微視組織と相互作用する疲労き裂の塑性誘起き裂閉口の解析*

秋庭 義明^{*1}, 田中 啓介^{*1}, 木村 英彦^{*2}Analysis of Plasticity-induced Crack Closure of Fatigue Crack
Interacting with MicrostructureYoshiaki AKINIWA^{*3}, Keisuke TANAKA and Hidehiko KIMURA^{*3} Nagoya University, Dept. of Mechanical Engineering,
Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya, Aichi, 464-8603 Japan

The propagation behavior of small fatigue cracks was numerically simulated to evaluate the development of crack closure with crack growth. The effect of the interaction between crack-tip slip band and grain boundaries on plasticity-induced crack closure was analyzed under plane stress condition. The crack and slip bands were assumed to be coplanar. When the slip band crosses the grain boundary, the larger resistance of slip motion in the next grain induces a reduction in the crack opening displacement range and an increase in the crack opening stress. The distribution of the residual stretch was geometrically similar to the change of the maximum crack tip opening displacement with crack extension. The relation between the crack opening displacement range and the effective stress intensity range was nearly unique. When the slip band extends over many grains, the irregularity of crack opening displacement range and crack opening stress diminishes. The crack propagation life can be calculated as a function of the crack length and the stress level on the basis of the crack-tip opening displacement range.

Key Words: Fatigue, Crack Closure, Crack Opening Stress, Crack Opening Displacement, Simulation, Microstructure

1. 緒 言

比較的長い疲労き裂の伝ば速度は、応力拡大係数範囲 ΔK の関数として一価的に表され寿命評価が可能となってきた。一方、微小疲労き裂の伝ば挙動は負荷応力振幅に依存し、長いき裂の関係とは異なる。同一の ΔK で比較すると、長いき裂より高速に伝ばし、低応力振幅では、き裂伝ばとともに伝ば速度が低下し停留き裂となるなど、従来の ΔK をもとにした線形破壊力学では説明できない特異な挙動をとることが知られている。これらの挙動にはき裂口が重要な役割を果たすことが指摘されている⁽¹⁾⁽²⁾。特に、き裂発生初期のき裂寸法が結晶粒径程度の場合、き裂伝ば速度は微視組織の影響を受け大きくばらつき^{(3)~(5)}、このようなき裂は微視組織的微小き裂と称される⁽⁶⁾。平滑材の疲労限度あるいは疲労限度近傍の疲労寿命は微視組織的微小き裂の伝ば条件で決定されるため、この伝ば挙動を把握することは重要である。

既報^{(7)~(9)}では微視組織的微小き裂の伝ば挙動を、

き裂先端のすべり帯(塑性域)と結晶粒界との相互作用の観点からとらえ、連続分布転位論を用いて解析した。本手法は実際のき裂伝ば挙動およびき裂伝ば速度の統計的な性質が表現可能であり、微視組織的微小疲労き裂の解析に有効であることを示した。さらに前報⁽¹⁰⁾では塑性誘起き裂閉口に注目し、隣接粒によってき裂先端のすべり帯が完全に阻止される場合についてのき裂開閉口挙動を解析し、き裂開閉口応力やき裂先端開口変位に及ぼす隣接粒の影響を検討した。しかしながらき裂が隣接粒に伝ばする過程は明らかでなかった。そこで本研究では、既報^{(7)~(9)}と同様の一次元き裂を対象として、き裂およびすべり帯が隣接粒に伝ばする場合について平面応力下でのき裂伝ばシミュレーションを行い、塑性誘起き裂閉口に及ぼす材料微視組織の影響を検討した。

2. 解 析 方 法

2・1 解析モデル 疲労き裂先端での塑性変形は、主すべり系の分解せん断応力に依存し、これは各結晶粒のシュミット因子に影響を受ける。本研究では既報^{(7)~(9)}と同様に簡便なモデルを用いて、き裂とすべり帯が同一平面上に直線的に伝ばするものとし、各結晶粒内の転位の摩擦応力を変化させることによって微

