窒化けい素の球-平板接触応力下における
接触境界近傍領域の微小表面き裂進展挙動*木田 勝之^{*1}, 小倉 敬二^{*1}Surface Crack Growth Behavior on Si_3N_4 under Ball-on-Plate Contact
in the Near Border of Contact AreaKatsuyuki KIDA^{*2} and Keiji OGURA^{*2} Osaka University, Dept. of Systems and Human Science,
1-3, Machikaneyama, Toyonaka, Osaka, 560-8531 Japan

Surface crack growth behavior of a Si_3N_4 plate from small pre-indentations was investigated under ball-on-plate contact. The cracks located in the border of contact area were observed, where the cracks were little affected by the fluid pressure by "hydraulic pressure mechanisms". Near surface contact stresses under the spherical Hertzian contact were calculated. The crack growth behavior was discussed in terms of the calculated contact stresses and the stress intensity factors under sliding-including-rolling contact and under rolling contact. The cracks were observed to grow in the parallel direction and in the perpendicular direction to the motion of the ball, which indicates that the cracks are predominantly propagated by the contact stresses in the border. The stress intensity factor ranges, ΔK_{II} , ΔK_{III} , and the maximum value of K_I , $K_{I\max}$ increase with the increase in crack length both under rolling contact and under sliding-including-rolling contact. It was found that the crack growth is controlled by ΔK_{II} combined with $K_{I\max}$ and ΔK_{III} . It was also found that the crack growth is promoted by K_{II} combined with K_I in the parallel direction.

Key Words: Contact Fatigue, Si_3N_4 Ceramics, Tribology, Crack Propagation, Friction Force, Combined Mode, Rolling Bearing

1. 緒 言

本研究グループは、優れた特性を有するセラミックス製機械要素の一つとして窒化けい素製玉軸受⁽¹⁾に注目し、表面の微小欠陥によって寿命が大きく低下する^{(2)・(3)}という接触疲労特性を解明するために、接触応力下におけるき裂進展挙動に関して研究を行ってきた^{(4)・(5)}。軸受の表面き裂進展問題は、寿命評価を行なう上で、ここ数年重要視されるようになってきている⁽⁶⁾が、軸受の表面き裂に対する破壊力学的アプローチは、圧延ローラーや歯車の研究に比べ、比較的少ないようである。

これまでに、破壊力学的観点から行われた表面き裂進展挙動に関する研究は、2円柱間の接触に代表される接触体に対してなされてきており、圧延ローラーや歯車にみられる従動側の表面き裂進展挙動が明らかとなっている^{(7)~(11)}。軸受の表面き裂進展問題にも、これらの破壊力学的手法を取り入れることが可能であると思われる。しかし、軸受にみられる転動体と内・外輪の接触では、駆動側と従動側の区別がなく、摩擦が発生する接触を仮定しても、摩擦力の方向と荷重の移動方向の関係が、常に同じ方向となる。この特徴のため、

軸受の表面き裂進展問題を検討するには、二円柱接触問題に適用されている解析モデルの特徴を考慮に入れながら、軸受におけるき裂進展挙動の評価法を検討する必要があるものと思われる。

二円柱接触問題に適用されている解析モデルでは、潤滑油のき裂内への浸入効果を考えているため、本報では、油の浸入および、油圧の影響がき裂進展におよぼす影響を明らかにする。間接的ではあるが、接触域の中央部と比較し、浸入効果の少ない位置でもき裂が進展するかどうかを確かめることを目的に、球と平板の接触で生じる接触領域の境界近傍に位置するき裂に注目した。図1に示すように、このき裂位置における接触圧(油圧)はほとんどないため、進展挙動の力学的評価に際しては、浸入効果がき裂の進展におよぼす影響を考慮しなくてもよいものと思われる。つまり、き裂内に潤滑油が浸入したと仮定しても、き裂の開口

Fig. 1 Schematics of Hertzian pressure for the spherical Hertzian contact

* 原稿受付 1999 年 7 月 5 日.

*¹ 正員, 大阪大学大学院基礎工学研究科(〒560-8531 豊中市待兼山町 1-3).

E-mail: kida@me.es.osaka-u.ac.jp

部の油圧（接触圧）がほとんど存在しないために、き裂に負荷される進展駆動力を考慮する必要がなく、浸入した潤滑油の影響をき裂面間の潤滑を行なう効果に限定し、き裂進展挙動の評価ができるものと考えた。前報⁽⁴⁾では、表面き裂進展挙動の特徴が明らかとなっているため、この特徴をもとに、き裂進展挙動の評価を行った。

Fig. 2 Geometry and coordinate systems for the spherical Hertzian contact with friction force (Y direction as the motion of the ball)

(a) Driving forces on the crack Ax.

