光弾性応力測定における主応力分離のためのハイブリッド解析*

早房 敬祐^{*1}, 井上 裕嗣^{*2}, 田中 秀一^{*3}
岸本 喜久雄^{*2}, 渋谷 壽一^{*2}

Hybrid Analysis for Stress Separation in Photoelasticity

Keisuke HAYABUSA, Hirotsugu INOUE^{*4}, Shuichi TANAKA,
Kikuo KISHIMOTO and Toshikazu SHIBUYA^{*4} Tokyo Institute of Technology, Dept. of Mechanical and Control Engineering,
2-12-1 O-okayama, Meguro-ku, Tokyo, 152-8552 Japan

Photoelasticity is a non-contact and full-field type method of experimental stress analysis. It does not provide individual stress components directly. In this study, a new technique of stress separation is developed, in which this problem is divided into the following three: (1) determination of the difference of the principal stresses based on isochromatic data, (2) estimation of unknown boundary values from the difference of the principal stresses, and (3) computation of individual stress components inside the body based on the estimated boundary values. Problem (1) is solved by using the isochromatic fringe images obtained at incremental loading steps. Fourier transform method and direct method are applied to determine the difference of the principal stresses. Problems (2) and (3) are formulated and solved by BEM. A nonlinear optimization method is employed to solve problem (2) since the relation between the unknown boundary value and the difference of the principal stresses is nonlinear. The effectiveness of this technique is verified through numerical simulation and experimental data analysis.

Key Words: Photoelasticity, Experimental Stress Analysis, Stress Separation, Inverse Problem, Boundary Element Method, Optimization

1. 結 言

光弾性応力測定法は、荷重を受けた透明な均質等方材料に生じる複屈折現象を利用して応力を測定する方法であり、実験応力解析法として古くから実用に供されている。しかし、この方法により測定されるのは主応力差に関係した等色線、および、主応力方向に関係した等傾線と呼ばれる縞画像であり、各応力成分を直接得ることはできない。そこで、縞画像から応力成分を算定する主応力分離法が広く研究され、これまでに種々の方法が提案されている。

主応力分離法は、(i) 等色線と等傾線の両方を用いる方法と (ii) 等色線のみを用いる方法の2つに大別される。(i)の方法には、例えばせん断応力差積分法⁽¹⁾や主応力差が得られる実験・計算手法を併用する方法⁽²⁾⁻⁽⁴⁾など多くの方法が開発されている。しかし、等傾線は太く不明瞭である場合が多く、このために主応力分離

の精度が低下することが多い。そこで、等傾線を用いずに主応力分離を行う(ii)の方法が開発されている。例えば、西田ら⁽⁵⁾は、Lamé-Maxwellの主応力線に沿う釣合方程式を用いて主応力方向を決定する方法を示した。また、渋谷ら⁽⁶⁾は、せん断応力差積分法において応力の釣合式だけでなく適合条件式も考慮した主応力分離法を示した。しかし、これらの方法は、差分法により試験片の自由境界から内部の応力を逐次決定する方法であるため、誤差が蓄積されやすい上に、試験片形状が複雑な場合は適用が困難である。

そこで、著者ら⁽⁷⁾は誤差の蓄積が生じない領域型の方法として、等色線画像データと境界要素解析を組み合わせたハイブリッド手法を提案した。この方法は、任意に設定した解析領域について等色線光強度に基づく境界値逆解析により未知の境界条件を推定し、さらに、境界値順解析により領域内部の応力分布を求めるもので、境界要素法を用いることにより、試験片形状が複雑な場合にも比較的容易に適用できる。ところが、この方法では等色線光強度に基づく非線形境界値逆解析において目的関数が多峰性を有するため、合理的な解を得ることが困難であった。この難点を解決するためには、主応力分離問題を次の3つの問題に分割することが有効であると考えられる。

* 原稿受付 1999年9月28日。

^{*1} 正員, 東京工業大学大学院 [現: (株)荏原総合研究所]。^{*2} 正員, 東京工業大学大学院 (〒152-8552 東京都目黒区大岡山2-12-1)。^{*3} 東京工業大学大学院。

E-mail: inoueh@mep.titech.ac.jp

Fig. 1 Experimental set up in photoelasticity.

