V 形切欠きの塑性応力拡大係数*

牛島 邦晴^{*1}, 陳 玳 珩^{*2}, 切手 直人^{*3}

Plastic Stress Intensity Factor for a V-Shaped Notch

Kuniharu USHIJIMA, Dai-Heng CHEN^{*4} and Naoto KITTE^{*4} Science University of Tokyo, Faculty of Engineering,
Kagurazaka 1-3, Shinjuku-ku, Tokyo, 162-8601 Japan

In the present study, the plastic singular stress occurring in a wedge is studied by using the finite element analysis. The results so obtained are in a good agreement with the results by the asymptotic analysis obtained by the authors previously. Based on the numerical results, the K_p of plastic stress intensity factor and the K_e of elastic stress intensity factor for various notch tip are determined. It is found that value of $K_p^{1-\lambda_e}/K_e^{1-\lambda_p}$ is independent of the strength of the singular stress field, where $1-\lambda_e$ and $1-\lambda_p$ are the orders of elastic and plastic singularity, respectively. Also, it is found that $K_p^{1-\lambda_e}/K_e^{1-\lambda_p}$ is almost constant with respect to γ for $\gamma \leq 90^\circ$. These facts enable one to evaluate K_p without using a plastic stress analysis.

Key Words: Plasticity, Nonlinear Problem, Stress Intensity Factor, Notch, Stress Singularity, Plane Problem

1. 緒 言

V 形切欠き先端に生じる応力特異性の問題は、これまで線形の弾性問題として多くの研究^{(1)~(4)}によって検討されている。しかし、実際の切欠き先端では少なからず塑性変形が生じ、応力特異性が緩和される。したがって V 形切欠きを有する構造物に対してより適切な強度評価を行うためには、その応力特異性に及ぼす塑性変形の影響を考慮する必要がある。

そうした塑性特異応力場を把握するため、次の三つのものを求めなければならない。

1. 応力特異性の次数, すなわち特異応力場を

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{K}{r^{1-\lambda}} f_{ij}(\theta) \dots\dots\dots (1)$$

で表すとき、その指数 $1-\lambda$

2. 特異応力場の様式, すなわち式(1)中の各方向に沿う特異応力の分布を表す関数 $f_{ij}(\theta)$
3. 特異応力場の強さ, すなわち式(1)中の係数 K

項(1)と項(2)は特異応力場を有する応力集中部に対し固有関数展開法などを適用すれば求めることができる。例えば、Hutchinson⁽⁵⁾, Rice⁽⁶⁾ および Shih⁽⁷⁾ は、き裂先端における塑性応力特異性の問題を、Airy の応力関数に関する 4 階非線形微分方程式の固有値問題に変換し、加工硬化特性が n 乗硬化則で与えられている場合の応力特異性の次数と特異応力場の様式を求めている。また Xia ら⁽⁸⁾ と Duvá⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾ は、Hutchinson の手法⁽⁵⁾ を V 形切欠きの問題に適用し、項(1)と項(2)について解析および検討を行っている。一方著者らは先に、Hutchinson ら⁽⁵⁾ とは異なる固有関数展開法に基づく弾塑性応力特異性の解析手法⁽¹¹⁾ を提案し、任意の開き角および境界条件を持つ、V 形切欠き先端まわりの塑性応力特異性について解析および検討を行った。

特異応力場を一意的に決定するためには、項(1)と項(2)を求めた後で、項(3)である特異応力場の強さを求めなければならない。しかし項(1)、項(2)とは異なり、特異応力場の強さは、切欠き先端から離れた所の構造物の形状や、荷重の大きさなどにも関係している。したがって特異応力場の強さに影響を及ぼす各影響因子を解明してゆくためには、多くのパラメータサーベイが必要となってくる。また、特異応力場の強

* 原稿受付 1999 年 8 月 25 日。

^{*1} 准員, 東京理科大学大学院。^{*2} 正員, 東京理科大学工学部 (〒162-8601 東京都新宿区神楽坂 1-3)。^{*3} 東京理科大学大学院。

