クリープ損傷を考慮したクリープ構成則を適用した
軸圧縮荷重を受ける円筒殻の分岐クリープ座屈解析*萩原 世也^{*1}, 宮崎 則幸^{*2}Computational Analysis Based on Creep Damage Mechanics for
Creep Bifurcation Buckling of Circular Cylindrical Shell Subjected
to Axial CompressionSeiya HAGIHARA^{*3} and Noriyuki MIYAZAKI^{*3} Saga University, Dept. of Mechanical Engineering, 1 Honjo, Saga, Saga, 840-8502 Japan

Cylindrical shells are utilized as structural elements of nuclear power plants, heat exchangers or pressure vessels, which are operated under elevated temperature. Creep buckling is one of the failure modes of structures at elevated temperature. In some experiments conducted by other authors, axially compressive cylindrical shells with a large ratio of radius to thickness were observed to buckle with circumferential waves. We reported that the circumferential waves occur due to bifurcation buckling. But, the critical time and the minimum loading for bifurcation buckling obtained from calculations of finite element analyses are not very good agreement with those of the experiments. One of the reasons for the disagreement is considered to be that the creep constitutive equations employed in many previous analyses represent steady creep. The creep phenomena usually have primary creep period, steady creep one and tertiary creep one. A creep strain-time relation through the three periods can be simulated by using a constitutive equation based on creep damage mechanics. In the present paper, we analyze bifurcation creep buckling of circular cylindrical shells subjected to axial compression by the use of the finite element method taking account of the creep damage mechanics of Kachanov-Rabotnov.

Key Words: Creep, Damage Mechanics, Buckling, Structural Analysis, Computational Mechanics, Finite Element Method, Cylindrical Shell, Bifurcation Buckling

1. 緒 言

円筒殻は、原子力機器の容器や圧力容器などの単位構造要素として様々な所に用いられている。これらの用途の内、クリープ現象が生じるような高温条件下で用いられることも多い。このような高温で使用される機器はクリープ変形による破損モードを考慮することが設計に際して重要である。円筒殻については、様々な負荷形態が作用する無限長や有限長の円筒殻について、変形や座屈に関する多くの研究がこれまでになされている⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾⁽⁴⁾⁽⁵⁾。著者らも、これまでに軸圧縮荷重を受ける有限長の円筒殻のクリープ座屈について、初期クリープと定常クリープを組み合わせたクリープ構成則を用い、分岐座屈を含めた有限要素法解析を行った。その結果クリープ座屈実験で見られる周方向に波

が発生する現象は、分岐座屈により波が発生する可能性があることを示した⁽⁶⁾。しかし、有限要素解析から得られた結果は、分岐座屈波数は実験結果とほぼ一致が見られるが、臨界時間や分岐座屈荷重については、半径と板厚の比(R/h)によっては、実験結果と解析間に若干の相違がみられた。これらの相違の原因は、主に実験の試験体の初期不完全性の影響が大きいと考えられている。しかしもう一つの相違の原因として、多くの解析が定常クリープの構成則を用いて行われており、クリープ変形が急激に大きく生じる第三期のクリープが考慮されていないため、クリープ構成則の相違の影響も考えられる。第三期クリープ領域においては、ミクロ的にはクリープボイドの成長に伴いクリープひずみが加速的に増加することが知られている。それに伴って不安定現象も起こりやすくなることが考えられる。そこでクリープ試験から得られた曲線に対して、クリープ構成則により現象を忠実に表すことが重要になる。そのためには、クリープボイドの成長によるクリープ損傷の効果を考慮したクリープ構成則により解析を行うことが必要になる。本論文で採用するクリープ損傷を考慮した構成則の提案はHayhurst⁽⁷⁾の損傷発展

* 原稿受付 1999年6月21日。

^{*1} 正員, 佐賀大学理工学部(☎840-8502 佐賀市本庄町1)。^{*2} 正員, 九州大学大学院工学研究科(☎812-8581 福岡市東区箱崎6-10-1)。