* 原稿受付 1999 年 11 月 10 日。

^{*1} 正員, 名古屋大学工学研究科 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町)。^{*2} 准員, 名古屋大学大学院工学研究科。

E-mail: akiniwa@mech.nagoya-u.ac.jp

視組織の影響を検討する。図1にき裂先端すべり帯と結晶粒界との相互作用モデルを模式的に示す⁽¹¹⁾。図中の σ_k^f ($k=1, 2, \dots, n$) はき裂中央から k 番めの結晶に対する転位の摩擦応力(降伏応力に対応)で、 L_k ($=d_1/2+\Sigma d_k$: d_k は k 番めの結晶粒径) はき裂中央から k 番めの粒界までの距離である。半長 a のき裂に繰返し応力を負荷する場合、き裂伝ば初期ではすべり帯は粒界に達せず(a)の平衡すべり帯となる⁽¹¹⁾。き裂の伝ばに伴いすべり帯が成長するとすべり帯は隣接粒へと進展し、(b)の越境すべり帯となる。さらにき裂が伝ばすると(c)に示すごとくすべり帯は複数の結晶粒を貫通する。

長さ a のき裂先端が中央から j 番めの結晶にあり、すべり帯先端が n 番めの結晶内にあるとき、 c (き裂長さ)と塑性域寸法の和)は解の存在条件より次式で決定される⁽⁷⁾。

$$\frac{\pi}{2} \sigma_{\max} - \sigma_j^f \cos^{-1}(a/c) - \sum_{k=j+1}^n (\sigma_k^f - \sigma_{k-1}^f) \cos^{-1}(L_{k-1}/c) = 0 \dots\dots (1)$$

なお、本研究では粒界自身の抵抗は考慮していない。

2・2 き裂伝ばシミュレーション 伝ばシミュレーションにはNewmanの手法⁽¹²⁾に式(1)を適用して、塑性誘起き裂閉口を解析した。はじめに、結晶粒界とき裂閉口の間隔を詳細に検討するため、一つの粒界をき裂が越える場合について伝ばシミュレーションを行った。ついで、粒径の等しい多結晶体をモデル材として、2種類の転位の摩擦応力を交互に配置して伝ば挙動の解析をした。微小疲労き裂の伝ば初期にはステージIで伝ばするが、ここでは結晶粒界とき裂閉口

との相互作用を明らかにすることを目的とし、すべてステージIIの伝ばとして解析する。また、初期き裂(半長 a_i)からき裂を伝ばさせたが、初期き裂は残留ストレッチを有さない。要素は、初期き裂および塑性域内をそれぞれ20, 40個にき裂先端が密になるように不等分割し、要素は粒界をまたがらないようにした。また、き裂閉口挙動は1回当たりのき裂伝ば増分の影響を受けるが⁽¹³⁾、ここでは塑性域寸法の1/500を1回当たりのき裂伝ば増分量とした。この伝ば増分量は、必ずしも実際の疲労き裂伝ば量には対応しない。このときの、き裂開口応力の精度は、前報⁽¹⁰⁾の応力関数法との比較で0.3%程度である。解析はすべての平面応力下における無限体中の貫通き裂とし、応力比は $R=-1$ とした。なお、要素数の増加を抑えるためにlumping処理を行うが、このとき要素は二つの結晶にまたがらないようにした。

き裂伝ば速度はき裂先端開口変位範囲 $\Delta CTOD$ の関数とし、次式を仮定した⁽¹⁴⁾。

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta CTOD)^n \dots\dots\dots (2)$$