E-mail: chend@me.kagu.sut.ac.jp

さを求めるためには、通常有限要素法などの数値解析が必要となるが、非線形解析である塑性応力数値解析は計算が複雑であるため、そうした塑性特異応力場の強さに関する研究は現在まだあまり見当たらないようである。そこで本研究では、有限要素汎用ソフト Marc/Mentat を用いて、V形切欠き先端まわりの弾塑性応力数値解析を行い、塑性特異応力場の強さを表すパラメータである塑性応力拡大係数 K_p を求め、この K_p と、塑性変形を無視した純弾性解析で得られる弾性応力拡大係数 K_e との関係について検討を行った。

2. 解析方法

本研究では、切欠きの弾性応力拡大係数 K_e が容易にわかるように、解析モデルとして、切欠きの先端が円の中心にあるような、開き角度 γ で、半径 a の円形の切欠きモデル [図1(a)] を用いる。その円周上に弾性特異場の理論式で得られるモード I 変形に対応する変位量

$$\begin{cases} u_r = \frac{K_e a^{\lambda_e}}{G} \times \left[\frac{[\lambda_e \cos \gamma + \cos \{\lambda_e(2\pi - \gamma)\}] \cos(\lambda_e + 1)\theta + (\kappa - \lambda_e) \cos(\lambda_e - 1)\theta}{2\lambda_e[\lambda_e(1 - \cos \gamma) + 1 - \cos \{\lambda_e(2\pi - \gamma)\}]} \right] \\ u_\theta = \frac{K_e a^{\lambda_e}}{G} \times \left[\frac{-[\lambda_e \cos \gamma + \cos \{\lambda_e(2\pi - \gamma)\}] \sin(\lambda_e + 1)\theta + (\kappa + \lambda_e) \sin(\lambda_e - 1)\theta}{2\lambda_e[\lambda_e(1 - \cos \gamma) + 1 - \cos \{\lambda_e(2\pi - \gamma)\}]} \right] \end{cases}$$

(ただし、 $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$) (2)

を境界条件として与え、式(2)中の応力拡大係数 K_e の値を調節することで、切欠き先端近傍に塑性変形を生じさせている。ここで G は横弾性係数、 ν はポアソン比(ここでは0.3とする)、 λ_e は、理論解析で求めた該当切欠きの弾性応力特異性に関する指数である。表1に、参考のため $0^\circ \leq \gamma \leq 150^\circ$ の開き角を持つ切欠きについて、弾性の応力特異性に関する指数 λ_e の値と、後に出てくる塑性の応力特異性に関する指数 λ_p の値を示す⁽¹⁾。

図1(a)のモデルを用いて高精度の解を得るためには、要素分割に工夫が必要である。本研究では図

1(a)に示すように、切欠き先端に近づくほどより細かく分割できるよう、距離 r 方向に対して等比分割、角度 θ 方向に対し約 15° 刻みに等分割し、切欠き半径 a に対する最小要素の大きさは $10^{-8}a$ 程度とする [図1(b)参照]。また分割要素は三角形6節点アイソパラメトリック要素を用いており、総分割数は約6000($\gamma = 30^\circ$ では5918, $\gamma = 90^\circ$ では4842)としている。

本数値解析に用いた材料は、加工硬化特性が Ramberg-Osgood 則で与えられるものとし、材料の一軸応力状態における応力-ひずみ関係は以下の式を満足するとする。

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \text{ (3)}$$

ここで、 σ_0 および ε_0 は、それぞれ降伏応力および降伏ひずみであり、 $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$ である。また、 n はひずみ硬化指数、 α は材料定数、 E はヤング率であり、本研究では $\sigma_0 = 0.01 \text{ MPa}$, $\alpha = 0.1$, $E = 10^7 \text{ MPa}$ とした。なお、塑性降伏条件は Mises の降伏条件を用い、平面応力状態として解析を行った。さらに本研究において塑性解析を行う際、単調増加荷重を与えるものとし、非線形方程式の解法はニュートン・ラプソン法による増分解法を用いて行っている。

3. 解析結果

図2は、ひずみ硬化指数 $n=3$ 、開き角度 $\gamma=30^\circ$ である切欠き先端に生じる、塑性域の形状を示すものである。ここで、負荷の大きさを、式(2)中の弾性応力拡大係数 K_e を無次元化したパラメータ F_e

$$F_e = \frac{K_e}{\sigma_0 a^{1-\lambda_e}} \text{ (4)}$$

で表す。図2からわかるように、無次元化した弾性応

Table 1 λ_e and λ_p for various notches

γ	0°	30°	60°	90°	120°	150°
λ_e	0.500	0.502	0.512	0.545	0.616	0.752
$\lambda_p(n=3)$	0.750	0.751	0.751	0.765	0.799	0.866
$\lambda_p(n=10)$	0.909	0.910	0.910	0.909	0.917	0.941
$\lambda_p(n=20)$	0.952	0.953	0.953	0.953	0.953	0.965

