衝撃熱負荷を受ける傾斜機能厚肉回転対称殻の応力と変形*

竹園 茂 男^{*1}, 埤 克 己^{*1}
稲村 栄次郎^{*2}, 小澤 義 央^{*3}Thermal Stress and Deformation in Moderately Thick Shells of Revolution
of Functionally Graded Material under Thermal Impulsive LoadingShigeo TAKEZONO, Katsumi TAO^{*4},
Eijiroh INAMURA and Yoshihiro OZAWA^{*4} Toyohashi University of Technology, Dept. of Mechanical Engineering,
Tempaku-cho, Toyohashi, Aichi, 441-8580 Japan

This paper describes an analytical formulation and a numerical solution of the thermal stress and deformation for moderately thick shells of revolution made of functionally graded material (FGM) subjected to thermal impulsive loading. The material properties of the shell are continuously inhomogeneous along the shell thickness. The temperature distribution through the shell thickness is expressed with a curve of high order, and the equations of motion and the relations between the strains and displacements are derived from the Reissner-Naghdi shell theory. The fundamental equations derived are numerically solved using the finite difference method. As numerical examples, functionally graded cylindrical shells subjected to the following two kinds of thermal impulsive loads are treated; one is the thermal loads due to fluid and another is the loads due to heat generation in the shell body. In comparison with the results from the characteristic method, good agreement is obtained. And it is found that the temperature distributions, stress distributions and deformations with time are significantly varied depending on the compositional distribution profiles in FGM.

Key Words: Structural Analysis, Thermal Shock, Functionally Graded Material, Thermal Stress, Thick Shells, Elasticity, FDM

1. 緒 言

傾斜機能材料は、過酷な熱環境において優れた機械的強度を有する材料として近年開発が進められている。この新材料を機器部品に適用したときの静的な熱応力を解析した研究は多数報告されているが⁽¹⁾、電磁波、レーザ、γ線等により材料が短時間の内に急激な加熱を受けるような動的問題に関しては、平板や円筒、中空球等の単純な形状を対象に、特性曲線法を用いて解析したものに限定されている^{(2)~(6)}。著者らは、既に傾斜機能材料から成る一般軸対称薄肉殻が、流体加熱や内部発熱により衝撃熱負荷を受ける場合の動的応答問題の解法を示したが⁽⁷⁾、本研究では中程度の厚さ(殻厚を h 、主曲率半径を R とおくと、 $1/20 < h/R < 1/5$ 程度)の傾斜機能回転対称殻の動的応答問題の解法を取扱った。傾斜機能材料の組成分布は、殻厚方向に変化する材料物性値を厚さ方向の関数で表し、殻厚方向

に数値積分することによって、基礎式の諸係数に組込まれる。著者らは、既報⁽⁸⁾で傾斜機能材料から成る殻は高温流体加熱を受けると、応答初期に殻厚方向に局所的にこう配の急な温度分布を生じるため、殻厚方向の温度分布を任意の高次曲線で近似することが有効であることを示した。本研究でもその解析手法を適用し、与えられた初期条件と境界条件のもとで、熱伝導方程式を解く。そして高次曲線の次数を変えて解の収束性を調べ、温度分布を表す多項式の適切な次数を決定する。得られた温度分布をもとに、回転対称殻の基礎関係式から、変位、内力などを求める。殻の基礎関係式には、殻厚方向のせん断変形を考慮した Reissner-Naghdi の理論⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾を用いた。導かれた基礎式の数値解法には、差分法を適用した。

数値解析例として、殻厚方向に不均質性を有する傾斜機能円筒殻に、軸対称な衝撃熱負荷が作用する問題を二例取り上げた。一つは、無限長の円筒殻内表面に一樣流体加熱を受ける場合で、変位と応力の解を特性曲線法による解⁽³⁾と比較し、本解法の妥当性を確認した。もう一つは、両端単純支持の円筒殻に、子午線方向に局所的な内部発熱による衝撃熱負荷が作用する問題を取り上げた。

* 原稿受付 1999年8月30日。

^{*1} 正員、豊橋技術科学大学 (☎ 441-8580 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘 1-1)。^{*2} 正員、東京都立工業高等専門学校 (☎ 140-0011 東京都品川区東大井 1-10-40)。^{*3} 信越化学工業(株) (☎ 915-8515 武生市北府 2-1-5)。

E-mail: tao@mech.tut.ac.jp

2. 基 礎 式

図1に示すように、殻の中央面上に子午線方向に ξ 、円周方向に θ 、中央面から外向きに ζ の座標軸をとる。対称軸から中央面までの距離を R とし、殻の中央面の形を $R=R(s)$ で与えると、中央面の点Pにおける無次元曲率 $\omega_\xi (=a/R_s)$ 、 $\omega_\theta (=a/R_\theta)$ および無次元半径 $r (=R/a)$ の間には、次の関係が成立する。ただし s は子午線方向の長さであり、 a は代表長さである。

$$\left. \begin{aligned} \omega_\xi &= -(\gamma' + \gamma^2)/\omega_\theta, \quad \omega_\theta = \sqrt{1 - (r')^2}/r \\ \omega'_\theta &= \gamma(\omega_\xi - \omega_\theta), \quad r''/r = -\omega_\xi \omega_\theta \\ \gamma &= r'/r, \quad \xi = s/a, \quad ()' = d()/d\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