- (1) 解析を行う領域において、等色線光強度から主応力差を決定する問題
- (2) (1) で決定した主応力差に基づいて未知の境界条件を推定する境界値逆問題
- (3) (2) で推定した境界条件と既知の境界条件に基づいて領域内部の応力成分を求める境界値順問題

ところで、上記(1)の主応力差決定問題においては等色線光強度と主応力差との関係が非線形であるため、一画面の等色線光強度から主応力差を決定することは容易でない。また、上記(2)の境界値逆問題は、非線形である上に不適切性を有する場合が多いため、安定な解を得ることが困難である。そこで、本研究では主応力差決定問題および境界値逆問題における難点を解決することにより光弾性応力測定における主応力分離の高精度化を図った。そして、数値シミュレーションにより本研究の主応力分離法の有効性を確認し、さらに、実測データに対して本研究の手法を適用し実用性を検証した。

2. 光弾性応力測定

図1のように円偏光にして等色線のみを抽出するとき、ある点において測定される等色線光強度と位相差の関係は次式で表される。

$$I_d = A \sin^2 \theta + B \quad (1)$$

$$I_l = A \cos^2 \theta + B \quad (2)$$

$$\theta = \pi \alpha t \sigma_d \quad (3)$$

ここで、 A は定数、 B は背景の光強度、 α は光弾性感度、 t は板厚、 σ_d は主応力差、 θ は試験片を通過したことにより生じる位相差であり、 I_d と I_l はそれぞれ暗視野と明視野における等色線光強度を表す。暗視野の光強度を正規化すると次式を得る。

$$I_d^* = \frac{I_d - I_{d0}}{I_{l0} - I_{d0}} = \sin^2 \theta \quad (4)$$

ここで、 I_{d0} と I_{l0} はそれぞれ無負荷時の暗視野と明視野の光強度、 I_d^* は正規化された暗視野光強度である。

3. 主応力差決定法

等色線光強度から主応力差を決定する方法にはハーフフリンジ法⁽⁸⁾、荷重増加法⁽⁵⁾⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾、位相シフト法⁽¹¹⁾、光波長変化法⁽⁵⁾⁽¹²⁾、位相変調法⁽¹³⁾、3色光弾性法⁽¹⁴⁾などが知られている。中でも荷重増加法は試験片に加える荷重を段階的に増加させた場合の光強度の変化に基づいて主応力差を求める方法であり、特別な装置が不要、測定が容易、点ごとに主応力差決定が可能などの利点を有している。そこで、本研究では荷重増加法を採用し、光強度の変化から主応力差を決定する手法を検討した。

3.1 フーリエ変換法 Ng⁽⁹⁾は離散フーリエ変換を利用して相対位相差を求め、それに基づいて主応力差を求める方法を示した。以下にその方法を示す。

式(1)によれば、荷重の増加に対する等色線光強度の変化は図2(a)のようになる。このデータを離散フーリエ変換すれば、図2(b)のようになる。一方、式(1)を書き直すと、次式を得る。

$$I_d = -\frac{A}{4}(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) + \left(\frac{A}{2} + B\right) - \frac{A}{4}(\cos 2\theta - i \sin 2\theta) \quad (5)$$

式(5)の第1項は正の位相差成分、第2項は定数項、第3項は負の位相差成分を表しており、図2(b)に示す各位相差成分とそれぞれ対応している。そこで、式(5)の第1項に相当する成分のみを抽出した後、逆変換を行えば、次式で表されるデータを得る。

$$\tilde{I}_d = -\frac{A}{4}(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \quad (6)$$

このデータから次式により位相差 θ_{rel} が得られる。

$$\theta_{rel} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left\{ \frac{\text{Im}(\tilde{I}_d)}{\text{Re}(\tilde{I}_d)} \right\} \quad (7)$$

式(7)により得られる θ_{rel} は逆正接関数の主値であるから、図2(c)に“relative”で示す相対位相差となる。一方、実際の最大荷重における絶対位相差は図2(c)の●印で示される。そこで、相対位相差を“absolute”で示す絶対位相差に変換するために、位相の“unwrap”の操作と初期位相を差し引く操作を行う。この操作により得られた絶対位相差を下添字 $_{abs}$ を付して表せば、主応力差は次式により得られる。

$$\sigma_d = \frac{1}{2\pi\alpha t} \left[\tan^{-1} \left\{ \frac{\text{Im}(\tilde{I}_d)}{\text{Re}(\tilde{I}_d)} \right\} \right]_{abs} \quad (8)$$

Fig. 2 Determination of the difference of the principal stresses by the Fourier transform method.

Fig. 3 Determination of the difference of the principal stresses by the direct method.