Fig. 1

力拡大係数 F_e の増加につれて、塑性域が広がっていく。図中には、弾性応力分布から得られた、切欠き先端近傍で Mises の降伏条件を満たしている範囲(点線)も示してある。本解析である有限要素法数値解析で得られた塑性域は、弾性応力分布から得られる降伏条件が満たされる範囲(図中の点線)と比較して、その寸法・形状はそれほど異なっていないが、やや切欠き前方へ広がった形状となっている。また、異なるひずみ硬化指数 n による塑性域の差異を比較すると、図3(図3には、 $n=3$ と $n=10$ の場合についてその塑性域の広がり进行比较している)に示すように、 n が大きいほど塑性域の切欠き前方への広がりが大きい。

図4は、図2の解析で得られた切欠き二等分線上の応力 $\sigma_\theta|_{\theta=0^\circ}$ と、切欠き先端からの距離 r との関係を示したものである。図中では、弾性域と塑性域での応力値 $\sigma_\theta|_{\theta=0^\circ}$ を、それぞれ○と●印で区別している。図4からわかるように、無次元化した弾性力拡大係数 F_e の増加につれて応力の値が大きくなる

っていくが、両対数線図では、弾性域と塑性域における、各応力拡大係数 F_e レベルに対応するそれぞれの応力分布は、いずれもほぼ直線となっている。またこれらの直線のこう配は、弾性域と塑性域でそれぞれ -0.498 と -0.249 であり、著者ら⁽¹¹⁾ が先に理論解析から求めた、 $\gamma=30^\circ$ の切欠きでの弾性と塑性の応力特異性の理論値 λ_e-1 および λ_p-1 (表1参照) とよく一致する。したがって、切欠き先端近傍の塑性域においては、応力特異性が固有関数展開法による理論解析で求めたそれで表すことができるといえる。

次に、図2の解析で得られた、切欠き先端まわりに生じる各方向の応力分布をみるために、無次元化した

Fig. 2 Plastic region around the tip of a notch of $\gamma=30^\circ$ with $n=3$

Fig. 3 Comparison of plastic regions between materials of $n=3$ and $n=10$ ($\gamma=30^\circ$ and $F_e=0.1$)

Fig. 4 Distribution of stress σ_θ on angle of $\theta=0^\circ$ ($\gamma=30^\circ$ and $n=3$)

Fig. 5 Angular distribution of stresses σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ ($\gamma=30^\circ$ and $n=3$)

弾性応力拡大係数 $F_e=0.2$ に対し、切欠き先端からの距離 $r=2.371 \times 10^{-6}a$, $2.371 \times 10^{-5}a$, $2.371 \times 10^{-4}a$ 上の各応力分布について、それぞれの r で $\theta=0^\circ$ 点での応力 $\sigma_\theta|_{\theta=0^\circ}$ との比を図5に示す。図5には、著者ら⁽¹¹⁾ が先に行った固有関数展開法による理論解析で求めた結果(実線)も示してある。図5からわかるように、有限要素法の数値解析で求めたこれらの応力分布は、塑性域内での位置 r/a にほぼ関係せず、理論解析の結果(実線)と良く一致している。このことは、切欠き先端近傍に生じた塑性特異応力場の様式、すなわち式(1)中の関数 $f_{ij}(\theta)$ が、固有関数展開法による理論解析で求めたそれで表すことができることを意味している。

以上の検討からわかるように、本研究の応力数値解析結果は、先に著者ら⁽¹¹⁾ が行った固有関数展開法による理論解析結果と同様な応力特異性の次数 λ 、および場の様式 $f_{ij}(\theta)$ をもつ特異応力場を再現しており、それにより本解析は精度よく行われたといえる。次はこの解析結果に基づいて、固有関数展開法では求めることができない、特異応力場の強さを表すパラメータである、応力拡大係数 K_p を求める。