2.1 熱伝導方程式 材料特性値が殻厚方向のみに変化する傾斜機能厚肉殻体内の熱伝導方程式は、 ξ 、 θ 、 ζ 座標を用いて次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{a^2 r L_\xi L_\theta} \left\{ \chi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(r \frac{L_\theta}{L_\xi} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{\chi L_\xi}{r L_\theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{c\rho} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(a^2 r L_\xi L_\theta \lambda \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right) \right\} - \frac{\eta}{c\rho} = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 $L_\xi = 1 + \zeta/R_s$ 、 $L_\theta = 1 + \zeta/R_\theta$ 、 T ：任意の時刻における殻体内の任意の点 (ξ, θ, ζ, t) の温度、 χ ：温度伝導率 $[= \lambda/(c\rho)]$ 、 c ：比熱、 ρ ：密度、 λ ：熱伝導率、 η ：単位時間、単位体積当たりの発熱量、 t ：時間である。

また、殻の内外表面 $(\zeta = \pm h/2)$ の温度境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\partial T}{\partial \zeta} \right]_{\zeta = -h/2} &= k_{in} (T_{in} - \Theta_{in}) \\ \left[\frac{\partial T}{\partial \zeta} \right]_{\zeta = h/2} &= -k_{out} (T_{out} - \Theta_{out}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 Θ_{in} 、 Θ_{out} ：殻の内外の周囲温度、 k_{in} 、 k_{out} ：殻の内外表面の相対熱伝達率 $[K_{in}/(\lambda)_{in}$ 、 $K_{out}/(\lambda)_{out}$ 、 K ：熱伝達率、 $()_{in}$ 、 $()_{out}$ ：殻の内外表面の特性値]、 T_{in} 、 T_{out} ：殻の内外表面の温度、 h ：殻厚である。

傾斜機能材料から成る殻では、耐熱材として機能する構成材料の熱伝導率が比較的小さいため、応答初期には殻厚方向に局所的にこう配の急な温度分布を生じる。そこで解の精度の向上を図るため、次式のように ζ に関する p 次曲線で殻厚方向の温度分布を表す。

$$T(\xi, \theta, \zeta, t) = \sum_{j=0}^p T_j(\xi, \theta, t) \zeta^j \dots\dots\dots (4)$$

式(4)を式(2)に代入し、両辺に $\zeta^i (i=0, 1, 2, \dots, p)$ を掛けて全殻厚にわたって積分した $(p+1)$ 個の式は、殻の内外表面の熱伝達による温度境界条件式(3)を考慮し、さらに近似式

Fig. 1 Coordinates and notations

$$\left. \begin{aligned} \frac{L_\theta}{L_\xi} &\approx 1 + (\omega_\theta - \omega_\xi) \frac{\zeta}{a} + \omega_\xi (\omega_\xi - \omega_\theta) \frac{\zeta^2}{a^2} \\ \frac{L_\theta}{L_\xi^2} &\approx 1 + (\omega_\theta - 2\omega_\xi) \frac{\zeta}{a} + (3\omega_\xi^2 - 2\omega_\xi \omega_\theta) \frac{\zeta^2}{a^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

を用いると、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=0}^p \left\{ \alpha_{(i,j)} \frac{\partial T_j}{\partial t} - \left(\beta_{(i,j)} \frac{\partial T_j}{\partial \xi} + \gamma_{(i,j)} \frac{\partial^2 T_j}{\partial \xi^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \delta_{(i,j)} \frac{\partial^2 T_j}{\partial \theta^2} \right) - \varepsilon_{(i,j)} T_j \right\} - \mu_{(i)} \Theta_{out} - \nu_{(i)} \Theta_{in} \\ - Q_i = 0, \quad (i=0, 1, 2, \dots, p) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \alpha_{(i,j)} &= \left[\{1 + (-1)^{i+j}\} \left(\frac{1}{i+j+1} + \frac{h^2 \omega_\xi \omega_\theta}{4a^2(i+j+3)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \{1 - (-1)^{i+j}\} \frac{h(\omega_\xi + \omega_\theta)}{2a(i+j+2)} \right] \left(\frac{h}{2} \right)^{i+j+1}, \\ \beta_{(i,j)} &= \frac{1}{a^2} \int_{-h/2}^{h/2} \chi \zeta^{i+j} \left\{ \gamma - \frac{\omega'_\xi}{a} \left(\zeta + \frac{\omega_\theta - 2\omega_\xi}{a} \zeta^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{3\omega_\xi^2 - 2\omega_\xi \omega_\theta}{a^2} \zeta^3 \right) \right\} d\zeta, \\ \gamma_{(i,j)} &= \frac{1}{a^2} \int_{-h/2}^{h/2} \chi \zeta^{i+j} \left(1 + \frac{\omega_\theta - \omega_\xi}{a} \zeta \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega_\xi (\omega_\xi - \omega_\theta)}{a^2} \zeta^2 \right) d\zeta, \\ \delta_{(i,j)} &= \frac{1}{a^2 r^2} \int_{-h/2}^{h/2} \chi \zeta^{i+j} \left(1 + \frac{\omega_\theta - \omega_\theta}{a} \zeta \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega_\theta (\omega_\theta - \omega_\xi)}{a^2} \zeta^2 \right) d\zeta, \\ \varepsilon_{(i,j)} &= \bar{\alpha}_{(i,j)} + \frac{\omega_\xi + \omega_\theta}{a} (\bar{\alpha}_{(i+1,j)} + \bar{\beta}_{(i,j)}) \\ &\quad + \frac{\omega_\xi \omega_\theta}{a^2} (\bar{\alpha}_{(i+2,j)} + 2\bar{\beta}_{(i+1,j)}), \\ \bar{\alpha}_{(i,j)} &= -(\chi)_{out} \left(\frac{h}{2} \right)^{i+j} k_{out} - (\chi)_{in} \left(-\frac{h}{2} \right)^{i+j} k_{in} \\ &\quad + \left\{ \left(\frac{1}{c\rho} \frac{\partial \lambda}{\partial \zeta} \right)_{out} \left(\frac{h}{2} \right)^i - \left(\frac{\partial (\chi \zeta^i)}{\partial \zeta} \right)_{out} \right\} \left(\frac{h}{2} \right)^j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left\{ \left(\frac{1}{c\rho} \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} \right)_{\text{in}} \left(-\frac{h}{2} \right)^i - \left(\frac{\partial(\chi \zeta^i)}{\partial \xi} \right)_{\text{in}} \right\} \left(-\frac{h}{2} \right)^j \\
& + \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \frac{\partial^2(\chi \zeta^i)}{\partial \xi^2} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\zeta^i}{c\rho} \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} \right) \right\} \zeta^j d\zeta, \\
\bar{\beta}_{(i,j)} &= \left\{ (\chi)_{\text{out}} \left(\frac{h}{2} \right)^{i+j} - (\chi)_{\text{in}} \left(-\frac{h}{2} \right)^{i+j} \right\} \\
& - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial(\chi \zeta^i)}{\partial \xi} \zeta^j d\zeta, \\
\mu_{(i)} &= (\chi)_{\text{out}} \left(\frac{h}{2} \right)^i \left\{ 1 + \frac{h(\omega_\xi + \omega_\theta)}{2a} + \frac{h^2 \omega_\xi \omega_\theta}{4a^2} \right\} k_{\text{out}}, \\
\nu_{(i)} &= (\chi)_{\text{in}} \left(-\frac{h}{2} \right)^i \left\{ 1 - \frac{h(\omega_\xi + \omega_\theta)}{2a} + \frac{h^2 \omega_\xi \omega_\theta}{4a^2} \right\} k_{\text{in}} \\
& \dots\dots\dots (7)
\end{aligned}$$