E-mail: hagihara@me.saga-u.ac.jp

則を用いて劉⁽⁸⁾⁽⁹⁾が行っており、これらを有限要素法のクリープ座屈の解析に取り入れることにより、より実験に近い解析結果が得られることが期待される。

したがって本論文では、クリープ損傷理論によりクリープ損傷を考慮したクリープ構成則を円筒殻のクリープ座屈に適用し、第三期クリープが臨界時間、分岐座屈荷重、座屈波数の現象解析へ与える影響を明らかにすることを目的とする。

2. 解 析 方 法

本論文のクリープ損傷を考慮した有限要素法分岐クリープ座屈解析は大きく分けて2つの部分から構成されている。まず軸対称クリープ変形解析を行い、負荷荷重に対してのクリープ損傷を考慮した軸対称のクリープ変形状態を求める。次に分岐座屈解析を行い、先に得られた軸対称クリープ変形状態に対して微小な変位変動を与え分岐座屈の発生を判定する⁽¹⁰⁾。

軸対称のクリープ変形を求める部分では、クリープひずみを初期ひずみとして取り扱い、増分形のエネルギー汎関数から以下のクリープ変形を考慮した弾性の有限要素法平衡方程式(1)を導く⁽¹⁰⁾。

$$\mathbf{K}^{(0)}\Delta\mathbf{U} = \Delta\mathbf{F}_a + \Delta\mathbf{F}_c + \Delta\mathbf{R} \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{K}^{(0)} = \mathbf{K}_e^{(0)} + \mathbf{K}_d^{(0)} + \mathbf{K}_\sigma^{(0)}$ であり、 $\mathbf{K}_e^{(0)}$ は弾性剛性マトリックス、 $\mathbf{K}_d^{(0)}$ は初期変位剛性マトリックス、 $\mathbf{K}_\sigma^{(0)}$ は初期応力剛性マトリックスである。 $\Delta\mathbf{F}_a$ は外荷重増分ベクトル、 $\Delta\mathbf{F}_c$ はクリープによる見かけの荷重ベクトル、 $\Delta\mathbf{R}$ は残差荷重ベクトルである。(.)はテンソル、(.)はベクトル、(0)は軸対称モードを表す。式(1)を各時間増分ステップで解くことにより節点変位増分 $\Delta\mathbf{U}$ を求め、加算していくことにより、その時間での軸対称のクリープ変形状態を求めることができる。 $\mathbf{K}^{(0)}$ では幾何学的非線形性を考慮し解析を行う。

分岐座屈の判定は軸対称のクリープ変形から得られた平衡状態に対して、円筒の周方向に以下の波数 n の微小変位変動 $\delta\mathbf{U}$ を与える⁽¹⁰⁾。

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{U} &= \{\delta u \ \delta w \ \delta v\} \\ &= \{\delta u^{(n)}\cos n\theta \ \delta w^{(n)}\cos n\theta \ \delta v^{(n)}\sin n\theta\} \quad (2) \end{aligned}$$

ここで、 u は子午線方向面内変位、 w は半径方向面外変位、 v は周方向変位である。この微小な変位変動を与えたことによる分岐座屈の発生は、次の式(3)が自明でない解を持つときである。

$$\mathbf{K}^{(n)}\delta\mathbf{U}^{(n)} = 0 \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{K}^{(n)}$ は系全体の波数 (n) のモードを持つ剛性マ

トリックスであり、 $\mathbf{K}^{(n)} = \mathbf{K}_e^{(n)} + \mathbf{K}_d^{(n)} + \mathbf{K}_\sigma^{(n)}$ で構成されている。また、 $\delta\mathbf{U}^{(n)} = \{\delta u^{(n)} \ \delta w^{(n)} \ \delta v^{(n)}\}$ である。式(3)が自明でない解を持つことは系全体の波数 (n) のモードの剛性マトリックス $\mathbf{K}^{(n)}$ の正値性により判定することができる。

クリープ損傷を考慮した解析におけるクリープ構成則はKachanov-Rabotnovの理論⁽¹¹⁾に基づき、等方的なクリープ損傷より定めた構成則⁽⁸⁾を用いた。

$$\frac{d\varepsilon^c}{dt} = B\left(\frac{\sigma}{1-D}\right)^n + c\beta\sigma^m \exp(-ct) \quad (4)$$

