簡易大変形解析法の評価*
(厚い有孔円板の三次元大変形解析)小田 憲司*¹, 岸田 路也*¹Valuation of a Simplified Analytical Method for Large Deformation
(3-Dimensional Large Deformation Analysis of Thick Circular Plate with a Hole)Kenji ODA*² and Michiya KISHIDA*² Hokkaido University, Division of Mechanical Science,
Kita 13, Nishi 8, Kita-ku, Sapporo, Hokkaido, 060-8628 Japan

In recent years, composite materials contained synthetic resin are used widely as structural materials. In these materials, large deformations are often allowed and analyses of large deformation problems are often required. But analytical method by finite deformation theory is complex and take large time for calculation. Especially on unsteady state large deformation, it is more complex and hard to deal with this method. Therefore simplified analytical methods for large deformation are needed. We adopt one of them that updates only locations of nodal points of finite elements with its displacements at each incremental step. It is the purpose of this paper that we show efficiency of this method, and we'll estimate exactitude of it by a exact method that is formulated on the convected coordinates. Examples for analysis are uniformly loaded thick circular plates with a hole on several support conditions and the 3-dimensional finite element method is used as a numerical method.

Key Words: Elasticity, Finite Deformation Theory, Bending, Finite Element Method, Convected Coordinates, Spatial Coordinates, Linear Incremental Method

1. ま え が き

物体の変形を厳密に扱う場合、形状変化を考慮した有限変形理論による解析が必要となる⁽¹⁾⁽²⁾。しかしこのような非線形問題を理論解析的に解くことは困難な場合が多く、また鉄鋼中心の金属構造物の強度解析は微小変形理論でほぼ対応できるため、はじめは微小変形理論による解法が中心となって発展した。有限変形理論による解法⁽³⁾が大きく発展するには、電子計算機の十分な発達と有限要素法の登場を待たねばならなかった。1970年代に入り増分形の有限要素法による埋込座標系を基準とした解法⁽⁴⁾や空間固定座標系を基準とした update Lagrange 法と呼ばれる解法⁽⁵⁾⁽⁶⁾が確立し、多くの静的弾性問題の有限変形解析が可能となった。

近年登場してきた FRP 等の合成樹脂系の複合構造用材は変形のしやすさからくる高いエネルギー吸収率を特長としており、金属構造用材に比べ格段に大変形での解析を必要とする。このためには、厳密な有限変

形理論による解法以外に、少々大まかでも扱いやすく、すぐ結果の得られる近似解法が必要となる。また動的大変形などの非定常問題では、幾何学的非線形性の厳密な考慮は複雑さと演算時間の両方の多大な増加を伴うため、さらに近似解法の必要性が増す。

さてここに、有限変形理論による解法の確立直前の一時期登場し、その後ほとんど省みられなくなった近似解法がある。それは線形弾性論の解法を増分形式にし、各増分ごとに要素の節点座標のみ移動させる解法⁽⁷⁾である。ここではこの近似解法を採り上げ、今までなされなかった明確な定式化と近似度の説明を試み、解析結果よりその適用性の程度を評価する。評価基準には、以前に古典平板理論解と高次せん断変形理論解の大変形での適用性の評価⁽⁸⁾⁽⁹⁾に用いた、埋込座標系の有限変形理論に基づく三次元有限要素法⁽⁴⁾の解を用いる。解析の対象は面外分布荷重を受ける中心に孔のある厚い円板とし、最大たわみが板厚の2倍程度までの変形過程に対し、支持条件が適用性の程度に与える影響について検討する。ここでの目的はこの解法が簡易大変形解析法として十分有効であることを示すことにある。

* 原稿受付 1999年4月16日。

*¹ 正員、北海道大学大学院工学研究科(〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)。

E-mail: oda@eng.hokudai.ac.jp

2. 理 論

2.1 埋込座標法⁽²⁾⁽⁴⁾ 物体の各質点に埋込まれた座標が物体とともに変形する埋込座標系に対し、各増分変形前の状態を基準とした増分理論を有限要素法に定式化した解法であり、ここでは便宜上、埋込座標法(Convected Coordinate Method)と命名する。解析手順が複雑で演算時間も多大となるが、信頼度の高い解法である。