ここで、塑性特異応力場の強さを表す K_p は、塑性域内で $\theta=0^\circ$ 点での応力 $\sigma_\theta(r)|_{\theta=0^\circ}$ が次式になるように定義する。

$$\sigma_\theta(r)|_{\theta=0^\circ} = \frac{K_p}{r^{1-\lambda_p}} \quad \text{(for plastic singular stress field)} \quad \dots\dots\dots (5)$$

Fig. 6 Variation of nondimensional plastic stress intensity factor F_p with loading F_e for notch of $\gamma=30^\circ$

なお、式(2)中の弾性応力拡大係数 K_e に対応する弾性特異応力場において、 $\theta=0^\circ$ の線での応力 $\sigma_\theta(r)|_{\theta=0^\circ}$ が次式

$$\sigma_\theta(r)|_{\theta=0^\circ} = \frac{K_e}{r^{1-\lambda_e}} \quad \text{(for elastic singular stress field)} \quad \dots\dots\dots (6)$$

となることに、注意されたい。

塑性特異応力場の強さである応力拡大係数 K_p は、図2のような σ_θ と r の両対数線図での、塑性域における直線部から求まる。図6は、開き角 $\gamma=30^\circ$ の切欠き先端に生じている、塑性特異応力場の応力拡大係数 K_p と、無次元化した弾性応力拡大係数 F_e との関係を表したものである。図中には、無次元化した塑性応力拡大係数 F_p

$$F_p = \frac{K_p}{\sigma_0 a^{1-\lambda_p}} \quad \dots\dots\dots (7)$$

を用いている。図6からわかるように、無次元化した塑性応力拡大係数 F_p は F_e の増加に伴って増加するが、 F_e が小さいときの F_p の増加は激しく、 F_e がある程度大きくなると F_p の増加が緩やかになる。このような特徴は、特に n が大きい場合顕著である。例えば、 $n=20$ の場合、 F_e が0.05を超えると F_p はほぼ一定となる。

塑性降伏のような非線形変形が生じる場合でも、弾塑性力学の基礎方程式は、全ひずみ理論であれ、ひずみ増分理論であれ、座標に関して線形で記述される。このことに基づいて、塑性応力拡大係数 K_p を以下のように検討することができる。

同じ大きさの引張荷重 σ^∞ を受ける、形状が相似で寸法が m 倍異なる二つのV形切欠きを有する帯板、図7(a)と(b)の問題を考える。上に述べたように、弾塑性力学の基礎方程式は座標に関して線形関係を満足するため、図7(a)と(b)それぞれの場合での応力場は相似であり、切欠き二等分線上の応力、図7(a)の応力 $\sigma_{ij, \text{case 1}}(r)|_{\theta=0^\circ}$ と図7(b)の応力 $\sigma_{ij, \text{case 2}}(r)|_{\theta=0^\circ}$ を比較すると

$$\sigma_{ij, \text{case 1}}(r)|_{\theta=0^\circ} = \sigma_{ij, \text{case 2}}(m \cdot r)|_{\theta=0^\circ} \quad \dots\dots\dots (8)$$

が成り立つ。したがって、両切欠き先端に生じている塑性特異応力場の強さをそれぞれ $K_{p, \text{case 1}}$ と $K_{p, \text{case 2}}$ とすれば、次式

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta, \text{case 1}}(r)|_{\theta=0^\circ} &= \frac{K_{p, \text{case 1}}}{r^{1-\lambda_p}} = \frac{K_{p, \text{case 2}}}{(mr)^{1-\lambda_p}} \\ &= \sigma_{\theta, \text{case 2}}(m \cdot r)|_{\theta=0^\circ} \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

が成り立つ。また、該当材料が塑性降伏を生じない完全弾性体と仮定しても、同様に式(8)が成り立つので、

このときの両切欠き先端に生じている弾性特異応力場の強さをそれぞれ $K_{e, \text{case 1}}$ と $K_{e, \text{case 2}}$ とすれば、次式

$$\sigma_{\theta, \text{case 1}}(r)|_{\theta=0^\circ} = \frac{K_{e, \text{case 1}}}{r^{1-\lambda_e}} = \frac{K_{e, \text{case 2}}}{(mr)^{1-\lambda_e}} \\ = \sigma_{\theta, \text{case 2}}(m \cdot r)|_{\theta=0^\circ} \dots\dots\dots (10)$$