(b) Driving forces on the crack Ay.

Fig. 3 Driving forces on the crack face and crack growth modes at a crack tip

2. 接触応力と応力拡大係数の解析方法

球が移動した場合のき裂面に作用する応力とき裂先端の応力拡大係数の履歴を計算するために、図2に示す2つの座標系を導入した。1つは、 O を中心とする直交座標系 (X, Y, Z) であり、球、つまり接触円とともに移動する座標系を表す。もう1つは、 O' を中心とする直交座標系 (x, y, z) であり、き裂に固定された座標系を表す。き裂位置を原点とした場合の球の変位 $O-O'$ を s とすると、球の移動にともない s の値は負から正へと増加する。図中では、球の移動方向を Y 軸に沿った黒い矢印で示し、平板試験片表面に働く摩擦力の方向を白い矢印で示した。また、上記のような、 s の負から正への変化にともなう球の移動を往路、逆に、正から負への移動を復路とした。復路上の摩擦力とせん断応力の正負は、往路上の正負と異なることになるが、簡単のため、ここでは往路上を例に説明を行なう。ちなみに、以下の応力解析では、摩擦力の正負、せん断応力の正負が考慮された結果が示されている。

図3は、き裂面上の進展駆動力と表面先端（図中の●が示すき裂前縁）における応力拡大係数の関係を示したものである。き裂 A_x に対しては、図(a)に示すように、 y 面上の σ_{yy} , τ_{xy} , τ_{yz} を解析し、き裂 A_y に対しては、図(b)に示すように、 x 面上の σ_{xx} , τ_{xy} , τ_{xz} を解析した。

これらの接触応力に関しては、表1に示す実験条件と表2に示す供試材である窒化けい素・東芝製トスナイト (TSN-03) の機械的性質、さらに、球の直径 9.525mm を接触条件に、Hanson の弾性理論解⁽¹²⁾を用い、転がり接触下では摩擦係数 0.00、すべり転がり接触下では、摩擦係数 0.10⁽⁴⁾として解析を行った。

応力拡大係数については、き裂形状を半楕円形状と考えた場合のき裂面上に負荷される応力の積分平均値を用いて、モード I 型き裂進展に対しては、Irwin の解⁽¹³⁾を、モード II 型とモード III 型き裂進展に対しては、

Table 1 Experimental conditions of contact fatigue test

Load (N)	Hertzian maximum stress (MPa)	Half width of contact area (μm)	Frequency (Hz)	Stroke (mm)
294	3979	188	2.0	1.5

Table 2 Mechanical properties of the specimen

Bulk density (g/cm^3)	Bending strength (MPa)	Fracture toughness K_{Ic} ($\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$)	Young's modulus (GPa)	Poisson's ratio
3.23	1011	6.6	294	0.27

Fig. 4 Crack growth behavior of the surface cracks located in the border of the contact area

Kassir-Sih の解⁽¹⁴⁾を適用し、図2に示すように、き裂の表面先端における値を計算した。この解析面の形状は、初期き裂のアスペクト比 (b/a) が0.6である⁽¹⁵⁾ことを考慮して決定した。つまり、観察で得られた表面上のき裂長さ $(2a)$ とアスペクト比0.6から導き出される深さ (b) をもとに、き裂の進展にともなって、き裂面全体を含むような半楕円形を成長させながら、解析面形状を逐次変化させた。さらに、計算にあたっては、き裂が表面近傍を進展するため、アスペクト比は変化しない⁽¹⁵⁾と仮定した。また、応力解析の結果から、

平板内部では応力が深さにともなって変化することがわかっているが、前報と同様に、本報で示すき裂の大きさがその勾配に対して小さいため、勾配の影響は考慮しないこととした。解析の範囲については、接触領域の半径 c は $188\mu\text{m}$ とし、球のストローク s に対しては $-500\mu\text{m}$ から $+500\mu\text{m}$ の範囲、表面き裂に対しては長さ $2a$ が $20\sim 80\mu\text{m}$ の範囲とした。

3. 実験・解析結果および考察

3.1 き裂進展挙動の観察結果 接触軌道内の境界近傍領域におけるき裂の進展挙動⁽⁴⁾を直角方向と平行方向についてまとめたものを図4に示す。ここで、直角方向にき裂が進展すると、その先端は接触域の中央部に近づくことになる。しかし、接触域の幅と比較し、き裂が小さいため、本報では、き裂の位置を接触近傍領域と統一して記述することにした。