ある有限変形後の状態 C(任意の点の位置ベクトルを $\mathbf{R}$, その共変基本ベクトルを $\mathbf{G}_i$, 反変基本ベクトルを $\mathbf{G}^i$) と、その後に微小変形が加わった状態 $\bar{C}$ (任意の点の位置ベクトルを $\bar{\mathbf{R}}$, その共変基本ベクトルを $\bar{\mathbf{G}}_i$, 反変基本ベクトルを $\bar{\mathbf{G}}^i$) を埋込座標系で考える。その間の任意点の微小変位 $\Delta \mathbf{u} = \bar{\mathbf{R}} - \mathbf{R}$ によりひずみ増分テンソル $\Delta \gamma_{ij}$ は次のように表すことができる。

$$\Delta \gamma_{ij} = \frac{1}{2}(\Delta u_{i|j} + \Delta u_{j|i}) \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで $\Delta \mathbf{u} = \Delta u^i \mathbf{G}_i = \Delta u_i \mathbf{G}^i$ であり、 $\Delta u_{i|j}$ は Δu_i の共変導関数の j 成分である。一方、物体内の任意面上の応力ベクトルの増分 $\Delta \mathbf{t}$ は、状態 C の Euler 応力 τ^{ij} とその増分 $\Delta \tau^{ij}$ で状態 $\bar{C}$ の Euler 応力が $\bar{\tau}^{ij} = \tau^{ij} + \Delta \tau^{ij}$ と置けると、次のように表すことができる。

$$\Delta \mathbf{t} = n_i(\Delta \tau^{ij} + \tau^{ij} \Delta u^m|_m + \tau^{im} \Delta u^j|_m) \mathbf{G}_j \quad \dots\dots\dots (2)$$

ただし、 n_i は面の単位法線ベクトルの共変成分である。状態 $\bar{C}$ における物体内の任意領域 $\bar{\tau}$ での釣合いは、密度を $\bar{\rho}$, 物体力を $\bar{\mathbf{F}} = \bar{F}^j \bar{\mathbf{G}}_j$ とすると、

$$\int_{\bar{\tau}} (\bar{\tau}^{ij}|_i + \bar{\rho} \bar{F}^j) \bar{\mathbf{G}}_j d\bar{\tau} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

のように表せる。ここで $\rho, \mathbf{F} = F^j \mathbf{G}_j$ を状態 C における量とし、 $\bar{F}^j = F^j + \Delta F^j$ とすると、増分量に対する平衡条件式は以下のように求まる。

$$\Delta \tau^{ij}|_i + (\tau^{ij} \Delta u^m|_m)|_i + \tau^{im} (\Delta u^j|_m)|_i + \rho \Delta F^j = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

よって表面力が $\bar{p}^j = p^j + \Delta p^j$ であるとき、仮想変位 δu_j による増分量に対する仮想仕事の式を、状態 C の量で表すと以下ようになる。ただし、 S, τ は C における物体の表面積および体積である。

$$\begin{aligned} & \iiint_{\tau} (\Delta \tau^{ij} + \tau^{ij} \Delta u^m|_m + \tau^{im} \Delta u^j|_m) \delta u_{j|i} d\tau \\ &= \iint_S (\Delta p^j + p^m \Delta u^j|_m) \delta u_{j|n} dS \\ &+ \iiint_{\tau} \rho (\Delta F^j + F^m \Delta u^j|_m) \delta u_j d\tau \quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

次に有限要素法による定式化を考える。ここで要素内の変位増分 $\Delta \mathbf{u}$ とその成分の共変微分は次のように

表せるものとする。

$$\Delta \mathbf{u} = \varphi_N \Delta u_N^i \mathbf{G}_i \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\Delta u^j|_i = \varphi_N \Phi_{i|j}^j \Delta u_N^j \quad \dots\dots\dots (7)$$

ただし φ_N は要素 N の形状関数、 Δu_N^j はその節点変位増分の j 方向成分である。式(5)がいかなる仮想変位に対しても成り立つことから、有限要素法のための増分形の方程式が次のように得られる。

$$\begin{aligned} & \iiint_{\tau} (\Delta \tau^{ik} + \tau^{ik} \Delta u^m|_m + \tau^{im} \Delta u^k|_m) \Phi_{k|i}^j d\tau \\ &= \iint_S (\Delta p^j + p^m \Delta u^j|_m) \varphi_N dS \\ &+ \iiint_{\tau} \rho (\Delta F^j + F^m \Delta u^j|_m) \varphi_N d\tau \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