が得られる。よって、弾性応力拡大係数と塑性応力拡大係数についてそれぞれ式

$$\left(\frac{K_{e, \text{case 2}}}{K_{e, \text{case 1}}} \right)^{1-\lambda_p} = m^{(1-\lambda_e)(1-\lambda_p)} \dots\dots\dots (11)$$

と式

$$\left(\frac{K_{p, \text{case 2}}}{K_{p, \text{case 1}}} \right)^{1-\lambda_e} = m^{(1-\lambda_e)(1-\lambda_p)} \dots\dots\dots (12)$$

が成立し、これら2式から

$$\frac{(K_{p, \text{case 2}})^{1-\lambda_e}}{(K_{e, \text{case 2}})^{1-\lambda_p}} = \frac{(K_{p, \text{case 1}})^{1-\lambda_e}}{(K_{e, \text{case 1}})^{1-\lambda_p}} \dots\dots\dots (13)$$

を導出することができる。式(13)は、パラメータ

Fig. 7 Similar stresses in similar specimens

$K_p^{1-\lambda_e}/K_e^{1-\lambda_p}$ が相似試験片の寸法に依存しないことを意味している。したがって、塑性特異応力場の強さが切欠きの弾性応力拡大係数 K_e によって支配されるような問題であれば、パラメータ $K_p^{1-\lambda_e}/K_e^{1-\lambda_p}$ が切欠きの寸法や荷重の大きさに依存しないと考えられる。

図8は、 $\gamma=30^\circ$ と $\gamma=90^\circ$ の切欠きについて、異なるひずみ硬化指数 $n=3, 10, 20$ で無次元化した弾性応力拡大係数 F_e を変化させたときの、 $K_p^{1-\lambda_e}/K_e^{1-\lambda_p}$ の無次元化したパラメータ $F_p^{1-\lambda_e}/F_e^{1-\lambda_p}$ の値の変化を示している。図8からわかるように、上で述べた検討と同様、それぞれの n において、パラメータ $F_p^{1-\lambda_e}/F_e^{1-\lambda_p}$ は荷重 F_e の大きさに依存せずほぼ一定となる。

また図8では、各ひずみ硬化指数 n に対し、 $\gamma=30^\circ$ と $\gamma=90^\circ$ の切欠きでのパラメータ $F_p^{1-\lambda_e}/F_e^{1-\lambda_p}$ は非常に近い値をとっている。ここで、切欠きの開き角度 γ とパラメータ $F_p^{1-\lambda_e}/F_e^{1-\lambda_p}$ との関係を系統的に検討するために、図9と表2では、ひずみ硬化指数 $n=3, 10, 20$ について、切欠きの開き角度 γ を変化させたときの $F_e=0.1$ におけるパラメータ $F_p^{1-\lambda_e}/F_e^{1-\lambda_p}$ の変化を示す。

Table 2 Values of $F_p^{(1-\lambda_e)}/F_e^{(1-\lambda_p)}$ (for loading of $F_e=0.1$)

γ	0°	30°	60°	90°	120°	150°
$n=3$	1.4900	1.4655	1.4306	1.3865	1.2927	1.1320
$n=10$	1.2300	1.2312	1.2215	1.2009	1.1578	1.0741
$n=20$	1.1550	1.1606	1.1557	1.1377	1.1207	1.0521

Fig. 8 Variation of $F_p^{(1-\lambda_e)}/F_e^{(1-\lambda_p)}$ with loading F_e for notch of $\gamma=30^\circ$ and $\gamma=90^\circ$

Fig. 9 Variation of $F_p^{(1-\lambda_e)}/F_e^{(1-\lambda_p)}$ with notch angle γ for loading of $F_e=0.1$

図9と表2からわかるように、それぞれのひずみ硬化指数 n において、パラメータ $F_p^{1-\lambda_e}/F_e^{1-\lambda_p}$ の値は、切欠きの開き角度 γ の大きさによって異なるが、その変化は小さく、特に γ が $0^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$ 程度の範囲内であれば、 γ の大小にかかわらずそのパラメータ値は、それぞれの n でほぼ一定した値となる。

図9と表2において、 $\gamma=0^\circ$ のときのパラメータ $F_p^{1-\lambda_e}/F_e^{1-\lambda_p}$ の値は、次に述べるように式(18)から得られた厳密解を用いている。