図4(a), (b)において、それぞれの●印と○印、つまり、球の接触条件に注目し、すべり-転がり接触下と転がり接触下におけるき裂の進展挙動を比較すると、直角方向、平行方向ともに、すべり-転がり接触下での進展量の方が大きいことがわかる。また、この結果は、潤滑油の浸入効果が小さい接触域の境界近傍領域でもき裂が進展することも意味している。

3.2 応力拡大係数履歴の解析結果

3.2.1 球の転走方向と平行方向へのき裂進展挙動

初期き裂の応力拡大係数履歴を考察するため、き裂長さが $30\mu\text{m}$ の場合について解析を行った。その結果を球の変位 s の変化にともなう履歴として、図5に示す。また、(a), (b)は、それぞれ、転がり接触下、および、すべり-転がり接触下における解析結果である。ここで、球が往復する際の、往路と復路を区別するための概念図を図6に示す。図5の下部に示された矢印は、往路上と復路上の履歴を、図6に従って区別したものである。また、せん断応力による K_{II} と K_{III} については、 K_I のように、最大値 $K_{I\max}$ に限らず、最小値、最大値ともに、その絶対値がき裂進展に影響を及ぼすと考えられるため、それぞれを区別して示すこととした。 K_I の圧縮応力下における値に関しては、き裂閉口は考慮せず、負として扱っている。これは、他の応力拡大係数との重畳の関係を考えるためである。

図5から、各応力拡大係数の履歴をみると、接触域中央に位置するき裂と同様に⁽⁶⁾、転がり接触下、すべり-転がり接触下ともに、 K_I 、 K_{II} 、 K_{III} はそれぞれ異なる位相で重畳していることがわかる。各応力拡大係数の最大値(最小値)を示す球の位置を基準に、それぞれの応力拡大係数の関係をみると、 K_{III} が

(a) Rolling contact

(b) Sliding-including-rolling contact

Fig. 5 Variations of the stress intensity factors for the parallel crack during a ball reciprocating cycle

Fig. 6 Schematic of the ball motion on the center line of contact area

最小値を示す球の位置 ($s=0$ 近傍) では、垂直応力による K_I は負であり、 K_{II} は0であること、また、 K_I が最大値を示す球の位置では、 K_{II} がある程度の絶対値を有しているが K_{III} は0であり、 K_{II} が最大値・最小値を示す球の位置では、 K_I は正であることがわかる。また、

(a) Rolling contact

(b) Sliding-including-rolling contact

Fig. 7 Examples of the change in the stress intensity factors with crack length

転がり接触下では、往路、復路ともに、 $s=0$ の位置を中心に、対称な履歴を示し、各応力拡大係数の最小値・最大値は往路と復路で変化しないことがわかる。しかし、すべり-転がり接触下では、非対称性が見られるようになり、 K_I と K_{III} については、往路の最小値と最大値が復路の値と一致するものの、 K_{II} については、一致せず、往路では最大値の、復路では最小値の絶対値が大きくなることがわかる。

次に、き裂の進展にともなう応力拡大係数履歴の変

化を調べるため、き裂長さを $30\mu\text{m}$ 、 $50\mu\text{m}$ とした場合を例に、応力拡大係数の履歴を図7に示す。この図は、往路についてのみ示したものである。

図7から、き裂が進展すると、 K_I は最大値が増加し、 K_{II} はその最大値と最小値（往路上についての値）の絶対値がともに増加するという傾向を、また K_{III} は、最小値の絶対値が増加するという傾向を示す。しかし、き裂の進展にともなう各応力拡大係数間の関係は、転がり接触下、すべり-転がり接触下ともに、上で示した初期の特徴に変化は見られないこと、つまり、き裂が進展してもその初期の特徴がほぼ維持されることがわかる。

以上の解析結果から、応力拡大係数の傾向は、本報で対象としているき裂長さの範囲では、初期から変化しないため、き裂の進展にともなって変化しないと考えてよいことがわかる。これは、初期のき裂に対して得られた重畳傾向を定常な傾向と見なすことができることを示している。ここで、解析結果をもとに1サイクル中における各応力拡大係数履歴の特徴をまとめると、以下ようになる。