また,

$$Q_i = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\eta}{c\rho} \zeta^i \left(1 + \frac{\omega_\xi + \omega_\theta}{a} \zeta + \frac{\omega_\xi \omega_\theta}{a^2} \zeta^2 \right) d\zeta \quad \dots\dots\dots (8)$$

以上で $(p+1)$ 個の未知数 $T_j (j=0, 1, 2, \dots, p)$ に対して, 式(6)が与えられ, これを解くと殻の温度分布が求められる.

2.2 熱変形方程式 回転対称殻の運動方程式ならびにひずみと中央面の変位・回転との関係には, 殻厚方向のせん断変形を考慮した Reissner-Naghdi の殻理論⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾を採用する. これらの基礎式は, 既発表の論文⁽¹¹⁾中の諸式と同一なので, ここでは紙面の都合もあり列挙するに止める. なお式中の Δ は増分を表す.

○軸対称殻の運動方程式:

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{\partial(\Delta N_\xi)}{\partial \xi} + \gamma(\Delta N_\xi - \Delta N_\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial(\Delta N_{\theta\xi})}{\partial \theta} \\
& + \omega_\xi \Delta Q_\xi + a \left[\Delta P_\xi - \bar{\rho} h \frac{\partial^2(\Delta U_\xi)}{\partial t^2} \right] = 0 \\
& \frac{\partial(\Delta N_{\xi\theta})}{\partial \xi} + \gamma(\Delta N_{\xi\theta} + \Delta N_{\theta\xi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial(\Delta N_\theta)}{\partial \theta} \\
& + \omega_\theta \Delta Q_\theta + a \left[\Delta P_\theta - \bar{\rho} h \frac{\partial^2(\Delta U_\theta)}{\partial t^2} \right] = 0 \\
& \frac{\partial(\Delta Q_\xi)}{\partial \xi} + \gamma \Delta Q_\xi + \frac{1}{r} \frac{\partial(\Delta Q_\theta)}{\partial \theta} \\
& - (\omega_\xi \Delta N_\xi + \omega_\theta \Delta N_\theta) \\
& + a \left[\Delta P_\xi - \bar{\rho} h \frac{\partial^2(\Delta W)}{\partial t^2} \right] = 0 \\
& \Delta Q_\xi - \frac{1}{a} \left[\frac{\partial(\Delta M_\xi)}{\partial \xi} + \gamma(\Delta M_\xi - \Delta M_\theta) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial(\Delta M_{\theta\xi})}{\partial \theta} \right] = 0 \\
& \Delta Q_\theta - \frac{1}{a} \left[\frac{\partial(\Delta M_{\xi\theta})}{\partial \xi} + \gamma(\Delta M_{\xi\theta} + \Delta M_{\theta\xi}) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial(\Delta M_\theta)}{\partial \theta} \right] = 0
\end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで, $\bar{\rho}$: 殻厚方向の密度分布の平均値, $\{N_\xi, N_\theta,$

$N_{\xi\theta}, N_{\theta\xi}, Q_\xi, Q_\theta\} (= \{N\}), \{M_\xi, M_\theta, M_{\xi\theta}, M_{\theta\xi}\} (= \{M\})$: 殻の単位長さ当たりの合応力および合モーメント, U_ξ, U_θ, W : 殻の中央面の ξ, θ, ζ 方向変位, P_ξ, P_θ, P_ζ : 殻の中央面の単位面積当たりの分布荷重である(図1).

