Strata Plasticity ModelYoichi OBATA^{*3} and Takaya KATO^{*3} Fukui University, Dept. of Mechanical Engineering,
Bunkyo 3-9-1, Fukui-shi Fukui, 910-8507 Japan

In this paper the authors intend to expand the multiple strata plasticity model for describing various cyclic plastic deformations. Recently, some applications of the previous model have suggested that any plastic deformations can be described as the macroscopic behaviors caused by the activation state of the slip systems in a polycrystalline metal. An effect of back stress acting on the dislocation source on a slip plane is introduced in order to consider a reciprocating motion of slip system. A new modified model has been proposed by adopting a simple rule expressing formation and disappearance of back stress under cyclic loading. It has been clarified that each biaxial ratchetting behavior can be explained as a cyclic deformation caused by an activation state of the slip systems under nonproportional loading

Key Words: Cyclic Plasticity, Dislocation, Slip System, Back Stress, Biaxial Ratchetting Deformation, Constitutive Equation

1. 緒 言

機械・構造物の設計上, 使用部材の単軸および多軸ラチェット変形の考慮が必要となる場合も多く, これまでもこうした変形挙動の記述に関する研究が多く行われてきた^{(1)~(8)}. その結果, 少なくともラチェット変形の一般的特性に関する共通の認識は形成されていると思われる. 一方, 移動硬化則を用いたさまざまな塑性構成式が多く提示されているにもかかわらず, ラチェット変形を総合的に記述できるのはまだ見当たらないようである. むしろ, 上述の変形挙動が構成式の適用性を判断する試金石として利用されているのが現状のようであり, 単軸ラチェット変形と多軸ラチェット変形の両方を無理なく記述できる繰返し塑性構成式の出現が望まれている.

著者らは先に, 転位の移動挙動とすべり系の活動とを有機的に結合した複合階層塑性変形モデルを提示し⁽⁹⁾, 比例および非比例負荷下の塑性変形挙動をすべり系の活動状態との関係で把握できるものと考えてき

た. その際, すべり系の活動をすべて一方向のみに限定して考えていた. しかし, 繰返し変形の記述にあたっては, すべり系の往復活動を考慮する必要がある. そのため, 本論文ではすべり系の往復運動と密接に関連する転位源に作用する逆応力(バックストレス)の生成・消滅の機構を想定し, 複合階層塑性変形モデルを繰返し変形下に適用できるよう拡張した. その結果, 上述の単軸および多軸応力下のラチェット変形が負荷条件に対応したすべり系の活動状態に基づいて必然的に生ずるものと把握できたので報告する.

2. 複合階層塑性変形モデルの拡張

複合階層塑性変形モデルに基づく塑性構成式は, 次式で与えられる⁽⁹⁾.

$$d\epsilon_p = (C : Q) \frac{dW(\bar{\sigma})}{A_s} \dots\dots\dots (1)$$

ここで, $d\epsilon_p$ は塑性ひずみ増分テンソル, $W(\bar{\sigma})$ と A_s は不規則障害物説に基づく塑性ポテンシャル関数および内部構造変数, Q はすべり系の活動状態を反映して算出される可能性としての塑性ひずみ増分に比例する 2 階のテンソル, C は可能性としての塑性ひずみ増分を現実の塑性ひずみ増分に転換する 4 階のテンソルである. また, 繰返し変形の記述にそのまま適用できる

* 原稿受付 1999 年 6 月 18 日.

^{*1} 正員, 福井大学(〒910-8507 福井市文京 3-9-1).^{*2} 学生員, 福井大学大学院.

E-mail: obataya@mech.fukui-u.ac.jp

のは, A_s とテンソル C であり, 具体形を以下に示す.

$$A_s = \frac{n_0}{bN} \dots\dots\dots (2)$$

$$\left. \begin{aligned} C_{1111} &= C_{2222} = C_{3333} \quad (\equiv C_{11} = 1 \text{ とおく}) \\ C_{1112} &= C_{1113} = C_{2211} = C_{2213} = C_{3311} \\ &= C_{3312} \quad (\equiv C_{12} = -C_{11}/2) \\ C_{1212} &= C_{2121} = C_{2323} = C_{3232} = C_{3131} \\ &= C_{1313} \quad (\equiv C_{44} = 2C_{11}) \\ \text{その他の } C_{ijkl} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (3)$$

n_0 は障害物の線密度, N は可動転位密度, b はバーガースベクトルの大きさである.