ここでは材料は均質等方で Hooke の法則が成り立つものとして、その構成式を

$$\Delta \tau^{ij} = E^{ijkl} \Delta \gamma_{kl} \quad \dots\dots\dots (9)$$

のように表す。ただし、

$$E^{ijkl} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left\{ G^{ik} G^{jl} + G^{il} G^{jk} + \frac{2\nu}{1-2\nu} G^{ij} G^{kl} \right\}$$

である。式(8)に式(1), (6), (7), (9)を代入することにより、増分形の有限要素方程式が完成する。

2.2 線形増分法⁽¹⁾⁽⁷⁾ 各増分段階で、変形に従って要素の節点座標値のみを修正していく近似解法であり、ここでは線形増分法(Linear Incremental Method)と命名する。いままで、定式化のための明確な説明がなされず応力やひずみなどの物理量の定義が不明りょうであるとされてきたが⁽⁴⁾、ここでは空間固定デカルト座標系に対する Updated 型の増分法として近似の程度について説明する。

埋込座標法と同様な状態 C と状態 $\bar{C}$ を空間固定座標系で考える。状態 $\bar{C}$ における物体内の任意領域 $\bar{\tau}$ での釣合いは Euler 応力 $\bar{\tau}^{ij}$, 物体力 $\bar{F}^j$, 密度 $\bar{\rho}$ で次のように表せる。

$$\int_{\bar{\tau}} (\bar{\tau}^{ij}|_i + \bar{\rho} \bar{F}^j) d\bar{\tau} = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

これを状態 C の量で表現すると、

$$\int_{\tau} \{ \sigma^{ij}|_i + (\sigma^{ik} u^j_{,k})_{,i} + \rho F^j \} d\tau = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

となる。ただし、 σ^{ij} は Kirchhoff の応力テンソルであり、下添字 i は i による偏微分を示す。

状態 C から $\bar{C}$ への微小変形過程で生じた変位増分と応力増分をそれぞれ $\Delta u_i = \bar{u}_i - u_i$, $\Delta \sigma^{ij} = \bar{\sigma}^{ij} - \sigma^{ij}$ とすると、式(11)より微小増分量に対する物体内部の平衡条件式は以下のように示される。

$$\Delta \sigma^{ij}|_i + (\Delta \sigma^{ik} u^j_{,k} + \sigma^{ik} \Delta u^j_{,k})_{,i} + \rho \Delta F^j = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

また Green のひずみ増分は変位増分の高次項を省略して、

$$\begin{aligned}\Delta \varepsilon_{ij} &= \bar{\varepsilon}_{ij} - \varepsilon_{ij} \\ &= \frac{1}{2}(\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i} + \Delta u_{k,i} u_{j,k}^k + u_{i,k}^k \Delta u_{k,j}) \\ &\dots\dots\dots(13)\end{aligned}$$

と与えられる。

ここで、状態 C で物体の座標値が更新されるとすると、平衡条件式とひずみ増分の式は簡略化され、

$$\Delta \sigma_{,i}^{ij} + (\sigma^{ik} \Delta u_{,k}^{j,k})_{,i} + \rho \Delta F^j = 0 \dots\dots\dots(14)$$

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i}) \dots\dots\dots(15)$$

となる。式(15)は微小ひずみの式であり、式(14)は $\sigma^{ik} \Delta u_{,k}^{j,k} = 0$ とすると、微小変形での平衡条件式

$$\Delta \sigma_{,i}^{ij} + \rho \Delta F^j = 0 \dots\dots\dots(16)$$

となる。このようにして線形増分法の基礎概念が与えられる。ただし $\sigma^{ik} \Delta u_{,k}^{j,k}$ の項の無視は、すでに生じている応力の、変形に伴う再配分の無視に等しい。また結果として、各増分区間内では Euler 応力増分と Kirchhoff の応力増分は同じ値となる。

ここで式(15)、(16)を参考に、埋込座標法と同様に仮想仕事の原理を以下のように導入する。

$$\iiint_{\tau} \Delta \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\tau = \iint_S \Delta p^j \delta u_j dS + \iiint_{\tau} \rho \Delta F^j \delta u_j d\tau \dots\dots\dots(17)$$