○中央面のひずみと変位の関係:

$$\left. \begin{aligned}
\Delta \varepsilon_{\xi m} &= \frac{1}{a} \left[\frac{\partial \Delta U_\xi}{\partial \xi} + \omega_\xi \Delta W \right] \\
\Delta \varepsilon_{\theta m} &= \frac{1}{a} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \Delta U_\theta}{\partial \theta} + \gamma \Delta U_\xi + \omega_\theta \Delta W \right] \\
\Delta \varepsilon_{\xi \theta m} &= \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \Delta U_\xi}{\partial \theta} + \frac{\partial \Delta U_\theta}{\partial \xi} - \gamma \Delta U_\theta \right]
\end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

○曲率の変化量と変位成分の関係:

$$\left. \begin{aligned}
\Delta \kappa_\xi &= \frac{1}{a} \frac{\partial \Delta \Phi_\xi}{\partial \xi}, \quad \Delta \kappa_\theta = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Delta \Phi_\theta}{\partial \theta} + \gamma \Delta \Phi_\xi \right) \\
\Delta \kappa_{\xi\theta} &= \frac{1}{2a} \left(\frac{\partial \Delta \Phi_\theta}{\partial \xi} - 2\omega_\xi \Delta \Phi_n \right) \\
\Delta \kappa_{\theta\xi} &= \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Delta \Phi_\xi}{\partial \theta} - \gamma \Delta \Phi_\theta + 2\omega_\theta \Delta \Phi_n \right)
\end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

○中央面の回転と変位・ひずみの関係:

$$\left. \begin{aligned}
\Delta \Phi_\xi &= \frac{1}{a} \left(-\frac{\partial \Delta W}{\partial \xi} + \omega_\xi \Delta U_\xi \right) + 2\Delta \varepsilon_{\xi \zeta m} \\
\Delta \Phi_\theta &= \frac{1}{a} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \Delta W}{\partial \theta} + \omega_\theta \Delta U_\theta \right) + 2\Delta \varepsilon_{\theta \zeta m} \\
\Delta \Phi_n &= \frac{1}{2a} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \Delta U_\xi}{\partial \theta} + \frac{\partial \Delta U_\theta}{\partial \xi} + \gamma \Delta U_\theta \right)
\end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

○殻厚中央面から ζ の距離にある点のひずみ:

$$\left. \begin{aligned}
\Delta \varepsilon_\xi &= (\Delta \varepsilon_{\xi m} + \zeta \Delta \kappa_\xi) / L_\xi \\
\Delta \varepsilon_\theta &= (\Delta \varepsilon_{\theta m} + \zeta \Delta \kappa_\theta) / L_\theta \\
\Delta \varepsilon_{\xi\theta} &= \left\{ \frac{1}{2} (\Delta \varepsilon_{\xi \theta m} + \Delta \Phi_n) \right. \\
& \quad \left. + \zeta \left(\Delta \kappa_{\xi\theta} + \frac{\omega_\xi}{a} \Delta \Phi_n \right) \right\} / L_\xi + \left\{ \frac{1}{2} (\Delta \varepsilon_{\theta \xi m} - \Delta \Phi_n) \right. \\
& \quad \left. + \zeta \left(\Delta \kappa_{\theta\xi} - \frac{\omega_\theta}{a} \Delta \Phi_n \right) \right\} / L_\theta \\
\Delta \varepsilon_{\xi\zeta} &= \Delta \varepsilon_{\xi \zeta m} / L_\xi, \quad \Delta \varepsilon_{\theta\zeta} = \Delta \varepsilon_{\theta \zeta m} / L_\theta
\end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

さて, 殻厚方向の垂直応力 $\sigma_\zeta = 0$ の応力状態を仮定すると, 応力増分は式(13)を用いて次式ようになる.

$$\{\Delta \sigma\} = [D] \{\Delta \varepsilon\} - \{\Delta \sigma^t\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \{\Delta\sigma\} &= \{\Delta\sigma_{\xi}, \Delta\sigma_{\theta}, \Delta\sigma_{\xi\theta}, \Delta\sigma_{\xi\xi}, \Delta\sigma_{\theta\theta}\}^T \\ \{\Delta\varepsilon\} &= \{\Delta\varepsilon_{\xi}, \Delta\varepsilon_{\theta}, \Delta\varepsilon_{\xi\theta}, \Delta\varepsilon_{\xi\xi}, \Delta\varepsilon_{\theta\theta}\}^T \\ \{\Delta\sigma^t\} &= \{\Delta\sigma^t, \Delta\sigma^t, 0, 0, 0\}^T \\ &= \frac{\alpha E}{1-\nu} \{\Delta T_e, \Delta T_e, 0, 0, 0\}^T \\ [D] &= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \cdots (15)$$

ここで、 E, ν および α は縦弾性係数、ポアソン比および線膨張係数であり、 $\{\ }^T$ は転置行列を表す。 T_e は基準温度 $\bar{T}_0$ からの温度変化で、時刻 t における殻の任意点の温度を T とすると、

$$T_e(\xi, \theta, \zeta, t) = T(\xi, \theta, \zeta, t) - \bar{T}_0 \cdots (16)$$