一方, 繰返し負荷の場合には, 転位およびすべり系の往復運動を考慮する必要がある. 転位の往復運動に関しては, すでに提示してある塑性ポテンシャルの発展則⁽¹⁰⁾をそのまま適用できる. しかし, すべり系の往復運動に関しては, 繰返しに伴うすべり系の硬化特性を新たに想定する必要がある. 以下, これらの点について説明を加える.

2・1 塑性ポテンシャルの発展則 不規則障害物説においては, 転位の移動に抗する抵抗力場を障害物強度の確率密度分布で表し, その別表現として塑性ポテンシャル関数 $W(\bar{\sigma})$ を用いている. また, 抵抗力場は繰返し変形に応じて変化するものと考え, 過去に履歴した最大の相当応力 σ_v (境界応力と呼ぶ) を境とする二つの障害物強度分布(複合形ワイブル分布)で表し, これに対応させて塑性ポテンシャル関数 $W(\bar{\sigma})$ を次式で与えている⁽¹⁰⁾.

$$W(\bar{\sigma}) \begin{cases} = W_n(\bar{S}) = 2(S/S_0)^{m_0} & \bar{\sigma} < \sigma_v \\ = W_s(\bar{\sigma}) = 2(\sigma/\sigma_v)^{m_s} & \bar{\sigma} > \sigma_v \end{cases} \dots\dots (4)$$

ここで, $W_s(\bar{\sigma})$ は初期関数, $W_n(\bar{\sigma})$ は内部関数, $\bar{\sigma}$ は Mises 形の相当応力, $\bar{S}$ は次式で定義した履歴相当応力である.

$$\bar{S} = \sigma_v + \phi \bar{\sigma} \dots\dots\dots (5)$$

ただし,

$$\phi = \begin{cases} = 1, & d\bar{\sigma} > 0 \\ = -1, & d\bar{\sigma} < 0 \end{cases} \dots\dots\dots (6)$$

なお, 初期および内部関数におけるパラメータ $[\sigma_{ys}, m_s]$ と $[S_0, m_0]$ はいずれも位置パラメータを零としたワイブル分布の [中央値, 形状パラメータ] を表している.

一方, 境界応力 (σ_v) における塑性ポテンシャル値とひずみ硬化率の連続性を考慮すると, 次式で与える塑性ポテンシャル関数の発展則を得る.

$$\begin{aligned} S_{c0} &= 2\sqrt{\sigma_{ys}\sigma_v} \\ m_0 &= 2m_s \end{aligned} \dots\dots\dots (7)$$

定数 $[\sigma_{ys}, m_s]$ は静引張硬化曲線より評価できるので,

内部塑性ポテンシャル関数は境界応力 σ_v によって一義的に定まることになる.

2・2 すべり系の繰返し硬化特性とテンソル Q の算

定 すべり面法線方向の単位ベクトルを n , すべり方向の単位ベクトルを a とすると, 一般化されたシュミット因子 μ_{ij} は次式で与えられる.

$$\mu_{ij} = (a_i n_j + a_j n_i) / 2 \dots\dots\dots (8)$$

ここで, 外応力テンソルの成分 σ_{ij} を用い, すべり系における分解せん断応力 τ は次式で与えられる.

$$\tau = \sum_{i,j=1}^3 \mu_{ij} \sigma_{ij} \dots\dots\dots (9)$$

臨界分解せん断応力が τ_c の場合, すべり系が活動可能となる条件は $|\tau| \geq \tau_c$ である. これまではすべり系の硬化特性は一方向負荷と考え, 分解せん断応力 τ はすべり系のすべり量 γ を用いて次式で与えていた.