ここで C は定数で、指数 n は簡単のため1とした。上式を用いて、特定のき裂長さまで伝ばするのに必要な繰返し数について検討した。

3. 解析結果および考察

3・1 粒界越境時のき裂伝ば挙動 まず、き裂が一つの粒界を越える場合に注目する。結晶粒界の影響を受けない状態の初期き裂から伝ばさせ、き裂面に残留ストレッチが十分形成されてき裂が定常的に伝ばした後、き裂が粒界を越えるときの塑性域寸法およびき裂開口応力の変化について検討した。負荷応力と1番めの結晶の転位摩擦応力の比を $\sigma_{\max}/\sigma_1^f=0.3$ 一定とし、2番めの結晶の摩擦応力との比が $\sigma_2^f/\sigma_1^f=0.5, 0.8, 1.0, 1.2, 2.0$ の場合について解析した。残留ストレッチのない初期き裂からき裂が伝ばするとき、き裂閉口はき裂伝ばとともに急速に形成され、やがて定常状態の一定値をとる⁽¹²⁾。ここではき裂開口応力が定常状態となった後の微視組織の影響について検討するため、き裂伝ば増分量 Δa と初期塑性域寸法 ω_i の比が6.0になったときの塑性域先端を結晶粒界とした。したがって $\Delta a/\omega_i < 6$ において、き裂およびすべり帯は2番めの結晶の影響を受けない。なお、このときの d/a_i は1.946である。

き裂の伝ばに伴う最大負荷応力時におけるき裂先端塑性域寸法の変化を図2に示す。ここで、図中の点線は結晶粒界を表している。 $\sigma_2^f/\sigma_1^f=1.0$ は、隣接粒の影響

Fig.1 Model of crack-tip slip band

Fig. 2 Change of plastic zone size with crack propagation

(a) $CTOD_{max}$

(b) $\Delta CTOD$

Fig. 3 Change of crack opening displacement with crack propagation

響がない場合を意味し、塑性域寸法はき裂伝ばとともに直線的に増大する。一方 $\sigma_2^f/\sigma_1^f > 1.0$ の場合、はじめ塑性域寸法はき裂長さに対して直線的に増加するが、すべり帯が結晶粒界を越えると塑性域寸法は減少し、き裂先端が結晶粒界を越えると、再びき裂伝ばとともに直線的に増加する。 $\sigma_2^f/\sigma_1^f < 1.0$ の場合には、すべり帯が隣接粒に進入した時点で不連続的に急増し、その後、き裂伝ばとともに増加し、き裂が結晶粒界を越えた後に再びき裂伝ばとともに直線的に増加する。

図 3(a) にはき裂長さに対する最大き裂先端開口変位 $CTOD_{max}$ の変化を示す。ここで、 $CTOD$ は $8\sigma^f/E$ (E はヤング率) に比例するため⁽⁷⁾⁽⁸⁾、それらで除し、さらに初期き裂長さ a_i に対する塑性域寸法 ω_i を用いて無次元化した。 $CTOD_{max}$ の変化は前述の塑性域寸法の変化とほぼ同様で、 $\sigma_2^f/\sigma_1^f > 1.0$ の場合はき裂先端が粒界に近づくにつれ減少し、 $\sigma_2^f/\sigma_1^f < 1.0$ の場合には増加する。なお、図中の破線は隣接粒の摩擦応力が無限大の場合であり、 $CTOD_{max}$ の下限を与える。図 3(b) はき裂先端開口変位範囲 $\Delta CTOD$ の変化を示すが、その変化の傾向は $CTOD_{max}$ のそれとほぼ同様である。

き裂伝ばに伴うき裂開口応力 σ_{op} の変化を図 4 に示す。図中右側の矢印は、隣接粒の摩擦応力を有する結晶のみを伝ばする場合に得られる定常状態の値である。 $\sigma_2^f/\sigma_1^f = 1.0$ については結晶粒界の影響がない場合であり、ほぼ一定の定常状態の値をとる。一方 $\sigma_2^f/\sigma_1^f > 1.0$ では、 σ_{op} はき裂伝ばとともに増大するもののやがて極大値を取った後低下する。極大値以降では、最小応力 σ_{min} において最初の結晶内がすべて逆降伏するとともに、き裂面の圧縮応力負担分が減少し σ_{op}