$\Delta \sigma^{ij}$ と $\Delta \varepsilon_{ij}$ の間に Hooke の法則 ($\Delta \sigma^{ij} = E^{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl}$) が成り立つものとする、弾性微小変形理論の有限要素方程式と同形の増分形の方程式が得られる。

有限要素法への定式化における煩雑さの最大原因で

Fig. 1 Shape and coordinates

Fig. 2 Support conditions

ある物理量の変化の考慮を、このように省略したことにより、線形弾性有限要素法の一部を修正するだけの簡単な解法が得られた。

3. 解析条件および有限要素モデル

図1に解析形状と座標系を示す。外半径 a 、内半径 b 、板厚 h の中心に孔を持つ円板が、下面に垂直上向きの一様分布荷重 p を受けている。支持条件は図2に示すように、条件1：外周自由、内周固定、条件2：外周固定、内周自由、条件3：外周固定、内周可動片に固定、条件4：外周固定、内周固定、の4例であり、すべて板厚比 $a/h=15$ 、内外径比 $b/a=0.5$ 、ポアソン比 $\nu=0.4$ である。有限要素モデルには、20 節点六面体アイソパラメトリック要素のみを用い、実際の解析は θ 方向の対称性を考慮して中心角 5° の範囲についてのみ行う。さらに、外(内)周での固定支持条件 $w=0$ 、 $\partial w/\partial r=0$ (ただし w は z 方向変位) を満足させるために、外(内)辺で $-h/2 \leq z \leq h/2$ にわたって要素を外(内)周に対称で領域内外にまたがるように置き、その要素が外(内)周に関して対称変形するように解析する。4 例とも総要素数 360、総節点数 2733 であり、最大たわみが板厚の 2 倍までの変形過程に対し、24 段階の増分解析を行う。

4. 結果および考察

埋込座標法での演算時間に比べ線形増分法の演算時間は、1/4 程度に軽減した。

図3に線形増分法(LI)、埋込座標法(CC)の解における、分布荷重 p と最大たわみ $w_{\max}$ の関係を示す。図3(a)、(b)、(c)、(d)がそれぞれ条件1、条件2、条件3、条件4である。ただし p は無孔円板の古典平板理論解を参考に縦弾性係数 E と a/h を用いて無次元量 $(p/E)(a/h)^4$ で表し、 $w_{\max}$ は無次元量 $w_{\max}/h$ で表す。4 例とも二つの解の差はたわみの増加とともに急激に広がり、その差は、埋込座標法で $w_{\max}/h=0.5$ の荷重においては条件1、条件2、条件3、条件4でそれぞれ板厚 h の 0.3%、0.4%、0.4%、0.7% であり、 $w_{\max}/h=1.0$ においては 3.1%、4.5%、7.0%、8.8% であり、 $w_{\max}/h=1.5$ においては 9.1%、12.5%、16.8%、23.1% であり、 $w_{\max}/h=2.0$ においては 17.3%、22.8%、27.3%、46.3% である。また支持条件間の比較では、条件1、2、3、4の順に二つの解の差が大きくなっており、同時に必要とする荷重も増加している。このことから、線形増分法のたわみに関する適用性の程度は変形しにくい支持条件ほど低いことがわかる。例えば許容誤差を 5% とすると、条件3と条

Fig. 3 Relation between distributed load and maximum deflection

件4は $w_{\max}/h=1.0$ ではもはや適用できない。ただし $w_{\max}/h=0.5$ 程度までであれば誤差はすべて1%以内となり、支持条件によらずこの解法は適用可能と言えるであろう。

次に最大たわみが同じときの線形増分法と埋込座標法の中央面のたわみ曲線を比較すると、両者にあまり差のないことがわかる。図4にその差が最も顕著な $w_{\max}/h=2.0$ でのたわみ曲線を示す。両者間にやや大きめの隔たりが見られる条件4以外ではほとんど一致しており、二つの解では変形に必要な荷重は異なるが、変形形状にはあまり差はないものと考えられる。これらを参考に、次にひずみの検討を行う。まず図5に、埋込座標法の半径方向垂直ひずみ $\varepsilon_r (\equiv \gamma_{rr})$ と円周方向垂直ひずみ $\varepsilon_\theta (\equiv \gamma_{\theta\theta})$ の上面 ($z/h=0.5$) での値の半径方向分布を示す。図5(a)は条件1、(b)は条件2、(c)は条件3、(d)は条件4であり、変形状態は $w_{\max}/h=0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ の四段階とする。ただし無次元化に用いた $\varepsilon_0=3(1-\nu^2)pa^2/8Eh^2$ はそのときの分布荷重 p による無孔円板の古典平板理論解 ($r=0, z/h=0.5$ での $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$) である。板厚断面での分布形状は $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ とほぼ直線であり、ここに示さなかった板