$$\tau = \tau_c \{1 + c\gamma^n\} \dots\dots\dots (10)$$

ここで, n と c は定数である. しかし, 一般に, すべり系の活動に必要な分解せん断応力 τ はすべり面上の転位源を動かすのに必要な応力 $\tau_h (> 0)$ と転位の増殖によって生じた多数の転位ループからの逆応力 $\tau_b (> 0)$ の和と考えられている. すなわち,

$$|\tau| = \tau_h + \tau_b \dots\dots\dots (11)$$

逆応力 τ_b は可逆的な応力成分であり, 応力 τ_h はすべり系の自己硬化特性を表す非可逆的な応力成分である. したがって, すべり系の往復運動を考える場合には逆応力の適切な生成・消滅の機構を想定する必要がある.

いま, 活動が継続中のすべり系を考える. 分解せん断応力増分 $|\Delta\tau|$ に対するすべり系の自己硬化に相当する応力増分 $\Delta\tau_h$ の割合を一定と仮定する.

$$\Delta\tau_h / |\Delta\tau| = \text{const} = h \dots\dots\dots (12)$$

ここで, h を自己硬化係数と呼んでおく. この間の逆応力の増分 $\Delta\tau_b$ は

$$\Delta\tau_b = (1 - h) |\Delta\tau| \dots\dots\dots (13)$$

で与えられるが, その効果はすべり方向が反転する際に現れる. 一方, 非可逆的な応力成分である τ_h は, すべり系の往復活動に伴う累積すべり量 $\Gamma (= \sum |\Delta\gamma|)$ の関数として次式のように与えられる.

$$\tau_h / \tau_c = 1 + (hc) \Gamma^n \dots\dots\dots (14)$$

さて, すべり系の往復運動を考える場合, すべり方向に正負を課しておく必要がある. ここでは, 初回負荷時に生ずる分解せん断応力 τ_0 の方向を正と定め, 各すべり系に次式で方向指標 χ を割り付けておく.

$$\chi = \begin{cases} = 1, & \tau_0 > 0 \\ = -1, & \tau_0 < 0 \end{cases} \dots\dots\dots (15)$$

ここで, 任意時点の分解せん断応力 τ に方向指標 χ を

乗じた応力 τ^* を考えると、すべり方向の正負は $\Delta\tau^*$ の正負と一致する。したがって、応力 τ^* を基準に考えたすべり系の上臨界応力 $[\tau_{uc}]$ と下臨界応力 $[\tau_{lc}]$ を用い、各すべり系の活動状態を以下の四とおりに分類することができる。なお、 τ_{uc} と τ_{lc} の初期値はそれぞれ τ_c と $-\tau_c$ である。

[1] 未活動すべり系: $-\tau_c < \tau^* < \tau_c$

[2] 正方向に活動中: $\tau_{uc} \leq \tau^*$
(τ_{uc} が更新中)

[3] 活動休止中: $\tau_{lc} < \tau^* < \tau_{uc}$

[4] 負方向に活動中: $\tau^* \leq \tau_{lc}$
(τ_{lc} が更新中)

なお、 τ_{uc} と τ_{lc} の間には常に次の関係式が成り立っている。

$$\tau_{uc} - \tau_{lc} = 2\tau_h \quad \dots\dots\dots (16)$$

さて、上述の [2] と [4] の活動すべり系においては τ_h が増加し、 τ_b も生成され、応力増分 $\Delta\tau^*$ に応じて生じたすべり量 $\Delta\gamma$ が次式によって評価される。

$$\Delta\gamma = \frac{\Delta\tau^*}{\tau_c n (\Gamma)^{n-1}} \quad \dots\dots\dots (17)$$

一方、[1] の未活動すべり系においては当然ながらすべりも逆応力も生ぜず、 $\tau_h = \tau_c$ のままである。ここで最も興味をひき、かつ重要なすべり系の状態は [3] の場合であり、すべりは生じないので τ_h は変化しないが、 τ_b と τ_{uc} は以下のように変化するものと考ええる。