式(4)においては初期クリープの構成則がexponential関数型である。このときの損傷発展則には以下の式(6)を採用した。

$$\frac{dD}{dt} = \frac{A}{q+1} \frac{[\alpha\sigma_1 + (1-\alpha)\sigma]^p}{(1-D)^q} \quad (5)$$

また、比較のために損傷の効果を考慮しないクリープ構成則として以下の構成則も用いた解析を行う。

$$\frac{d\varepsilon^c}{dt} = B\sigma^n + c\beta\sigma^m \exp(-ct) \quad (6)$$

ここで、 ε^c は相当クリープひずみ、 σ は相当応力、 t は時間、 D は損傷変数、 σ_1 は最大主応力である。また、 B 、 c 、 β 、 m 、 n 、 A 、 α 、 p 、 q は材料定数である。損傷変数 D を考慮した材料の弾性係数 $E(D)$ は以下のものを用いた。

$$E(D) = \begin{cases} E_0 & D \leq D_{cr} \\ 0 & D \geq D_{cr} \end{cases} \quad (7)$$

ここで E_0 は初期の縦弾性係数であり、 D_{cr} は損傷変数の臨界値である。ここでは縦弾性係数が臨界損傷率以下では縦弾性係数を変化させず、臨界値に達すると零になる部分連成解析(partly coupled approach)⁽⁸⁾と呼ばれる式(7)採用した。他に完全連成解析(fully coupled approach)と呼ばれる縦弾性係数を損傷変数 D と共に低下させる方法があるが、本論文のクリープ座屈問題の完全連成解析では、軸方向収縮率の時間変化の立ち上がり付近で数値的に解析が困難な状況を呈することから、本論文では部分連成解析により解析を行った。

本論文の解析ではクリープひずみ速度をひずみ硬化則により求める。クリープひずみ速度を算出するのにクリープ損傷の効果を含む式(4)、式(5)を組み合わせた構成則および式(6)の構成則ではクリープひずみを用いてクリープひずみ速度を陽な形に表すことが困難であるため、Newton-Raphson法を用いて繰り返し収束計算により求めた。クリープひずみの多軸への拡張はミーゼス型のクリープポテンシャル理論に従い以下の式を用いた。

Fig.1 Dimensions of Cylindrical shell subjected to axial compression.

$$\frac{d\epsilon_{ij}^c}{dt} = \frac{3}{2} \frac{d\epsilon^c s_{ij}}{dt \bar{\sigma}} \quad (8)$$

ここで、 ϵ_{ij}^c はクリープひずみテンソルであり、 s_{ij} は偏差応力テンソルであり、Kroneckerのデルタ δ_{ij} を用いて $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk} \delta_{ij} / 3$ と表される。 σ_{ij} は応力テンソルである。これらを用いて式(1)を解くことにより、クリープ損傷を考慮した分岐モードを含むクリープ座屈解析を行うことができる。

3. 解析結果と考察

図1に示す軸圧縮荷重 σ を受ける円筒殻の分岐クリープ座屈の解析を行った。この円筒殻の形状は

半径： $R = 16\text{mm}$

円筒の高さ： $L = 50\text{mm}$

半径と板厚の比： $R/h = 16, 25, 50, 80$

であり、これは、Ohya¹²⁾が行った実験の円筒殻と同様の形状である。境界条件についてはクリープ座屈実験においては通常片端にのみバルジが生じるので、図1に示すように円筒殻の荷重端を自由、他端を半径方向変位のみの拘束に設定することにより、片端のみでバルジが生じるような境界条件に設定した⁶⁾。解析を行った形状パラメータである円筒の半径と板厚の比 R/h は、円筒殻の半径を固定し板厚を変化させることにより変化させ、 $R/h = 16, 25, 50, 80$ について解析を行った。材料定数はアルミニウム合金2024-T4の250℃の単軸引張り試験の結果から以下の通り求めた¹²⁾。

縦弾性係数： $E_0 = 6.786 \times 10^4 \text{ MPa}$

ポアソン比： $\nu = 0.3$

Fig.2 Experimental data and Creep strain obtained from Eq.4 and Eq.5.