Fig. 4 Distribution of deflections ($w_{\max}/h=2.0$)

厚方向垂直ひずみ $\varepsilon_z (\equiv \gamma_{zz})$ は $\sigma_z=0$ と仮定して ε_r と ε_θ から求めた値⁽⁸⁾ と近い分布を示し、板厚方向せん断ひずみ γ_{rz} は板の上面と下面で零、ほぼ中央面で最大となる放物線状の分布を示す。

次にこの埋込座標法の解を用い、線形増分法のひずみに関する適用性の程度を評価する。ただし線形増分法の解は、各増分段階で求めたひずみを空間に固定された座標系で加算したものであり、座標系が物体とともに変形する埋込座標法の解とそのままだ比較するのは不自然である。そこで各増分ひずみを要素の剛体回転

Fig. 5 Distribution of strains in the radius-direction (convected coordinate method $z/h=0.5$)

を考慮して修正し、それを加算したものを用いる。具体的には各増分段階を微小変形とみなしているため、回転の増分も微小変形場の式を用い、

$$\Delta\omega_{ij} = \frac{1}{2}(\Delta u_{j,i} - \Delta u_{i,j}) \quad \dots\dots\dots (18)$$

とし、これを加算したもの

$$\omega_{ij}^n = \sum_{k=1}^n \Delta\omega_{ij}^k \quad (n \text{ は現変形段階})$$

をその微小要素の回転角とする。ただしここでは θ 方向の対称性より ω_{rz} のみを考慮すればよい。そして任意方向のひずみへの変換式より回転方向の増分ひずみ成分 $\Delta\varepsilon'_{ij}$ を求め、それを加算して求めたひずみ ε'_{ij} を評価の対象とする。この回転の影響が最も顕著なのが γ_{rz} であり、図 6 にその一例として条件 1 の $w_{\max}/h=2.0$ での $r/a=0.75$ 断面における γ_{rz} の板厚方向分布を示す。ただし修正された線形増分の解を LI'、そのままの解を LI とする。ここで修正された線形増分法のひずみ $(\varepsilon'_{ij})^{LI'}$ と埋込座標法のひずみ $(\varepsilon_{ij})^{CC}$ の差を、

$$\Delta(\varepsilon_{ij}) = (\varepsilon'_{ij})^{LI'} - (\varepsilon_{ij})^{CC} \quad \dots\dots\dots (19)$$

のように表し、これを ε_0 で無次元化したものを線形

Fig. 6 Distribution of shear-strains γ_{rz} in the thickness-direction ($r/a=0.75$)

増分法のひずみの誤差とする。図 7 に ε_r と ε_θ の上面での誤差を示す。条件 1, 条件 2 の自由端側を除き、板上面のほぼ全域で $\Delta(\varepsilon_\theta)$ は $\Delta(\varepsilon_r)$ より小さな値を示す。これらのうち両端面 ($r/a=0.5$ および 1.0) に近づくと急に誤差を増す分布が多くみられるが、これには有限要素法解析特有の端面近傍の乱れの影響も考えられる。そこで誤差を定量的に示すにあたり、ここでは範囲を $0.55 \leq r/a \leq 0.95$ に限定する。条件 1, 条件 2, 条件 3, 条件 4 のそれぞれにおいて、

Fig. 7 Distribution of errors of strains in the radius-direction ($z/h=0.5$)