となる。

式(13)、(14)を用いると、殻の単位長さ当たりの合応力 $\{N\}$ および合モーメント $\{M\}$ は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta N_{\xi} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ (\Delta\varepsilon_{\xi m} + \zeta \Delta\kappa_{\xi}) \frac{L_{\theta}}{L_{\xi}} \right. \\ &\quad \left. + \nu (\Delta\varepsilon_{\theta m} + \zeta \Delta\kappa_{\theta}) \right\} d\zeta - \Delta N_{\xi}^t \\ \Delta N_{\xi\theta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1+\nu} \left[\left\{ \frac{1}{2} (\Delta\varepsilon_{\xi\theta m} + \Delta\Phi_n) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \zeta \left(\Delta\kappa_{\xi\theta} + \frac{\omega_{\xi}}{a} \Delta\Phi_n \right) \right\} \frac{L_{\theta}}{L_{\xi}} + \frac{1}{2} (\Delta\varepsilon_{\xi\theta m} - \Delta\Phi_n) \right. \\ &\quad \left. + \zeta \left(\Delta\kappa_{\theta\xi} - \frac{\omega_{\theta}}{a} \Delta\Phi_n \right) \right] d\zeta \\ \Delta Q_{\xi} &= \frac{5}{6} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1+\nu} \Delta\varepsilon_{\xi m} \frac{L_{\theta}}{L_{\xi}} d\zeta \\ \Delta M_{\xi} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ (\Delta\varepsilon_{\xi m} + \zeta \Delta\kappa_{\xi}) \frac{L_{\theta}}{L_{\xi}} \right. \\ &\quad \left. + \nu (\Delta\varepsilon_{\theta m} + \zeta \Delta\kappa_{\theta}) \right\} \zeta d\zeta - \Delta M_{\xi}^t \\ \Delta M_{\xi\theta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1+\nu} \left[\left\{ \frac{1}{2} (\Delta\varepsilon_{\xi\theta m} + \Delta\Phi_n) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \zeta \left(\Delta\kappa_{\xi\theta} + \frac{\omega_{\xi}}{a} \Delta\Phi_n \right) \right\} \frac{L_{\theta}}{L_{\xi}} + \frac{1}{2} (\Delta\varepsilon_{\xi\theta m} - \Delta\Phi_n) \right. \\ &\quad \left. + \zeta \left(\Delta\kappa_{\theta\xi} - \frac{\omega_{\theta}}{a} \Delta\Phi_n \right) \right] \zeta d\zeta \end{aligned} \right\} \cdots (17)$$

ここで、 $(\)^t$ は温度変化 T_e による内力成分を示し、次式によって熱応力増分から計算できる。

$$\{\Delta N_{\xi}^t, \Delta M_{\xi}^t\} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\alpha E}{1-\nu} \{\Delta T_e, \Delta T_e \zeta\} L_{\theta} d\zeta \cdots (18)$$

なお、 $\Delta N_{\theta}, \Delta N_{\theta\xi}, \Delta Q_{\theta}, \Delta M_{\theta}, \Delta M_{\theta\xi}$ および $\Delta N_{\xi}^t, \Delta M_{\xi}^t$ は、それぞれ $\Delta N_{\xi}, \Delta N_{\xi\theta}, \Delta Q_{\xi}, \Delta M_{\xi}, \Delta M_{\xi\theta}$ および $\Delta N_{\xi}^t, \Delta M_{\xi}^t$ の式中の添字 ξ と θ を置き換え、また $\Delta\Phi_n$ の正負の符号を変えたものである。

以上で 30 個の未知数 $\{\Delta N\}, \{\Delta M\}, \Delta U_{\xi}, \Delta U_{\theta}, \Delta W, \Delta\varepsilon_{\xi m}, \Delta\varepsilon_{\theta m}, \Delta\varepsilon_{\xi\theta m}, \Delta\varepsilon_{\xi\xi m}, \Delta\varepsilon_{\theta\xi m}, \Delta\kappa_{\xi}, \Delta\kappa_{\theta}, \Delta\kappa_{\xi\theta}, \Delta\kappa_{\xi\xi}, \Delta\kappa_{\theta\theta}, \Delta\Phi_{\xi}, \Delta\Phi_{\theta}, \Delta\Phi_n, \Delta\sigma^t, \Delta N_{\xi}^t, \Delta N_{\theta}^t, \Delta M_{\xi}^t, \Delta M_{\theta}^t$ に対して式(9)～(12)、(15)、(17)、(18)の 30 個の式が得られたことになる。

3. 無次元方程式と数値計算法

一般に非軸対称問題を解析するには、各変数を θ 方向にフーリエ級数で表し、その係数を定めればよい。そこで、2章に示した $(p+31)$ 個の変数と分布荷重、殻の内外の周囲温度および発熱量をフーリエ級数に展開する⁽¹¹⁾⁽¹²⁾。これらのフーリエ展開式を前述の基礎式に代入し、フーリエ係数(対応する小文字を用いる)に関する式をつくと、熱伝導方程式から $t_j^{(n)} (j=0, 1, 2, \dots, p; n: \text{フーリエ指数})$ に関する次の $(p+1)$ 元連立 2 階微分方程式が得られる。

$$A_1 Y'' + A_2 Y' + A_3 Y = A_4 + A_5 (\partial Y / \partial \tau) \cdots (19)$$