(1) K_I は、転がり接触下では、4回の最大値を示し、すべり-転がり接触下では、2回の最大値を示す。

(2) K_{II} は、転がり接触下では、それぞれ2回の絶対値が等しい最小値と最大値を示し、すべり-転がり接触下では、それぞれ1回の絶対値が等しい最小値と最大値を示す。また、最小値と最大値を示す位置では、 K_I は正となる。

(3) K_{III} は、転がり接触下、すべり-転がり接触下ともに、最大値は0であり、それぞれ1回の絶対値が等しい最小値を示す。また、最小値を示す位置では、 K_I は負となる。

3・2・2 球の転走方向と直角方向へのき裂進展挙動

直角方向に進展するき裂についても、3・2・1項と同様に、き裂長さが $30\mu\text{m}$ の場合を例に解析を行った。その結果を図8に示す。

図8から、各応力拡大係数の履歴をみると、転がり接触下、すべり-転がり接触下ともに、 K_I 、 K_{II} 、 K_{III} はそれぞれが異なる位相で重畳しており、 $s = 0$ の位置を中心として、転がり接触下では、対称性を示し、すべり-転がり接触下では、非対称性を示すことがわかる。これらの傾向は、平行方向のき裂と同様の傾向である。しかし、各応力拡大係数の最大値（最小値）を示す球の位置を基準にした、それぞれの応力拡大係数間については、平行方向へ進展するき裂とは異なり、 K_{II} と K_{III} の最大値を示す球の位置で、 K_I は負となり、圧縮応力下でそれぞれが重畳していること

Fig. 8 Variations of the stress intensity factors for the perpendicular crack during a ball reciprocating cycle

がわかる。

次に、図9に、き裂の進展にともなう応力拡大係数履歴の変化を示す。図9から、き裂の進展にともなって、 K_I は最大値が増加し、 K_{II} と K_{III} は、最大値と最小値の絶対値が増加することがわかる。しかし、き裂が進展しても、各応力拡大係数間には変化が見られない。特に、 K_{II} と K_{III} は、ともに圧縮応力下で最大値と最小値を示すという傾向に変化がみられないことがわかる。

以上の解析結果から、3・2・1項と同様に1サイクル中における各応力拡大係数履歴の特徴をまとめると、以下ようになる。

(4) K_I は、転がり接触下では、4回の最大値を示し、すべり-転がり接触下では、2回の最大値を示す。

(a) Rolling contact

(b) Sliding-including-rolling contact

Fig. 9 Examples of the change in the stress intensity factors with crack length
(2a is crack length)

(5) K_{II} は、転がり接触下では、それぞれ2回の絶対値が等しい最小値と最大値を示し、すべり-転がり接触下では、それぞれ1回の絶対値が等しい最小値と最大値を示す。また、最小値と最大値を示す位置では、 K_{II} は負となる。

(6) K_{III} は、転がり接触下では、2回の絶対値の等しい最大値と最小値を示し、すべり-転がり接触下で

は、それぞれ1回の絶対値が等しい最小値と最大値を示す。また、最大値と最小値を示す位置では、 K_{II} は負となる。

3.3 応力拡大係数によるき裂進展挙動評価

3.2.1 項の考察から、平行方向に進展するき裂の K_I と K_{II} は、転がり接触下とすべり-転がり接触下で、最大値と最小値の負荷回数が異なるとともに、各応力拡大係数間の負荷回数も異なるという特徴を有することが明らかとなった。さらに、往路と復路を通してみた場合の最大値と最小値の比 (R) を比較してみると、 K_{II} と K_{III} については、転がり接触下とすべり-転がり接触下で変化は見られないものの、 K_{II} では $R = -1$ 、 K_{III} では $R = 0$ となり、各応力拡大係数間で応力比が異なることがわかる。また、3.2.2 項の考察からは、垂直方向に進展するき裂に対しては、 K_{III} に対する応力比が $R = -1$ となること、および、 K_I と K_{II} は平行方向に進展するき裂と同様な傾向を示すことがわかる。