いま、[2] から [3] の状態に突入 ($\tau^* = \tau_{uc0}$) した後の逆応力の変化挙動を図 1 (a) (比例負荷) および図 2 (b) (非比例負荷) を用いて説明する。図の縦軸には τ^* 、横軸方向には (τ_h , τ_{uc} , τ_b) の各成分をとり活動休止開始時の τ_{uc} を τ_{uc0} 、 τ_b を τ_{b0} として示している。

比例負荷の場合 [図 1 (a)], どのすべり系も活動

休止中なので、 τ^* が低下しても逆応力は一定値 τ_{b0} を保ち、 τ_{uc0} もそのまま維持される (図中の一点鎖線)。

一方、非比例負荷の場合 [図 1 (b)], すべりを生じない当該すべり系の逆応力は、他の活動すべり系の影響を受けて変化すると考える。ここでは、 τ^* の低下に伴い、 τ_b は初期値 $\tau_{b0} (= \tau_{uc0} - \tau_h)$ から直線的に減少し、 τ^* が 0 となる時点で完全に消滅するものと仮定する。この間、 τ_{uc} は τ_{uc0} から τ_h まで低下 (図中の一点鎖線) し、その変化は次式で与えられる。

$$\tau_{uc} = \left(1 - \frac{\tau_h}{\tau_{uc0}}\right) \tau^* + \tau_h \quad \dots\dots\dots (18)$$

状態 [4] から状態 [3] に移行する場合においても同様な変化をするものとする。いま、 r 番めの活動すべり系の式 (17) によって算定されるすべり増分を $d\gamma^r$ 、シュミット因子 μ_{ij}^r とすれば、テンソル $\mathbf{Q}$ の各成分は次式で与えられる。

$$Q_{ij} = \frac{\sum_{r=1}^M \mu_{ij}^r d\gamma^r}{\sum_{r=1}^M d\gamma^r} \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここで、 M は活動すべり系の総数であり、 r は活動すべり系の番号である。成分 Q_{ij} の大きさは定数 n の影響を受けるが、定数 c には依存しない。

2.3 モデルに基づく解析手法 材料の加工硬化特性を規制する主要な状態パラメータは $[\sigma_{ys}, m_s, A_\infty]$ であり、これらは静引張硬化曲線より評価できる。一方、逆応力の効果を導入して評価されるすべり系の活動状態はテンソル $\mathbf{Q}$ に反映される。すべり系の活動状態を評価するため、該当する結晶格子の多結晶仮想試験片を準備する。本論文では、純銅試験片に対応する FCC の多結晶仮想試験片 (結晶粒数 540 個) を準備した。なお、試験片の詳細な構築方法については先の論文⁽⁹⁾ にゆずる。仮想試験片を用い、与えられた負荷経路下でのテンソル $\mathbf{Q}$ の成分を、式 (19) を援用して評価する。なお、すべり系の硬化特性を与える定数は τ_c , c , n および h であるが、テンソル $\mathbf{Q}$ の計算結果に影響を与えるのは n と h のみである。

一方、テンソル $\mathbf{Q}$ と塑性ポテンシャル関数の発展則を用いて算定される変形挙動のうち、微小塑性ひずみ領域での内部構造変数の変化特性については、静引張加工硬化曲線に対する先の研究⁽¹¹⁾ で示した次の関係式を用いることとした。

$$\frac{A_s}{A_{s\infty}} = 1 - \eta \ln B_s \quad \dots\dots\dots (20)$$

B_s は 5 個を超える活動すべり系を持つ結晶粒数の全結晶粒数に対する割合を与える内部状態因子、 η は定数、 $A_{s\infty}$ は大ひずみ領域での A_s の収束値である。

Fig.1 Explanatory diagram for variation of back stress in the state of [3]