測定された縞画像の各点についてこの操作を行えば、主応力差の分布が得られる。

ところで、離散フーリエ変換を適用すると、図2のように縞次数が整数である場合には位相差が正確に求められるが、そうでない場合には離散フーリエ変換に伴う誤差のために位相差の算定精度が低下する。本研究ではこの問題の対策として光弾性縞増倍法⁽¹⁵⁾⁻⁽¹⁷⁾を適用し、見かけ上の縞の数を増加させることにより誤差の低減を図った。三角関数の2倍角および3倍角の公式に式(4)を代入すれば次式を得る。

$$I_{d(2)}^* = -4I_d^{*2} + 4I_d^* \dots\dots\dots (9)$$

$$I_{d(3)}^* = 16I_d^{*3} - 24I_d^{*2} + 9I_d^* \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 $I_{d(2)}^*$ は2倍の暗視野光強度、 $I_{d(3)}^*$ は3倍の暗視野光強度を表す。なお、この方法において縞の増倍を大きくし過ぎると光強度の変化も急になるためエイリアシングを生じ、位相差の算定精度は逆に低下する。

3.2 直接法 前述のフーリエ変換法では離散フーリエ変換に伴う誤差が問題となるため、本研究ではより単純な方法として、光強度から直接位相差を求め、主応力差を決定する方法も検討した。

式(4)によれば、荷重の増加に対する光強度の変化は図3(a)のようになる。式(4)を θ について解くと、次式を得る。

$$\theta_{rel} = \sin^{-1} \sqrt{I_d^*} \dots\dots\dots (11)$$

式(11)により得られる位相差 θ_{rel} は逆正弦関数の主値

Fig. 4 Description of inverse boundary value problem.

であるから、図3(b)に“relative”で示す相対位相差となる。一方、絶対位相差は図3(b)の●印で表される。そこで、相対位相差の荷重に対する増分の絶対値が絶対位相差の増分と等しいことを考慮して、荷重に対する相対位相差の増分を図3(c)のように求め、この増分の絶対値の累積和を求めることより絶対位相差を求める。この操作により得られたデータを下添字 $_{abs}$ を付して表せば、主応力差 σ_d は次式により得られる。

$$\sigma_d = \frac{1}{\pi \alpha t} \left(\sin^{-1} \sqrt{I_d^*} \right)_{abs} \dots\dots\dots (12)$$

4. 境界値逆問題解析

均質等弾性体に対する平面応力問題を考える。図4に示すように、光弾性応力測定により試験片の一部(または全体)の縞画像データが得られているとし、この領域を測定領域と呼ぶ。さらに、測定領域内におい

て主応力分離を行う領域 Ω (これを解析領域と呼ぶ) を設定し、その境界を Γ とする。境界 $\Gamma (= \Gamma_0 \cup \Gamma_1)$ のうち、境界 Γ_1 (例えば自由表面) では境界条件が既知であるが、境界 Γ_0 (例えば試験片内部に設定した仮想境界) では境界条件は未知である。一方、解析領域 Ω の内部においては前述の主応力差決定法により主応力差 σ_d が得られているとする。このとき、主応力差 σ_d に基づいて境界 Γ_0 上の表面力を求める境界値逆問題について考える。

体積力がない場合、Somigliana の式より、内部測定点 p における応力成分 σ_{ij} と境界 Γ 上の点 Q における表面力 t_k および変位 u_k の関係は次式で表される。

$$\sigma_{ij}(p) = \int_{\Gamma} D_{ijk}(p, Q) t_k(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{ijk}(p, Q) u_k(Q) d\Gamma \quad (13)$$

ここで、 D_{ijk} 、 S_{ijk} は基本解から求まる既知の関数を表す。境界要素法の手法⁽¹⁸⁾により境界 Γ を有限個の要素に分割して離散化すれば次式を得る。

$$\sigma = G_c t - H_c u \quad (14)$$

ここで、 σ は解析領域 Ω の内部の多数の点における応力成分 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} からなるベクトル、 t と u はそれぞれ境界 Γ 上の節点における表面力成分および変位成分からなるベクトル、 G_c と H_c は基本解から定まる既知の行列である。

次に、境界積分方程式を利用して、節点における表面力と変位に関する付加条件を導入する。境界 Γ 上の点 P 、 Q における変位 u_j と表面力 t_j に関する境界積分方程式は次式で表される。

$$C_{ij}(P) u_j(P) = \int_{\Gamma} U_{ij}(P, Q) t_j(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ij}(P, Q) u_j(Q) d\Gamma \quad (15)$$