Fig. 4 Change of crack opening stress with crack propagation

が減少する。き裂先端が粒界を越えると σ_{op} は再び増加する。その後 σ_{op} は最大値をとった後減少して矢印の定常状態の値に近づく。また、 $\sigma_2^f/\sigma_1^f < 1.0$ では上記と対称的で、いったん σ_{op}/σ_{max} は減少するものの、その後増加に転じ、き裂先端が粒界を越えると再び減少して矢印の値に漸近する。特に摩擦応力に大きな差のある $\sigma_2^f/\sigma_1^f = 0.5$ では、塑性域先端が隣接粒に進入した時点で急激にき裂開口応力が低下する。この急激な低下は図2や図3に示した塑性域寸法やき裂先端開口変位の不連続な増加に対応する。それに続く初期の増加は、残留変位のない初期き裂からの急増部分⁽¹²⁾に対応する。以上のように、き裂伝ばに伴うき裂開口応力の変位はやや複雑ではあるものの、隣接結晶の摩擦応力が大きい場合には開口応力が増加し、き裂伝ばに対しては有効応力拡大係数範囲の観点からみても伝ば抵抗の増大をもたらすことがわかる。

図5には $\sigma_{max}/\sigma_1^f = 0.3$, $\Delta a/\omega_i = 12$, $\sigma_2^f/\sigma_1^f = 2.0$ における残留変位分布 $CTOD_R$ をき裂先端が x における最大き裂先端開口変位 $CTOD_{max,x}^{up}$ で割った値を縦軸にして示す。図中の実線は解析結果で、破線はそれぞれの摩擦応力の結晶のみを伝ばしたときに得られる値であるが、実線はほぼこれに一致する。このことは、あらかじめ定常状態での σ_{max}/σ^f と $CTOD_R/CTOD_{max,x}^{up}$ の関係を求めておくことによって $CTOD_R$ を $CTOD_{max,x}^{up}$ から容易に推定可能であることを示している。 $CTOD_{max,x}^{up}$ は解析的に容易に求めることができ⁽⁷⁾、これより得られる残留変位を直接用いることによって、シミュレーションによらずに簡便にき裂開口挙動が評価できることを示唆している。

き裂先端開口変位範囲と有効応力拡大係数範囲との

Fig. 5 Distribution of residual stretch

関係を図6にまとめる。ただし、 $CTOD$ は図3と同様 $8\sigma^f/E$ と粒径 d で、また ΔK_{eff} は $\sigma^f(\pi d)^{1/2}$ でそれぞれ無次元化した。ここで、 σ^f はき裂先端の結晶の摩擦応力を用い、すべり帯先端が隣接粒に伝ばしはじめるところから示した。図中一点鎖線は Budiansky らが SSY 状態に対して提案した関係⁽¹⁵⁾ であり、次式で与えられる。

$$\frac{\Delta K_{eff}}{K_{max}} = \left[\frac{1}{0.73} \frac{\Delta CTOD}{CTOD_{max}} \right]^{1/2} \dots \dots \dots (3)$$

図中点線は、それぞれ $\sigma_2^f/\sigma_1^f = 1.0$ で結晶粒界の影響がない場合の結果である。点線は一点鎖線より若干上方に位置するが、ほぼ一点鎖線で近似可能である。図中太い実線は $\sigma_2^f/\sigma_1^f = 2.0$ の結果を示したもので、き裂伝ばとともに $\Delta CTOD$ および ΔK_{eff} は減少し、 $\sigma_{max}/\sigma^f = 0.3$ の点線からいったん離れて一点鎖線より小さくなる。その後、 $\sigma_{max}/\sigma^f = 0.15$ の点線に近づきやがて一致する。 $\sigma_2^f/\sigma_1^f < 1.0$ の場合には逆に、いったん上方にずれる。このときの一点鎖線よりずれる領域は、 $\sigma_2^f/\sigma_1^f > 1.0$ では図4で粒界直前の σ_{op} の減少域、 $\sigma_2^f/\sigma_1^f < 1.0$ では粒界直前の σ_{op} の増加域の狭い範囲内に限られ、これ以外では、き裂伝ば駆動力として有効応力拡大係数範囲とき裂先端開口変位範囲がほぼ等価であることがわかる。また、両者の関係は第一次近似として式(3)で表せることがわかる。