3. 二軸ラチェット変形の解析

3.1 実験結果とシミュレーション結果の対比

純銅の薄肉円筒試験片を用い、一定軸荷重下でねじり負荷を繰返す試験を行った。まず、軸方向応力が80 MPaとなるよう一定軸荷重を加える。ねじり負荷の繰返しは、せん断ひずみ振幅が10サイクルまでは1.7%で、またそれ以後の10サイクルでは3.5%でそれぞれ一定となるひずみ制御下で行った。図2(a)は軸ひずみ ε とせん断ひずみ γ の関係を示すひずみ経路図であり、軸方向ひずみの進行するラチェット変形が観察される。また、図2(b)に示すせん断応力とせん断ひずみとの関係より、ひずみ幅一定の試験において加工硬化の進展していく様子が観察される。

二軸ラチェット変形を対象とすることから、軸負荷とねじり負荷における塑性ひずみ増分は構成式により次式で与えられる。

$$d\varepsilon = d\varepsilon_{11} = \frac{3}{2} C_{11} \cdot Q_{11} \frac{dW(\bar{\sigma})}{A_s} \dots\dots\dots (21)$$

$$d\gamma = 2d\varepsilon_{12} = C_{44} \cdot 2Q_{12} \frac{dW(\bar{\sigma})}{A_s} \dots\dots\dots (22)$$

なお、シミュレート計算にあたり、材料定数として $[\sigma_{ys}=17.7 \text{ MPa}, m_s=0.65, A_{s\infty}=160, \eta=8.5]$ を用い、すべり系の硬化特性値 n を0.1、自己硬化係数 h を0.2とした。実験と同様のひずみ制御下で行ったシミュレート結果を図3に示す。軸方向ひずみの進行状況は、図3(a)に示すシミュレート結果によって比較的良好に表現されている。しかし、図3(b)に示すヒステリシスループにおける小ひずみ領域での曲線形状が実験曲線と大きく異なっていること、およびその影響を受けているとも考えられるが、加工硬化特性にやや大きな差のあることがわかる。これに関しては、内部構造変数 A の評価に用いた式(20)が静引張硬化曲線、すなわち比例負荷下初期での実験事実より帰納し

(a) Strain trajectory

(b) Stress-strain curve

Fig. 2 Biaxial strain-controlled ratchetting deformation (Experiment)

(a) Strain trajectory

(b) Stress-strain curve

Fig. 3 Biaxial strain-controlled ratchetting deformation (Simulation)

Fig. 4 Biaxial strain-controlled ratchetting deformation (Simulation)

Fig. 5 Biaxial stress-controlled ratchetting deformation (Simulation)

Fig. 6 Uniaxial strain-controlled deformation (Simulation)

Fig. 7 Uniaxial stress-controlled ratchetting deformation (Simulation)

ている点に留意する必要がある。非比例負荷下ないし繰返し負荷においては、内部構造変数を式(20)と異なる別途の評価方法が必要となるかもしれないし、その検討が今後の課題の一つでもある。いずれにしても、本モデルによって二軸ラチェット変形の大筋を記述で

きることがわかった。したがって、以下ではすべり系の活動状態とラチェット変形との関係を簡単に考察してみる。

二軸ラチェット変形の場合、各すべり系の分解せん断応力 τ はシュミット因子 μ_{11} および μ_{12} を用いて次

式で与えられる。

$$\tau = \mu_{11}\sigma_{11} + 2\mu_{12}\sigma_{12} \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここで、 σ_{11} は軸方向応力、 σ_{12} はせん断応力である。いま、 $[\mu_{11}-\mu_{12}]$ 空間に各すべり系の位置を点(μ_{11} , μ_{12})として表示するものとすれば、それらは全空間にほぼ一様に分散するものと考えられる。初回の軸方向応力 $\sigma_0(>0)$ のもとで活動できるすべり系は μ_{12} には依存せず、次式を満足したものだけである。

$$\textcircled{1}: \mu_{11} \geq \frac{\tau_c}{\sigma_0} \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\textcircled{2}: \mu_{11} \leq -\frac{\tau_c}{\sigma_0} \quad \dots\dots\dots (25)$$