ただし $Y = \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots, t_p^{(n)}\}^T$, $\tau = \chi_0 t / a^2$ (χ_0 : 代表温度伝導率 $[= \lambda_0 / (c_0 \rho_0)]$, λ_0 : 代表熱伝導率, c_0 : 代表比熱, ρ_0 : 代表密度)である。ここで $A_1 \sim A_3$ は殻の形状、温度伝導率および殻の内外表面の相対熱伝達率から定まる $(p+1) \times (p+1)$ の定数行列であり、 A_4 はさらに殻の内外の周囲温度ならびに発熱量から定まる $(p+1) \times 1$ の定数行列である。また A_5 も $(p+1) \times (p+1)$ の定数行列である。

次に、殻の熱変形方程式は未知数を順次消去することにより、変位増分 $\Delta u_{\xi}^{(n)}, \Delta u_{\theta}^{(n)}, \Delta w^{(n)}$ および回転増分 $\Delta \phi_{\xi}^{(n)}, \Delta \phi_{\theta}^{(n)}$ に関する次の 5 元連立 2 階微分方程式になる。

$$B_1 Z'' + B_2 Z' + B_3 Z = B_4 + \bar{Z} \cdots (20)$$

ただし、 $Z = \{\Delta u_{\xi}^{(n)}, \Delta u_{\theta}^{(n)}, \Delta w^{(n)}, \Delta \phi_{\xi}^{(n)}, \Delta \phi_{\theta}^{(n)}\}^T$, $\bar{Z} = \{\partial^2 \Delta u_{\xi}^{(n)} / \partial \tau^2, \partial^2 \Delta u_{\theta}^{(n)} / \partial \tau^2, \partial^2 \Delta w^{(n)} / \partial \tau^2, 0, 0\}^T$ 。ここで、 $B_1 \sim B_3$ は殻の形状と材料定数 (E, ν) の値から定まる 5×5 の定数行列であり、また B_4 は殻の形状のほかに、分布荷重および温度負荷による内力成分から定まる 5×1 の定数行列である。

さて、ある任意の計算段階における温度と、変位ならびに回転の増分とは、式(19)と式(20)を適当な境界条件のもとで解けば得られ、またこれらを用いて内力成分の増分は、式(10)～(12)を式(17)に代入したものから求められる。しかしながら、式(19)と式(20)を厳密に理論解析することは困難であるから、差分法によって数値的に解を求める⁽¹²⁾。なお慣性項には Houbolt の後退差分式⁽¹³⁾を用い、殻厚方向の積分には、等間隔に格子点を取ってシンプソンの 1/3 則を適用する。

4. 数値解析例

数値解析例として、殻厚方向に不均質性を有する厚肉円筒殻を取り上げ、円筒殻内表面に流体加熱が時間に対してステップ状に作用する問題と、円筒殻中央部に内部発熱による衝撃熱負荷が時間に対してインパルス状に作用する問題を解析した。円筒殻の厚さは、殻厚方向のせん断変形の影響は考慮するが、殻厚方向の垂直応力は無視するという殻理論の適用限界を考えて、 $h/R=1/5$ とした。

計算に用いた円筒殻の材料定数には、次の SUS 304 と ZrO_2 の値を用いた。

○ SUS 304

$$\left. \begin{aligned} E_s &= 170 \text{ GPa}, \nu_s = 0.3 \\ \rho_s &= 7.8 \text{ g/cm}^3, \lambda_s = 19 \text{ W/(m}^\circ\text{C)} \\ c_s &= 0.56 \text{ kJ/(kg}^\circ\text{C)} \\ \alpha_s &= 18 \times 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

○ ZrO_2

$$\left. \begin{aligned} E_z &= 210 \text{ GPa}, \nu_z = 0.32 \\ \rho_z &= 5.9 \text{ g/cm}^3, \lambda_z = 3 \text{ W/(m}^\circ\text{C)} \\ c_z &= 0.3 \text{ kJ/(kg}^\circ\text{C)} \\ \alpha_z &= 10 \times 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

二つの例題とも式(18)の熱応力の積分にはシンプソン

Fig. 2 Numerical example 1

Fig. 3 Nonhomogeneity of material constants through thickness

の1/3則を用い、殻厚方向に19個の格子点を採用して数値計算を行った。式(7), (17)などの材料定数の殻厚方向の数値積分には、含まれる ξ の次数によって、最大1024個の格子点を用いた。時間増分は例題1で0.01 μs , 例題2で10 μs とし、例2で取り上げた円筒殻の子午線方向の差分点数は601とした。また殻厚方向の温度分布曲線を表す多項式の次数 p は、例1で10, 例2のCase 1, 2, 3で各々4, 8, 1とした。これらの値は解の収束性を考慮して決定した。

4.1 例題1 無限長円筒殻の内表面に、一様な流体加熱が時間に対してステップ状に作用する問題(図2)を取り上げ、温度分布・熱応力解析を行って、須見らの特性曲線法を用いた解法⁽³⁾による結果と比較した。なお須見らは円筒の内面を直接急加熱する場合を計算しているが、ここでは内部流体の温度 Θ_{in} を与え、熱伝達により加熱する場合を取扱った。

本計算でも須見らと同様に、縦弾性係数、線膨張係数、熱伝導率の不均質性に比べて、密度、ポアソン比、比熱の不均質性は小さいものとして、殻体内でこれらを一定とした。また、縦弾性係数、線膨張係数および熱伝導率は半径方向に $(R+\xi)$ のべき乗で組成分布を与えた。