ここで、 C_{ij} は境界形状によって定まる定数である。式(13)を離散化した場合と同様に離散化すれば次式を得る。

$$Gt - Hu = 0 \quad (16)$$

ここで、 G と H は基本解から定まる既知の行列である。式(16)を式(14)に代入し、既知の境界条件を適用すれば、次式のように境界 Γ_0 上の表面力と解析領域 Ω 内部の応力成分との関係式が得られる。

$$\sigma = Ct_0 \quad (17)$$

ここで、 t_0 は境界 Γ_0 上の節点における表面力成分からなるベクトル、 C は既知の行列を表す。応力成分と

Fig. 5 Tension of rectangular plate with a central hole.

主応力差の間には次式の関係がある。

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (18)$$

式(17)と式(18)を用いれば、解析領域 Ω 内部の多数の点における主応力差からなるベクトル σ_d は未知境界値 t_0 の関数として $\sigma_d(t_0)$ のように表せる。一方、解析領域 Ω 内部では主応力差のデータ $\hat{\sigma}_d$ が得られている。そこで、非線形最適化により次式の目的関数を最小とする未知境界値を求める。

$$\Pi = \|\hat{\sigma}_d - \sigma_d(t_0^*)\|^2 \quad (19)$$

ここで、 t_0^* は未知境界値の推定値を表す。本研究ではロバストかつ効率的であり、非線形最小二乗問題の有力な解法である Levenberg-Marquardt 法を採用した。

ところで、この逆問題では、ある主応力差の分布に対して境界条件が一意に定まらない。例えば、全ての境界上の表面力の正負を逆にしても、主応力差は同一である。すなわち、式(19)の目的関数は2つの極小値を有するので、初期値の設定によっては推定値の符号が逆転する場合がある。そこで本研究では、試験片に作用する荷重の方向を付加条件として用いることにより解の一意性を確保した。

5. 主応力分離シミュレーション

5.1 シミュレーションの方法 本研究の主応力分離法の妥当性を検証するために、図5に示すような円孔を有する帯板の引張りについて数値シミュレーションを行った。ここでは後述の実験と同条件にするために材質はエポキシを想定し、縦弾性係数 $E = 3$

Fig. 6 Exact distribution of stress components obtained by BEM direct analysis. (MPa)

Fig. 7 Exact distribution of the difference of the principal stresses. (MPa)

Fig. 8 Exact distribution of traction on Γ_0 .

GPa, ポアソン比 $\nu = 0.30$, 光弾性感度 $\alpha = 0.0677$ mm/N とし, 板厚は 6.1 mm とした.

通常の画像では測定領域のデータ点数が非常に多いが, これらのデータをすべて用いて解析を行うと計算の効率が悪い. しかし, 本研究の主応力分離手法では, 解析領域を任意に設定すること, および, 解析に用いる測定データを解析領域内で任意に選択することが可能である. そこで本数値シミュレーションでは図5中の正方形 ABCD のように解析領域を定め, $\times$ 印で示す位置の $M = 1493$ 個のデータを選択した.

5.2 境界要素法順解析 主応力分離の結果の精度を評価する際に基準とするデータを作成するために, 図5の試験片全体をモデル化して境界要素法順解

Fig. 9 Isochromatic fringe images obtained at incremental loading.

析を行った. また, 解析領域の境界 AB, CD 上の表面力は, その位置における応力成分より Cauchy の式を使って求めた. 荷重 F を 500 N とした場合について, 解析領域 ABCD 内部の各応力成分の分布を等高線表示したものを図6に, 主応力差の分布を3次元表示したものを図7に示す. また, 図8(a), (b) はそれぞれ境界 AB, CD 上の表面力を示しており, 破線は x 方向, 実線は y 方向の表面力である.

次に同様の解析により, 数値シミュレーションにおいて測定データとして用いる等色線光強度データを作成した. 荷重 F は 0 ~ 500 N まで 25 N 間隔で変化させ, 21 組の等色線光強度データを作成した. 作成した等色線縞画像の一部を図9に示す.

5.3 主応力差の決定 図9のような一連の等色線縞画像データに基づいて, 図5中の $\times$ 印の点における主応力差の分布を決定した.