$|\Delta(\varepsilon_r)/\varepsilon_0|$ の上面での最大値は $w_{\max}/h=0.5$ で 1.9%, 0.7%, 0.8%, 0.8%, $w_{\max}/h=1.0$ で 3.5%, 1.1%, 1.4%, 1.5%, $w_{\max}/h=1.5$ で 4.3%, 1.9%, 1.7%, 1.8%, $w_{\max}/h=2.0$ で 4.9%, 2.2%, 2.1%, 2.0% であり, $|\Delta(\varepsilon_\theta)/\varepsilon_0|$ のは $w_{\max}/h=0.5$ で 0.1%, 0.7%, 0.1%, 0.0%, $w_{\max}/h=1.0$ で 0.3%, 0.8%, 0.2%, 0.0%, $w_{\max}/h=1.5$ で 0.7%, 1.4%, 0.2%, 0.1%, $w_{\max}/h=2.0$ で 0.5%, 1.9%, 0.2%, 0.1% である. ε_r の最大誤差は $w_{\max}/h=0.5$ でもやや大きめであるが, その後の増加はさほど急激でなく, 同じ最大たわみでの比較では, たわみの増加に対する適用性の程度はひずみに関しては割合高いと言える. また支持条件とひずみの誤差との関係では, 誤差は条件 1, 2, 3, 4 の順に小さくなっているように見える. しかし図 5 に示すように, $|\varepsilon_r/\varepsilon_0|$ の上面での最大値は条件 1 で 2.8, 条件 2 で 1.3, 条件 3 で 0.9, 条件 4 で 0.4 であり, 異なる支持条件の誤差比較ではこのことも考慮すべきである. すると線形増分法のひずみに関する適用性の程度も, 変形しにくい支持条件ほど低いというたわみのときと同様の傾向が示される. 具体的には, $|\Delta(\varepsilon_r)/(\varepsilon_r)_{\max}|$ の上面での最大値は $w_{\max}/h=2.0$ で条

件 1, 2 が 2% 以下, 条件 3 が 2% 程度, 条件 4 が 5% 程度である. ただし $(\varepsilon_r)_{\max}$ は上面での最大値である. さらに図示しなかったひずみ成分に言及すると, $|\Delta(\varepsilon_z)/\varepsilon_0|$ の上面での最大値は $|\Delta(\varepsilon_r)/\varepsilon_0|$ のそれと同程度かそれ以下であり, $|\Delta(\gamma_{rz})/\varepsilon_0|$ の中央面での最大値はそれよりも小さい. これより, 数% の誤差を許容するならば条件 1, 2, 3 で, 5% ならば条件 4 でも $w_{\max}/h=2.0$ まで適用可能であると言える.

5. ま と め

等分布荷重を受ける有孔円板の大変形問題において, 線形増分法の解の適用性の程度を埋込座標法によって検討することにより, 以下のことが明らかになった.

(1) たわみの誤差は, 変形の進展に対し急激に増加し, 変形しにくい支持条件ほどその誤差は大きくなるが, 最大たわみが板厚以下であればある程度適用可能である.

(2) 同じ最大たわみで評価したひずみの誤差は, 変形の進展に対しさほど増加せず, 最大たわみが板厚の 2 倍程度まで広範囲に適用可能である.

以上より、今回の解析対象のように、要素の剛体回転に比べ要素の変形がさほど大きくない問題に対しては、線形増分法が簡易大変形解析法として十分有効であるといえる。さらに、この解法が非定常などより複雑な問題の大変形挙動に対しても、複雑さをさほど増さずに対応できる強力な解析手法と成り得ることが予想される。

文 献

- (1) 山本善之, 有限変位の弾性論, 現代応用数学 B. 7-b. I, (1957), 2, 岩波書店.
- (2) Green, J. T. and Zerna, W., *Theoretical Elasticity*, (1968), 53, Oxford.
- (3) Oden, J. T., *Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design*, (1971), 693, Univ. of Alabama Press.
- (4) 北川浩・瀬口靖幸・富田住宏, 機論, **38**-307(1972), 479-489.
- (5) 鷲津久一郎・ほか4名, 有限要素法ハンドブック(II応用編), (1993), 270, 培風館.
- (6) 山田嘉昭, 機誌, **79**-691(1976), 517-524.
- (7) 山田嘉昭, 東京大学生産技術研究所, 第8回講習会テキスト4, (1970).
- (8) 岸田路也・小田憲司・齋藤憲一, 機論, **59**-561, A(1992), 1232-1237.
- (9) 岸田路也・小田憲司・齋藤憲一, 機論, **61**-588, A(1995), 1777-1782.