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \rho_s, c = c_s, \nu = \nu_s \\ E &= E_s \{(R+\xi)/R_{in}\}^q \\ \alpha &= \alpha_s \{(R+\xi)/R_{in}\}^q \\ \lambda &= \lambda_s \{(R+\xi)/R_{in}\}^q \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

なお、指数 q は1, 0, -1の3種類とし(図3), $q=0$ は均質材料に対応する。本計算例では、本解法を須見らの特性曲線法による解法と比較するのが目的であるから、動的効果を明らかにするため、熱伝導率 λ_s と殻の内外表面の熱伝達率 K を仮想的に大きくとり、 $\lambda_s = 8.52 \times 10^8 \text{ W/(m}^\circ\text{C)}$, $K_{in}=K_{out}=10^{11} \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C)}$ とした。

Fig. 4 Temperature distributions through thickness

図4は殻厚方向の温度分布の時間的变化を、また図5は内外表面ならびに中央面の温度の時間的变化を示したものである。熱負荷後およそ11 μs で定常状態に至り、高温側(内表面側)から低温側(外表面側)に熱伝導率が小さくなる $q=-1$ の不均質殻の場合は、他の $q=0, 1$ の場合に比べて殻厚方向の温度差が大きくなる。

次に、円筒殻中央面の半径方向変位 W の時間的变化を図6に示す。図中本解法による結果を破線で、また須見らの特性曲線法による解を実線で示す。なお $q=0$ の特性曲線法による結果は、 $q=\pm 1$ の場合と同様の傾向を示すので、図の煩雑さを避けるために省略した。殻の平均縦弾性係数と線膨張係数が大きくなるほど、殻の変動周期は短く、また振幅は大きくなっている。須見らの厚肉円筒に対する特性曲線法による解は、応力波の反射・干渉等の伝ば挙動を考慮しているため、本解法で得られた変位 W の変動に、微小な振幅と周期の波動が重畳した結果となっている。両結果は極大、極小値にわずかな差が見られる程度で、よく一致している。

図7は $q=1$ の場合の円筒殻内外表面および中央面に生ずる円周方向応力 σ_θ の時間的变化を示したもの

Fig. 5 Variations of temperature with time

Fig. 6 Variations of displacement W with time

である。破線は本解法による結果であり、実線は特性曲線法による結果で、太い実線は中央面の σ_θ を、細い実線は内外表面の σ_θ を表す。殻の加熱表面近傍では、熱負荷直後に生ずる殻厚方向の顕著な温度差により大きな圧縮応力を生じ、その後変位とともに変動する。特性曲線法による解は、変位の場合に比べ大きい周期と振幅の波動が本解法の解に重畳し、殻の中央面で顕著である。中央面では振幅の中心を、また内外表面では個々の変動の極大、極小値を連ねた応答波形が、本解法の時間的变化と一致している。これは本計算では殻厚方向応力 σ_r を零とし、また殻厚方向のひずみ分布を式(13)で与えているためと推察される。

4.2 例題2 殻の両端ならびに内外表面を断熱 ($k=0$) とし、単純可動支持された円筒殻の中央部 ($\xi \geq 0.25$) に、内部発熱による衝撃熱負荷が時間に対してインパルス状に作用する問題(図8)を取り上げた。円筒殻は SUS 304 と ZrO_2 で構成され、殻厚方向に組成傾斜を示すパラメータとして SUS 304 の体積分率

Fig. 7 Variations of stress σ_θ with time

Fig. 8 Numerical example 2

V_s を用いて、以下の3種類の殻厚方向の傾斜を表した(図9)。

$$\left. \begin{array}{l} \text{Case 1: } V_s = 1 - (\xi/h + 0.5) \\ \text{Case 2: } V_s = 1 - (\xi/h + 0.5)^3 \\ \text{Case 3: } V_s = 1 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

すなわち、Case 1, Case 2 は円筒殻の外表面で ZrO_2 、内表面で SUS 304 のみからなり、Case 1 は SUS 304 の体積分率が直線状に変化する場合である。さらに Case 3 は SUS 304 のみの均質円筒殻の場合である。式(21), (22)の6種類の材料定数について、殻厚方向における物性値を、その位置における SUS 304 の体積分率 V_s を用いて線形複合則で表現すると、例えば縦弾性係数 $E(\xi)$ は次式で表される。

$$E(\xi) = E_z \{1 - V_s(\xi)\} + E_s V_s(\xi) \dots\dots\dots (25)$$

ここで添字 S, Z は各々 SUS 304 と ZrO_2 の物性値を意味する。

次に計算結果について考察する。図10以下、実線、破線、および一点鎖線は、それぞれ Case 1~Case 3 の結果である。

Fig. 9 Volumetric distributions of SUU 304 and ZrO_2 through thickness

Fig. 10 Temperature distributions through thickness at point C

図10は点C($\xi=0.5$)における殻厚方向の温度分布の時間的变化を、また図11は点Cの内外表面ならびに中央面の温度の時間的变化を示す。発熱中($0 < t \leq 1$ ms)はCase 1~Case 3とも発熱部の殻体温度は時間にほぼ比例して上昇し、発熱終了直後($t > 1$ ms)からは、上昇時と比べて極めて小さな変化率で殻体内一様温度に推移していく。すべてのCaseで発熱量は同一であり、発熱時間を含めた数msの間では熱伝導は無視され、温度の上昇速度は密度と比熱の積の値に左右される。 ZrO_2 を多く含む円筒殻ほど殻体内で高温となる。図には示さなかったが温度の子午線方向分布は、発熱時間を含めた数msの間では、加熱境界(点B: $\xi=0.25$)で子午線方向にほぼステップ状の温度分布を示し、非加熱部($\xi < 0.25$)は初期温度 T_0 のままである。