$\gamma=0^\circ$ の切欠き、すなわちき裂問題では J 積分の径路独立性が成り立つので、その塑性特異場の強さを理論解析で求めた特異性の次数 λ_p 、および場の様式 $f_{ij}(\theta)$ から求めることができる。Hutchinson⁽⁵⁾ は、1個のき裂を持つ無限板が、遠方で一様な引張応力 σ_0^∞ を受ける問題について、 J 積分の径路独立性を用い、塑性特異場の強さを求めた。Hutchinson⁽⁵⁾ は、各 θ

Fig. 10 V-notched strip under tension with displacements at upper and lower edges being constant

Fig. 11 Extent of plastic region ahead of the notch tip

方向における有効応力 $\sigma_e = 3/2 s_{ij} s_{ij}$ (s_{ij} は偏差応力) の最大値 $\sigma_{e,max}$ を用い、塑性特異応力場の強さを表すパラメータ (ここでは K_H と記する) を次式のように定義する。

$$K_H = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sigma_{e,max}}{\sigma_0} r^{1-\lambda_p} \quad (14)$$

その結果、 K_H は

$$K_H = \left(\frac{\pi}{a I_n \sigma_0^2} \right)^{1/(n+1)} \cdot (\sigma_y^\infty)^{2/(n+1)} \quad (15)$$

となる。ここで、 I_n は特異応力場の様式 $f_{ij}(\theta)$ から求まる、ひずみ硬化指数 n の関数である。式(15)から、式

$$K_p = S_n \sigma_0 K_H = S_n \sigma_0 \left(\frac{\pi}{a I_n \sigma_0^2} \right)^{1/(n+1)} \cdot (\sigma_y^\infty)^{2/(n+1)} \quad (16)$$

が得られる。ここで、 S_n は切欠き二等分線上の応力 $\sigma_0|_{\theta=0^\circ}$ と、最大となる有効応力値 $\sigma_{e,max}$ との比である。したがって、き裂問題での弾性および塑性の特異性指数 λ_e, λ_p が、それぞれ $\lambda_e=0.5, \lambda_p=n/(n+1)$ であること。またこのときの弾性応力拡大係数が $K_e = \sigma_y^\infty/\sqrt{2}$ であることを考慮すれば、き裂問題については、式(16)から以下の式が得られる。

$$\frac{K_p^{1-\lambda_e}}{K_e^{1-\lambda_p}} = \frac{K_p^{1/2}}{K_e^{1/(n+1)}} = \left(\frac{2\pi \sigma_0^{n-1}}{a I_n} \right)^{1/(2(n+1))} \cdot S_n^{1/2} \quad (17)$$

すなわち、

$$\frac{F_p^{1-\lambda_e}}{F_e^{1-\lambda_p}} = \left(\frac{2\pi}{a I_n} \right)^{1/(2(n+1))} \cdot S_n^{1/2} \quad (18)$$

Fig. 12 Plastic stress intensity factors K_p for V-notched strip under tension

式(17)および式(18)の右辺には外部荷重の大きさを表すものが含まれていないことに注意されたい。これはパラメータ $K_p^{-\lambda_e}/K_e^{-\lambda_p}$ が荷重の大きさに依存しないことが、き裂問題に対し厳密的に成り立つことを意味する。

したがって以上の検討から、V形切欠き先端近傍に生じる塑性特異応力場について、有限要素法などによる弾塑性応力数値解析を直接行わずとも、その塑性特異応力場の応力拡大係数 K_p を、弾性解析で得られる弾性応力拡大係数 K_e から評価することが可能と言える。すなわち、表2に示した $(F_p^{-\lambda_e}/F_e^{-\lambda_p})$ の値を用い、弾性解析で求めた K_e の値から K_p の値を次式のように求めることができる。

$$K_p = [(F_p^{-\lambda_e}/F_e^{-\lambda_p}) \cdot \sigma_0^{\lambda_p - \lambda_e} \cdot K_e^{1-\lambda_p}]^{1/(1-\lambda_e)} \quad \dots\dots\dots (19)$$