ここで、せん断応力下におけるき裂進展を評価するためには応力比の影響を、また、応力拡大係数評価に関しては、最大値・最小値による評価の場合と最大値と最小値の差 ΔK による評価の場合の差を明らかにすることが必要である。さらに、重畳する応力場で進展するき裂の挙動を評価するためには、進展にともなって位相が変化する混合モードの影響も逐次、考慮に入れていく必要があると思われる。しかし、応力拡大係数が相互に影響を及ぼしあうことの他、進展にともなって、位相が変化するという影響に限らず、それぞれを個別に考えた場合についても、き裂進展挙動におよぼす影響が明らかになっていない。例えば、 ΔK_{II} が等しい場合かつ、応力比が異なるというせん断応力の負荷条件下のモードIIき裂進展挙動を例に取って考えてみると、鋼材を対象にした研究によって、絶対値がき裂進展挙動に影響を及ぼすという結果が得られている⁽¹⁶⁾ が、セラミックス材料については、未だ明らかになっていないのが現状である。そこで本報では、 K_I については、往路・復路の最大値 $K_{I\max}$ を、 K_{II} と K_{III} については、最大値と最小値の差 ΔK をパラメータにき裂進展挙動を評価することとした。

3.3.1 球の転走方向と平行方向へのき裂進展挙動

図10に、き裂の進展にともなう応力拡大係数の変化を示す。図中の各点は、次の手順で求めた。まず、図4で示したき裂長さの変化を、繰返し数で代表させた複数のき裂のグループの変化としてとらえた。次に、そのグループの平均値を、き裂長さの変化として、繰返し数の順にプロットした。図10から、 ΔK_{II} は、転がり接触下とすべり-転がり接触下で変化しないこと、

ΔK	Sliding including rolling contact	Rolling contact
$K_{I\max}$	—●—	—○—
ΔK_{II}	—■—	—□—
ΔK_{III}	—▲—	—△—

Fig. 10 Stress intensity factor ranges as a function of crack length in the parallel direction

Fig. 11 Stress intensity factor ranges as a function of crack length in the perpendicular direction

また、 $K_{I\max}$ と ΔK_{II} はすべり-転がり接触下の方が大きいことがわかる。このことから、すべり-転がり接触、つまり、接触面に存在する摩擦力が $K_{I\max}$ と ΔK_{II}

を増加させることがわかる。したがって、すべり-転がり接触下でき裂の進展量が大きくなるという実験結果から、境界近傍領域に位置し、平行方向に進展するき裂の進展には、接触面の摩擦力によって大きくなった $K_{I\max}$ と ΔK_{II} が影響するものと考えることができる。また、3・2・1 項の (2) で示したように、 K_{II} の最大値と最小値を示す球の位置で、引張り応力が負荷され、さらに、すべり-転がり接触下で ΔK_{II} が最も大きいことがわかる。これらのことから、境界近傍領域で転走方向と平行に進展するき裂は、モード I とモード II の混合モードで進展し、その主進展モードは、モード II とみなしてよいものと思われる。

3・3・2 球の転走方向と直角方向へのき裂進展挙動

3・3・1 項と同様に、図 11 にき裂の進展にともなう応力拡大係数の変化を示す。図 11 から、直角方向に進展するき裂に対しては、すべり-転がり接触下の全応力拡大係数が大きくなっていることがわかる。したがって、直角方向にも、摩擦力によって増加した応力拡大係数の影響でき裂進展量が大きくなったことがわかる。また、すべり-転がり接触下、転がり接触下の両接触条件下においても、 ΔK_{II} の値が最も大きいことがわかる。さらに、3・2・2 項 (5) に示したように、 K_{II} の最大値と最小値を示す球の位置で、き裂には圧縮応力が負荷されることから、き裂は主としてモード II で進展したと考えることができる。

以上の考察により、転走方向に平行・直角の両方向に進展するき裂は、主としてモード II で進展することが明らかとなった。ここで、き裂の進展量を進展方向に対して比較してみると、平行方向への進展量が若干大きいことがわかる。これは、3・1・1 項の (2) および、3・1・2 項の (5) で示したように、 K_{II} の最大値・最小値を示す球の位置では、引張り応力が負荷されるため、き裂面間の摩擦といった進展抵抗が軽減されることが原因であると考えられる。

4. 結 言

窒化けい素の球-平板接触下における微小表面き裂の進展挙動に関して、油圧の影響が小さい位置におけるき裂の進展挙動を評価するため、球の転走軌道の境界近傍領域に位置する表面き裂に注目し、実験的観察により得られた進展挙動を破壊力学的観点から評価した。得られた結果は以下のとおりである。

(1) き裂は、潤滑油の浸入効果の影響が小さい接触域の境界近傍領域でも進展する。また、き裂は球の転走方向に対して直角と平行の両方向に進展し、転がり接触下と比較して、すべり-転がり接触下の方が進展