Fig.3 End-shortening of cylindrical shell for $R/h=16$. Fig.4 End-shortening of cylindrical shell for $R/h=25$. Fig.5 End-shortening of cylindrical shell for $R/h=50$.

式(4), (5), (6)におけるクリープと損傷に関する係数は単軸クリープ試験⁽¹²⁾の結果より求めた。それらの値を以下に示す。

$$\begin{aligned} A &= 2.2783 \times 10^{-18}, \quad q = 4.0, \quad p = 7.7407, \quad \alpha = 1.0, \\ \beta &= 3.8649 \times 10^{-15}, \quad m = 5.4647, \\ F &= 1.15 \times 10^{-8}, \quad r = 2.1, \quad s = 0.27, \\ B &= 3.95 \times 10^{-17}, \quad n = 6.25, \quad c = 5.0, \\ D_{cr} &= 0.95 \end{aligned}$$

図2は式(4)のクリープ構成則と式(5)の損傷発展則から得られたクリープひずみの値を単軸クリープ試験の結果と同時にプロットしたものである。これより上記の定数を用いた式(4)と式(5)によるクリープ構成則は、 $\sigma = 137.3 \text{ MPa}$ においてずれが認められるが、クリープ試験の結果を第一期、第二期、第三期クリープを通してよく表していることがわかる。

図3には $R/h=16$ の円筒殻が軸圧縮を受ける場合における軸方向の収縮率の時間変化を示す。また図4には $R/h=25$ の場合の軸方向収縮率の時間変化、図5には $R/h=50$ の場合の軸方向収縮率の時間変化、図6には $R/h=80$ の場合の軸方向収縮率の時間変化を示す。これらの図中には、クリープ損傷解析とクリープ損傷を考慮しない解析の結果を同時に示している。ここで、 $R/h=16$ と $R/h=25$ の場合には、図中に示す軸圧縮荷重の範囲ではクリープ損傷解析、クリープ損傷を考慮しない解析のどちらも分岐座屈は生じなかった。 $R/h=50$ の場合には、図中に示す軸圧縮荷重 $\sigma = 196.1 \text{ MPa}$, 215.8 MPa の場合に、クリープ損傷解析のみで分岐座屈が発生した。 $R/h=80$ の場合には、クリープ損傷解析ではすべての図中に示すすべての軸圧縮荷重で、クリープ損傷を考慮しない解析では、 $\sigma = 156.9 \text{ MPa}$ の軸圧縮荷重のときのみで分岐座屈が発生した。

座屈前変形については、図4から図6までのすべての軸圧縮荷重の時について軸方向の収縮率がある時間に

おいて急激に立ち上がり変化している。そして分岐座屈はクリープ変形により軸方向収縮率の曲線が立ち上がった後、すなわちクリープによる変形量が急激に増加した後に生じていることがわかる。また、クリープ損傷を考慮した解析のクリープ損傷を考慮しない解析に対する臨界時間の変化率は $R/h=80$, $R/h=50$, $R/h=25$, $R/h=16$ において、平均でそれぞれ約0.2%, 0.5%, 2.0%, 2.7%である。そして円筒の半径と板厚の比が同一であれば、作用荷重による臨界時間の変化率はほぼ等しい。臨界時間の変化率は半径と板厚の比が小さい(板厚が厚い)方が大きく、クリープ損傷の影響が大きく現れることを示している。これは、軸対称のクリープ変形により拘束端付近にバルジを生じるため、板厚の厚い円筒は円筒の内外壁の応力が板厚の薄い円筒より高くなり、クリープによる損傷が促進されるためと考えられる。

表1に $R/h=16$ のときのクリープ損傷を考慮した解析から得られた座屈臨界時間と座屈波数を示す。同様に表2にはクリープ損傷を考慮しない解析から得られた、表3

Table 1 Critical time and number of circumferential waves calculated from analysis with creep damage for $R/h=16$.

Compression (MPa)	Critical time(h)	waves
137.3	30.5593	0
156.9	11.7922	0
176.5	4.1548	0
196.1	0.9072	0
215.8	0.3499	0
235.4	0.1801	2-5

Table 2 Critical time and number of circumferential waves calculated from analysis without creep damage for $R/h=16$.