このような近似評価法の有効性を確認するために、ここで一例として、図10のように、V形切欠き ($\gamma = 90^\circ$) を有する帯板 ($n=3$) を、変位一定の状態 で引張る問題を考え、その切欠き先端周りに生じる塑性特異応力場の強さを求めた。図11は、塑性域の広がりを見るために、切欠き先端に生じる塑性域の長さの相対値 ω/c と、端部の変化 U_u の無次元化した値 $U_u/(l\sigma_0/E)$ との関係を示したものである。図12は、切欠き先端に生じる塑性域での応力分布に基づいて算出した塑性応力拡大係数 K_p (●印) の、端部変位 U_u の増加に伴う変化を示すものである。図中には、表2の $\gamma=90^\circ$, $n=3$ でのパラメータ $F_p^{-\lambda_e}/F_e^{-\lambda_p}$ の値に基づいて、著者の一人⁽⁴⁾ が体積法を用いて求めた弾性応力拡大係数 K_e から算出した、 K_p の値(実線)も示している。図12からわかるように、純弾性解析から得た K_e の値から算出した K_p の値は、ほぼ計算の全範囲において、弾塑性解析により切欠き先端に生じる塑性域での応力分布に基づいて算出した K_p の値と、驚くほどよく一致している。

4. 結 論

本研究では、有限要素汎用ソフト Marc/Mentat を用いて、V形切欠き先端まわりの弾塑性応力数値解析を行い、塑性特異応力場の強さ K_p と、純弾性解析で得られる弾性応力拡大係数 K_e との関係について検討

を行い、以下の結論が得られた。

(1) 切欠き先端に生じる塑性特異応力場の応力拡大係数 K_p と、純弾性解析で得られる弾性応力拡大係数 K_e から算出したパラメータ $K_p^{-\lambda_e}/K_e^{-\lambda_p}$ は、荷重の大きさに依存せずほぼ一定である。

(2) $K_p^{-\lambda_e}/K_e^{-\lambda_p}$ を無次元化したパラメータ $F_p^{-\lambda_e}/F_e^{-\lambda_p}$ の値は、切欠きの開き角度 γ の大きさによって異なるが、 γ が $0^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$ 程度の範囲内であれば、その変化は小さい。

(3) 表2のようなパラメータ $F_p^{-\lambda_e}/F_e^{-\lambda_p}$ の値を用いることにより、有限要素法などによる弾塑性応力数値解析を直接行わずとも、純弾性解析で求めた切欠きの弾性応力拡大係数 K_e の値から、V形切欠き先端近傍に生じる塑性特異応力場の応力拡大係数 K_p を精度よく推測することができる。

文 献

- (1) Williams, M. L., Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension, *Trans. ASME*, **74** (1952), 526-528.
- (2) 陳戒珩・西谷弘信, 半無限板のV形切欠先端における特異応力場, *機論*, **57**-538, A (1991), 1406-1411.
- (3) 陳戒珩・西谷弘信, 引張りまたは面内曲げを受ける片側V形切欠入り帯板の応力拡大係数 K_{I, A_1} と K_{I, A_2} , *機論*, **59**-560, A (1993), 1069-1074.
- (4) Chen, D. H., Stress intensity factors for V-notched strip under tension or in-plane bending, *Int. J. Fract.*, **70** (1995), 81-97.
- (5) Hutchinson, J. W., Singular Behavior at the End of a Tensile Crack in a Hardening Material, *J. Mech. Phys. Solids*, **16** (1968), 13-31.
- (6) Rice, J. R. and Rosengren, G. F., Plane Strain Deformation near a Crack Tip in a Power-Law Hardening Material, *J. Mech. Phys. Solids*, **16** (1968), 1-12.
- (7) Shih, C. F., Small-Scale Yielding Analysis of Mixed Mode Plane-Strain Crack Problems, *Fracture Analysis, ASTM STP*, 560 (1974), 187-210.
- (8) Xia, L. and Wang, T., Singular Behavior near the Tip of a Sharp V-notch in a Power-Law Hardening Material, *Int. J. Fract.*, **59** (1993), 83-93.
- (9) Duva, J. M., The Singularity at the Apex of a Rigid Wedge Embedded in a Nonlinear Material, *J. Appl. Mech.*, **55** (1988), 361-364.
- (10) Duva, J. M., The Singularity at the Apex of a Rigid Wedge After Partial Separation, *J. Appl. Mech.*, **56** (1989), 977-979.
- (11) 陳戒珩・牛島邦晴, V形切欠き先端における弾塑性応力特性, *機論*, **64**-620, A (1998), 933-941.