Fig. 10 Distribution of the difference of the principal stresses obtained by the Fourier transform method. (MPa)

Fig. 11 Distribution of the difference of the principal stresses obtained by applying fringe multiplication. (MPa)

まず、フーリエ変換法による結果を図10に示す。図10を図7と比較すると、得られた分布は段状であり、主応力差は正しく求められていない。これは主に離散フーリエ変換に伴う誤差の影響である。

次に、光弾性縞増倍法を適用して精度向上を図った。式(10)により3倍に増倍した一連の縞画像データに基づいて、フーリエ変換法により決定した主応力差の分布を図11に示す。図11を図10と比較すると、増倍により個々の段差は小さくなっている。しかし、分布は依然不連続的であり図7とは大きく異なっている。すなわち、フーリエ変換法は、光弾性縞増倍法を併用しても離散フーリエ変換による誤差の影響を避けることができず、十分な精度で主応力差を決定できない。

続いて、直接法により決定した主応力差の分布を図12に示す。図12の図7に対する最大誤差は円孔縁における0.99 MPaである。この原因として円孔縁における縞画像の画像数不足が考えられる。しかし、円孔縁を除くほとんどの解析領域では主応力差は良好な精

Fig. 12 Distribution of the difference of the principal stresses obtained by the direct method. (MPa)

Fig. 13 Traction distribution on Γ_0 estimated from Fig. 12. (Δ : x -direction, $\bigcirc$: y -direction)

度で求められている。よって、主応力差の決定には直接法が有効であると言える。

5.4 主応力分離 図12の主応力差の分布に基づいた境界値逆問題解析により表面力の推定を行い、さらに、その結果に基づいて解析領域内部の応力成分を求めた。表面力を推定する境界 Γ_0 は図5の境界AB, CDに相当し、主応力差は図5に $\times$ 印で示す $M = 1493$ の点で与えられている。ところで、境界値逆問題における解の推定精度は未知境界上の節点数 N やデータ数 M に依存し、未知量の個数 $2N$ に対してデータ数 M を過剰に取れば推定精度が向上する。本解析では図5に示すように円孔部分を36分割、正方形部分を32分割(各辺を8分割)とし、境界要素は2次要素を用いた。したがって、未知量の個数 $2N$ は68である。最適化の初期値 t_0 は x 方向成分は0, y 方向成分は2.07 MPa(断面AB, CDの平均応力)とした。

図13に表面力の推定結果を示す。図13を図8と比較すると、両者は全域にわたって良く一致している。さらに、図13に基づいて順問題解析を行い各応力成分を求めた結果を図14に示す。この結果を図6と比較すると両者は良く一致しており、本研究の主応力分離法の妥当性が確認される。

Fig. 14 Distribution of stress components obtained from estimated traction shown in Fig. 13. (MPa)

Fig. 15 Isochromatic fringe images obtained experimentally.

6. 実験データの主応力分離

6.1 実験方法 本研究の主応力分離法の実用性を検証するために、実験により得られた等色線縞画像データに基づいて主応力分離を行った。試験片、負荷条件および境界要素解析の設定などは前述の数値シミュレーションの場合と同一で、図5に示した通りである。荷重増加法を適用してCCDカメラで撮影した一連の等色線縞画像の一部を図15に示す。

6.2 主応力差の決定 図15のような一連の縞画像データに基づいて、荷重に対する等色線光強度の変化から直接法により決定した主応力差の分布を図16に示す。この結果を図7と比較すると、主応力差は円孔近傍では僅かに小さく評価されているが、それ以外のほとんどの領域では十分な精度で求められていることがわかる。

Fig. 16 Difference of the principal stresses with direct method. (MPa)

Fig. 17 Traction distribution on Γ_0 estimated from Fig. 16. (Δ : x -direction, $\bigcirc$: y -direction)

6.3 主応力分離 図16の主応力差分布に基づいて境界値逆問題解析により表面力の推定を行った。図17に推定された表面力を示す。図17によれば、表面力の推定結果は中央部付近で僅かに振動しているものの、全体的にはほぼ十分な精度を有している。さらに図17の結果に基づいて順問題解析を行い、応力成分を求めた結果を図18に示す。この結果を図6と比較すると両者はほぼ一致しており、主応力分離の精度は十分高いことがわかる。よって、本研究の主応力分離法は実験データに対しても有効であることが示された。

Fig. 18 Distribution of stress components obtained from estimated traction shown in Fig. 17. (MPa)