Compression (MPa)	Critical time(h)	waves
137.3	31.3876	0
156.9	12.1220	0
176.5	4.25913	0
196.1	0.9247	0
215.8	0.3579	0
235.4	0.1850	0

Table 3 Critical time and number of circumferential waves obtained from experiment conducted by Ohya for $R/h=16$.

Compression (MPa)	Critical time(h)	waves
137.3	33.3	0
137.3	27.6	0
147.1	13.6	0
156.9	9.90	0
176.5	6.95	0

Fig.6 End-shortening of cylindrical shell for $R/h=80$.

にはOhyaの実験から得られた座屈臨界時間と座屈波数を示す。同様の順番で表4, 表5, 表6には $R/h=25$ の場合, 表7, 表8, 表9には $R/h=50$ の場合, 表10, 表11, 表12には $R/h=80$ の場合を示す。表4, 7, 10の座屈波数に幅があるのは, 各波数における分岐座屈発生時の臨界時間が非常に接近して分離できないことを示している。

実験結果の臨界時間は同じ軸圧縮荷重下でもばらつきがあるが, 本論文の結果は, どの作用荷重においても, ほぼ実験結果に近い結果が得られている。分岐座屈が発生する荷重に関しては, 表7, 8, 9の $R/h=50$ と表10, 11, 12の $R/h=80$ の場合, クリープ損傷を考慮した解析においては, 分岐座屈が生じる荷重が実験結果に近づいている。また, 表1, 2, 3の $R/h=16$ と表4, 5, 6の $R/h=25$ の解析においてもクリープ損傷を考慮した解析の方が低い荷重で分岐座屈を生じている。したがってクリープ損傷を考慮することにより, クリープ損傷を考慮しない場合よりも, 分岐座屈が発生しやすく

Table 4 Critical time and number of circumferential waves calculated from analysis with creep damage for $R/h=25$.

Compression (MPa)	Critical time(h)	waves
137.3	17.4009	0
156.9	5.8599	0
176.5	1.0933	0
196.1	0.3574	4-5
215.8	0.1714	4-6
235.4	0.0946	4-6

Table 5 Critical time and number of circumferential waves calculated from analysis without creep damage for $R/h=25$.

Compression (MPa)	Critical time(h)	waves
137.3	17.7536	0
156.9	5.9592	0
176.5	1.1069	0
196.1	0.3635	0
215.8	0.1748	0
235.4	0.0967	0

Table 6 Critical time and number of circumferential waves obtained from experiment conducted by Ohya for $R/h=25$.

Compression (MPa)	Critical time(h)	waves
137.3	27.6	0
156.9	5.54	0
156.9	4.49	0
176.5	0.657	0
176.5	0.837	0

なっていることがわかる。このことから, 分岐座屈の発生はクリープの第三期クリープを考慮する, しないにより左右されることがわかる。第三期クリープがより適切に表現されることにより, 実験結果との分岐座

Table 7 Critical time and number of circumferential waves calculated from analysis with creep damage for $R/h=50$.

Compression (MPa)	Critical time(h)	waves
60.8	1656.9	0
98.1	72.320	0
137.3	5.2717	0
156.9	0.6802	0
176.5	0.2304	0
196.1	0.1064	2-5
215.8	0.0565	4-5
235.4	0.0313	4-5

Table 8 Critical time and number of circumferential waves calculated from analysis without creep damage for $R/h=50$.

Compression (MPa)	Critical time(h)	waves
60.8	1669.5	0
98.1	73.135	0
137.3	5.2981	0
156.9	0.6838	0
176.5	0.2323	0
196.1	0.1077	0
215.8	0.0565	3
235.4	0.0317	4

Table 9 Critical time and number of circumferential waves obtained from experiment conducted by Ohya for $R/h=50$.

Compression (MPa)	Critical time(h)	waves
60.8	710	0
98.1	81.3	0
137.3	7.08	3
137.3	14.2	4
156.9	1.33	4

Table 10 Critical time and number of circumferential waves calculated from analysis with creep damage for $R/h=80$.

Compression (MPa)	Critical time(h)	waves
117.7	8.487	4-6
137.3	0.8025	5-6
156.9	0.2171	5

Table 11 Critical time and number of circumferential waves calculated from analysis without creep damage for $R/h=80$.