次に、点A($\xi=0$)の子午線方向変位 U_ξ および点Cの半径方向変位 W の時間的变化を図12に、また時刻 $t=1$ msのときの U_ξ および W の子午線方向分布を図13に示す。加熱部の温度上昇とともに、両変位は小さな変動を伴いながら増加し、加熱終了時刻を少し過ぎて最大となるが、変形領域は加熱部付近に限られる。また、SUS 304の縦弾性係数は ZrO_2 より小さく

Fig. 11 Variations of temperature at point C with time

Fig. 12 Variations of displacements U_ξ and W with time

 Fig. 13 Meridional distributions of displacements U_ξ and W

線膨張係数は大きいので、SUS 304 のみの均質殻では、 ZrO_2 を含む殻の場合に比べて外表面近傍で温度が半分以下の低温にもかかわらず、変形量はかなり大きくなっている。さらに、 ZrO_2 と SUS 304 の密度の相違により、密度の小さい ZrO_2 を多く含む Case 1 の殻は、Case 2, 3 の殻に比べて多少早く最大変位に到達し、その後の変動振幅は小さい。

最後に、時刻 $t=1$ ms のときの合応力 N_θ と合モーメント M_θ の子午線方向分布を図 14 に示す。図には示さなかったが、殻体高温部の N_θ および M_θ の時間的変化は、各々図 12 の変位 W および図 11 の温度の時間的変化と類似の応答を示す。 N_θ, M_θ とも、子午線方向の温度こう配の極めて大きい点 B 付近で子午線方向に急激に変動する。

5. 結 言

本論文では、衝撃熱負荷を受ける中程度の厚さの傾斜機能回転対称殻の非定常熱応力・変形問題の解法を示した。本解法では、殻の温度分布を求める際に、殻厚方向の温度分布を任意の高次曲線で与え、その次数を変えて解の収束性を調べることににより、精度の高い温度分布が求められる。得られた温度分布をもとに、Reissner-Naghdi の殻理論に基づく回転対称殻の基礎関係式から、変位、内力などを求めた。導かれた基礎式の解値解法には、差分法を適用した。

数値例として、まず無限長円筒殻の内表面に、流体加熱が時間に対してステップ状に作用する問題を取り上げ、須見らの特性曲線法による数値解析解と比較した。その結果、殻理論を用いた本解法と特性曲線法を適用した解法では、変位や内外表面の円周方向応力の時間的変化においてわずかに違いがあるものの、両結果は良く一致し、本解法の妥当性が確認できた。続いて SUS 304 と ZrO_2 から成る両端単純可動支持の傾

 Fig. 14 Meridional distributions of internal forces N_θ and M_θ

斜機能円筒殻に、内部発熱による衝撃熱負荷が時間に対してインパルス状に作用する問題を解析し、SUS 304 のみの均質殻を含む 3 種類の組成傾斜の殻の応答を調べた。その結果、3 種類の殻に同一の発熱量を与えると、 ZrO_2 を多く含む円筒殻ほど殻体内でより高温となり、また変位、内力は温度の時間的変化に類似して変動し、それらの値は ZrO_2 を多く含む円筒殻ほど大きくなっている。

近年、傾斜機能材料から成る平板、円筒および中空球などを対象として、材料定数の温度依存性を考慮した動的熱応力解析がなされ、材料定数の温度依存性の考慮が不可欠であることが指摘されており⁽⁶⁾、今後の課題として本解法にもこれの導入を計る必要がある。

文 献

- (1) 例えば、野田直剛・辻知章、機論、57-535, A(1991), 625-631. 菅野良弘・片岡誠治・田中喜久昭、機論、59-562, A(1993), 1505-1513. 大多尾義弘・谷川義信、機論、60-578, A(1994), 2273-2279. 伊藤義康・高橋雅士・岡村隆成・豊田政男、機論、61-583, A(1995), 614-619. 大多尾義弘・河村隆介・谷川義信・石丸治、機論、64-626, A(1998), 2645-2652.
- (2) 須見尚文、機論、58-548, A(1992), 574-578.
- (3) 伊藤禎元・須見尚文、機論、58-548, A(1992), 579-584.
- (4) 須見尚文・菅野良弘、機論、61-590, A(1995), 2296-2301.
- (5) 須見尚文・門奈博・菅野良弘、機論、62-597, A(1996), 1189-1196.
- (6) 須見尚文、門奈博、菅野良弘、機論、64-618, A(1998), 333-338.
- (7) 竹園茂男・坪克己・小澤義央、機講論、No. 973-2 (1997-9), 16-17.
- (8) 稲村栄次郎・竹園茂男・坪克己・小澤義央、機論、63-605, A(1997), 124-131.
- (9) Reissner, E., *Am. J. Math.*, 63-1 (1941), 177-184.
- (10) Naghdi, P. M., *Q. Appl. Math.*, 14-4 (1957), 369-380.
- (11) 竹園茂男・坪克己・内堀博雄、機論、52-476, A(1986), 997-1005.
- (12) 竹園茂男・坪克己・青木隆・稲村栄次郎、機論、59-562, A(1993), 1443-1450.
- (13) Houbolt, J. C., *J. Aeronaut. Sci.*, 17-9 (1950), 540-550.