7. 結 言

本論文では、光弾性応力測定において等色線縞画像データから応力成分を求める主応力分離問題を次の3つの問題に分割するハイブリッド解析法を論じた。

- (1) 荷重増加法により一連の等色線光強度から主応力差を決定する問題
- (2) (1) で決定した主応力差に基づいて未知の境界条件を推定する境界値逆問題
- (3) (2) で推定した境界条件と既知の境界条件に基づいて領域内部の応力成分を求める境界値順問題

(1) の主応力差決定問題に対しては、等色線光強度から直接的に位相差を求める方法を提案した。また、(2) と (3) の境界値問題については境界要素法による解析法を示し、特に (2) の逆問題に対しては非線形最適化により高精度かつ安定な解を得る方法を示した。そして、数値シミュレーションおよび実測データの解析を行い、本研究の方法は従来の方法に比べてより汎用的であり、また高精度な結果が得られることを示した。

なお、上記 (1) の主応力差決定問題は、画像データから境界値逆問題の入力データを抽出する問題として一般的にとらえることができる。さらに、抽出された入力データと未知境界値とは、多くの場合に本研究の場合と同様に関係づけられる。したがって、本研究のハイブリッド解析法の基本的な考え方は、熱弾性応力測定法などの他の画像による実験応力・ひずみ解析にも比較的容易に拡張できると考えられる。

文 献

- (1) Frocht, M.M., *Photoelasticity*, Vol.1, (1941), 252-286, John Wiley & Sons.
- (2) Frocht, M.M., *Photoelasticity*, Vol.2, (1948), 235-237, John Wiley & Sons.
- (3) 例えば、辻二郎・西田正孝・河田幸三, 光弾性実験法, (1965), 152, 日刊工業新聞社.
- (4) Barone, S. and Patterson, E.A., Full-Field Separation of Principal Stresses by Combined Thermo- and Photoelasticity, *Exp. Mech.*, **36**-4 (1996), 318-324.
- (5) 西田正孝・大井尚一, 光弾性応力解析の全自動化について (I. 方法の基礎的考察), (II. システムの応用), 光弾性論文集, **8**-2 (1988), 19-32.
- (6) Shibuya, T., Koizumi, T., Takakuda, K. and Maeno, T., New Separation Method of Photoelastic Principal Stresses Using a Micro-Computer, *Bull. JSME*, **29**-248 (1986), 400-407.
- (7) Hayabusa, K., Inoue, H., Kishimoto, K. and Shibuya, T., Boundary Element Inverse Analysis for Photoelasticity, *Inverse Problems in Engineering Mechanics*, (1998), 603-612, Elsevier.
- (8) Voloshin, A.S. and Burger, C.P., Half-Fringe Photoelasticity: A New Approach to Whole-Field Stress Analysis, *Exp. Mech.*, **20**-3 (1983), 304-313.
- (9) Ng, T.N., Photoelastic Stress Analysis Using an Object Step-Loading Method, *Exp. Mech.*, **37**-2 (1997), 137-141.
- (10) Ekman, M.J. and Nurse, A.D., Absolute Determination of the Isochromatic Parameter by Load-stepping Photoelasticity, *Exp. Mech.*, **38**-3 (1998), 189-195.
- (11) 梅崎栄作・小池尚男・渡辺寛, 一般化位相シフト法による光弾性しま次数の全域自動測定, 機論, **62**-599, A (1996), 1690-1695.
- (12) Chen, T.Y., Digital Determination of Photoelastic Birefringence Using Two Wavelengths, *Exp. Mech.*, **37**-3 (1997), 232-236.
- (13) 新津靖・一瀬謙輔・五味健二, レーザ光弾性法を用いたせん断応力差積分法によるガラス板内応力分布の実験応力解析, 機論, **64**-619, A (1998), 696-702.
- (14) Yoneyama, S., Shimizu, M. and Takashi, M., Higher Retardation Analysis in Automated White Light Photoelasticity, *Experimental Mechanics, Advances in Design, Testing and Analysis*, (1998), 527-532, Balkema.
- (15) Liu, X. and Yu, Q., Some Improvement on Digital Fringe-Multiplication Methods, *Exp. Tech.*, **17**-1 (1993), 26-29.
- (16) Chen, T.Y., Digital Fringe Multiplication in Three-Dimensional Photoelasticity, *J. Strain Analysis*, **30**-1 (1995), 1-7.
- (17) 南家由紀久・梅崎栄作, 画像処理による光弾性縞の増倍と抽出, 機論, **64**-622, A (1998), 1725-1730.
- (18) 例えば, 結城良治・木須博行, 境界要素法による弾性解析, (1992), 141-148, 培風館.