Compression (MPa)	Critical time(h)	waves
117.7	8.499	0
137.3	0.8040	0
156.9	0.2181	5

Table 12 Critical time and number of circumferential waves obtained from experiment conducted by Ohya for $R/h=80$.

Compression (MPa)	Critical time(h)	waves
117.7	10.6	6
117.7	13.2	6
137.3	2.31	6
137.3	2.07	6
156.9	0.108	7
156.9	0.378	6
156.9	0.263	7

屈が発生する荷重とのギャップも少なくなる。また、座屈波数については $R/h=80$ と $R/h=50$ の解析結果より、実験結果に近い座屈波数が得られていることがわかる。

4. 結 言

本論文では軸圧縮荷重を受ける円筒殻のクリープ座屈について、クリープ損傷により第三期クリープ表すことができる構成則を用いた解析を行い、通常のクリープ損傷を考慮しない解析から得られた結果と比較を行った。その中で特に臨界時間、分岐座屈が生じる荷重、座屈波数について比較を行い以下の結論が得られた。

1. 座屈臨界時間については第三期クリープの影響による相違はほとんど見られない。
2. 分岐座屈の発生については、第三期クリープの影響により不安定現象が起こりやすくなることが分かった。
3. クリープ損傷を考慮した解析を行うことにより、より実験結果に近い分岐座屈が生じるクリープ座屈荷重が得られた。

したがって円筒のクリープ座屈に関しては、第三期

クリープの現象が分岐座屈の発生に影響を与えるため、クリープ損傷を考慮した第三期クリープ現象を含むクリープ座屈解析が必要である。これによりこれまで相違が大きかったクリープ座屈実験に近い結果が得られることを示した。

5. 文 献

- (1) Levi, I. M. and Hoff, N. J., (Hult, J. 編), Interaction between Axisymmetric and Nonsymmetric Creep Buckling of Circular Cylindrical Shells in Axial Compression, *Creep in Structures* 1970, (1972), Springer-Verlag, pp.405-423.
- (2) 村上, 田中, 円筒かくのクリープ座屈における非対称初期不完全性の影響, *日本機械学会論文集*, 43-374, (1977), pp.3682-3690.
- (3) Obrecht, H., Creep Buckling and Postbuckling of Circular Cylindrical Shells under Axial Compression, *Int. J. Solids Struct.* 13-4, (1977), pp.337-355.
- (4) 大橋, 村上, 田中, 円筒殻のクリープ座屈における瞬間的分岐 *日本機械学会論文集*, 44-377, (1978), pp.22-31.
- (5) 宮崎, 宗像, 軸圧縮荷重を受ける円筒殻のクリープ座屈解析, 51-467, A, (1985), pp.1879-1885.
- (6) 萩原, 宮崎, 宗像, 軸圧縮荷重を受ける円筒殻の分岐クリープ座屈解析, *日本機械学会論文集*, 56-529, A, (1990), pp.1957-1961.
- (7) Hayhurst, D. R., Brown, P. R. and Morroison, C. J., The Role of Continuum Damage Creep Crack Growth, *Philosophical Transactions of the Royal Society London*, A, 311 (1984), pp.131-158.
- (8) 劉, 村上, 山田, 金川, クリープ破壊に対する局所的解析方の有限要素依存性, *日本機械学会論文集*, 61-589, A, (1995), pp.2030-2036.
- (9) 劉, 村上, 山田, 金川, 損傷発展式の応力敏感性と局所的解析法における有限要素依存性, *材料*, 44-507, A, (1995), pp.1417-1422.
- (10) Miyazaki, N., On the Finite Element Formulation of Bifurcation Mode of Creep Buckling of Axisymmetric Shells, *Computer & Structures*, 23-3, (1986), pp.357-365.
- (11) Kachanov, L.M., Introduction to Continuum Damage Mechanics, Marinus Nijhoff Pub., (1986), p.11.
- (12) Ohya, H., An Experimental and Theoretical Investigation of Creep Buckling, *Trans. 4th Int. Conf. Struct. Mech. Reactor Technol.*, L8/9 (1977).