以下では、上の $\textcircled{1}$ の場合に限定して説明を加える。 $\textcircled{1}$ に所属するすべり系のうち、せん断応力 $\sigma_{12}(>0)$ によってすべり活動が継続できるのは $[\mu_{12}>0]$ のものに限られ、 $[\mu_{12}<0]$ となる残りの半分は活動が停止し、いわゆる休止状態のすべり系となる。ついで、せん断応力 σ_{12} から零を経て逆方向の $-\sigma_{12}$ に至る過程においては、活動中であつたすべり系 $[\mu_{12}>0]$ はすべて休止状態となり、休止状態であつたすべり系 $[\mu_{12}<0]$ が逆にすべり活動を開始する。この間、軸方向ひずみ増分を規制するテンソル成分 Q_{11} は常に正であるため、ラチェット変形は進行することとなる。

4. モデルの適用性に関する若干の考察

ねじり負荷を一定として軸荷重を繰返す際に生ずるラチェット変形も前章の説明によって把握できる。軸方向ひずみ幅を一定とした場合のシミュレート例を図4(a)および(b)に示す。定ひずみ繰返しのため、加工硬化の進展していく挙動が表されている。次に、軸荷重を一定とし、定ねじり負荷を繰返す場合に生ずるラチェット変形の一例を図5(a)および(b)に示す。図5(a)からわかるように、繰返しとともにラチェット変形の進行は緩やかになり、せん断ひずみ幅もほぼ一定値に収束していくように見受けられる。この間ヒステリシスループの変化は図5(b)に示すとおりである。

以上は二軸ラチェット変形の適用例であつたが、以下には単軸応力下での定ひずみ試験および定応力試験のシミュレーション結果の例を示す。図6には両振り

定ひずみ試験でのヒステリシスループの変化特性を示す。3章でも述べたように、小ひずみ領域におけるループ形状の記述に問題が残っているものの、加工硬化の進展特性は比較的良好に記述されているといえよう。図7は平均応力を与えた定応力試験の例であるが、いわゆるサイクリッククリープ変形の記述にも本モデルが適用できることを示しているといえる。

以上より、解明すべき課題も若干残ってはいるが、複雑な繰返し塑性変形挙動を総合的に記述する上で、すべり系の活動状態を考慮した本モデルは有効なものの一つと考えられる。

5. 結 言

複合階層塑性変形モデルを繰返し塑性変形挙動の記述にも適用できるよう、逆応力の生成・消滅の機構を想定・定式化した。その結果、純銅試験片による二軸ラチェット変形挙動が、新たなモデルによる計算結果とおおむね良好に対応することがわかった。また、拡張された本モデルにより、単軸および二軸ラチェット変形を統一的に記述できることもわかった。以上のことから、本モデルは複合階層繰返し塑性変形モデルと考えることができる。

文 献

- (1) Shiratori, E., Ikegami, K. and Yoshida, F., *Mech. Phys. Solids*, **27** (1979), 213-229.
- (2) 吉田総仁・松岡雄二・大森正信, 機論, **51-462**, A(1985), 579-586.
- (3) Yoshida, F., *Int. J. Pres. Piping*, **44** (1990), 207-223.
- (4) Inoue, T., Yoshida, F., Niitsu, Y., Ohno, N., Uno, T. and Suzuki, A., *Nucl. Eng. Des.*, **150** (1994), 107-118.
- (5) Yoshida, F., *Eur. J. Mech., A/Solids*, **14-1**(1995), 97-117.
- (6) Ohno, N., Abdel-Karim, M., Kobayashi, M. and Igari, T., *Int. J. Plasticity*, **14-4-5** (1998), 355-372.
- (7) Kobayashi, M., Ohno, N. and Igari, T., *Int. J. Plasticity*, **14-4-5** (1998), 373-390.
- (8) Abdel-Karim, M・水野 衛・大野信忠, 材料, **48-2** (1999), 104-109.
- (9) 小幡谷洋一・Jin, Z. X・岡崎敦則, 機論, **62-601**, A (1995), 2149-2156.
- (10) Obataya, Y., *Proc. 6th Int. Conf. ICM*, **3** (1991), 751-756.
- (11) 小幡谷洋一・加藤貴也, 機論, **65-634**, A(1999), 1307-1313.