量が大きい。これは、接触表面の摩擦力が、すべり-転がり接触下の各応力拡大係数を増加させることが原因である。

(2) き裂の進展方向に対しては、直角と平行の両方向で、また、接触条件に対しては、転がり接触とすべり-転がり接触の両条件下で、それぞれ応力拡大係数履歴は異なった傾向を示す。しかし、全条件とも、き裂の進展に対しては、初期の傾向をほぼ維持するという特徴を示す。

(3) 応力拡大係数の負荷回数については、すべり-転がり接触下における K_I の最大値を示す回数と K_{II} の最大値・最小値を示す回数が、転がり接触下の半分に減少するという特徴が見られる。この特徴は、直角・平行の両方向に進展するき裂に対して共通である。

(4) 転走方向と平行・直角の両方向に進展するき裂は、主としてモードⅡで進展する。また、応力拡大係数は球の移動とともに複雑に重畳する傾向を示す。平行方向に進展するき裂は、 K_{II} の最大値・最小値を示す球の位置で引張り応力が負荷されるため、き裂面間の摩擦といった進展抵抗が軽減されることが原因で進展が助長される。

終わりに、本研究を遂行するにあたり、御協力をいただいた当時本学学生であった百々敬之氏〔現：三菱重工業（株）〕、吉岡高広氏〔現：（株）グンゼ〕、市山智士氏〔現：日産自動車（株）〕、水島哲朗氏〔現：三菱重工業（株）〕に感謝の意を表します。

文 献

- (1) 日本セラミックス協会編，セラミック先端材料，(1991)，385-388，オーム社。
- (2) 六角和夫・竹林博明・西田勝利，セラミックス転がり軸受の性能と応用，*Koyo.Eng.J.*, 133 (1988)，63-71。
- (3) 竹林博明，セラミックス軸受のはめあいとセラミックス円筒軸受の寿命の検討，*Koyo.Eng.J.*, 136 (1989)，12-14。
- (4) 木田勝之・小倉敬二，球-平板接触下における窒化けい素の微小表面き裂進展挙動と摩耗挙動の観察，*機論*，65-632，A (1999)，846-852。
- (5) 木田勝之・小倉敬二，窒化けい素の球-平板接触応力下におけるき裂進展挙動の破壊力学的考察（接触域中央部における微小表面き裂の進展挙動），*機論*，65-638，A (1999)，2113-2119。
- (6) 綿林英一，転がり軸受マニュアル，(1999)，85，日本規格協会。
- (7) Bower, A. F., The Influence of Crack Face Friction and Trapped Fluid on Surface Initiated Rolling Contact Fatigue Cracks, *Trans. ASME, J. Tribol.*, 110, (1988), 704-711。
- (8) Keer, L.M. and Bryant, M. D., A Pitting Model for Rolling Contact Fatigue, *Trans. ASME, J. Lubr. Technol.*, 105, (1983), 198-205。
- (9) Kaneta, M., Suetsugu, M. and Murakami, Y., Mechanism of Surface Crack Growth in Lubricated Rolling / Sliding Spherical Contact, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 53, (1986), 354-360。
- (10) Kaneta, M. and Murakami, Y., Effects of Oil Hydraulic Pressure on Surface Crack Growth in Rolling / Sliding Contact, *Tribol. Int.*, 20-4, (1987), 210-217。
- (11) 村上敬宜・栄中・市丸和徳，トライボロジー問題への破壊力学の応用（第1報，転がり接触荷重下の三次元曲面き裂の伝ば解析），*機論*，58-556，A(1992)，2313-2320。
- (12) Hanson, M.T., The Elastic Field for Spherical Hertzian Contact Including Sliding Friction for Transverse Isotropy, *Trans. ASME, J. Tribol.*, 114 (1992)，606-611。
- (13) Irwin, G. R., Crack-Extension Force for a Part-Through Crack in a Plate, *Trans. ASME, Ser E, J. Appl. Mech.*, 29, (1962)，651-654。
- (14) Kassir, M. K. and Sih, G. C., Three-Dimensional Stress Distribution Around an Elliptical Crack Under Arbitrary Loadings, *Trans. ASME, Ser E, J. Appl. Mech.*, 33, (1966)，601-611。
- (15) 小倉敬二・木田勝之・百々敬之・市山智士，繰返しすべり接触応力下における窒化けい素のき裂進展挙動，セラミックスの破壊力学に関するシンポジウム講演論文集，96-52，(1996)，37-41。
- (16) Ohkawa, I., Takahashi, H., Moriwaki, M. and Misumi, M., A Study on Fatigue Crack Growth Under Out-of-Phase Combined Loadings, *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, 20-6, (1997)，929-940。