3.2 多数粒界にわたる疲労き裂伝ば 実際のき裂はき裂長さの増加に伴い塑性域寸法も増大するため、塑性域は複数の結晶にまたがる。そこで次にすべり帯に含まれる結晶粒界が複数となる場合について解析を行った。結晶粒径は等しく、各結晶には2種類の摩擦応力を交互に配置し、その比を $\sigma_{2k}^f/\sigma_{2k-1}^f$ ($k=1, 2, 3, \dots$) = 0.5, 0.8, 1.0, 1.25, 2.0 とした。ただし摩擦応力の平均値 $\sigma_{mean}^f = (\sigma_{2k}^f + \sigma_{2k-1}^f)/2$ は同一である。

Fig. 6 Relation between $\Delta CTOD$ and ΔK_{eff}

Fig. 7 Change of crack opening stress with crack length

(a) $\sigma_{op}/\sigma_{op,mean}^f$ vs. $\Delta a/d$

(b) $\sigma_{op}/\sigma_{op,mean}^f$ vs. number of grain boundary in plastic zone

Fig. 8 Change of crack opening stress with crack propagation

ここで $\sigma_{2k}^f/\sigma_{2k-1}^f=0.5$ と 2.0 および $\sigma_{2k}^f/\sigma_{2k-1}^f=0.8$ と 1.25 は摩擦応力の順序が異なるだけである。各結晶粒径 d を $d/a_i=2$ (a_i : 初期き裂長さ) の一定とし、転位摩擦応力の平均値と負荷応力の比を $\sigma_{max}^f/\sigma_{mean}^f=0.27$ としてき裂を伝ばさせた。

図 7 にき裂伝ばに伴うき裂開口応力の変化を示す。図 7 には $\sigma_{2k}^f/\sigma_{2k-1}^f=1.25$ と 2.0 の結果のみを示す。図 4 と同様に高摩擦応力側の結晶粒へき裂が伝ばする場合にはその結晶粒の直前で開口応力が高く、また逆に低摩擦応力側へと伝ばする場合には低い値となる。また、摩擦応力の大きな結晶粒ほど開口応力が高くなる。図 8(a) はき裂開口応力を結晶粒界がない場合の $\sigma_{max}^f/\sigma_{mean}^f=0.27$ 一定条件で得られる値で正規化し、き裂伝ば量が $\Delta a/d=250$ までの変化を示したものである。開口応力はき裂が結晶粒界を越えるごとに大きく変化するものの、いずれの条件に対してもき裂が長くなり、塑性域中に含まれる結晶の数が多くなるにつれて、変動が小さくなることがわかる。 $\sigma_{2k}^f/\sigma_{2k-1}^f=2.0$ についてみると、 $\sigma_{2k}^f/\sigma_{2k-1}^f=1.0$ の場合に対して $\Delta a/d=50$ で約 $\pm 25\%$ 、 $\Delta a/d=100$ で約 $\pm 15\%$ となり、き裂長さとともにばらつきは小さくなる。図 8(b) はこのときの塑性域中に含まれる結晶粒界の数 n_d との関係を示したものである。 $\Delta a/d=250$ のときに塑性域中に含まれる結晶粒界の数は最大で 21 個であった。なお、実際の表面き裂は二次元的な拡がりを持つため、より急速にばらつきが収束するものと考えられる。

図 9 には $\sigma_{2k}^f/\sigma_{2k-1}^f=2.0$ の場合に得られたき裂伝ばに伴うき裂先端開口変位範囲の変化を示す。ここでもき裂先端開口変位範囲は、結晶粒界のない平均的な値

Fig. 9 Change of crack opening displacement range with crack propagation

で正規化した。図8の開口応力の変化と同様に結晶粒界を越えるごとに変動が大きいが、き裂の伝ばに伴いその挙動は平均的な摩擦応力で与えられる値へと収束することがわかる。このとき平均摩擦応力で値に対して、 $\Delta a/d=50$ の時点の最大値で約50%、 $\Delta a/d=100$ の時点で約25%大きく、開口応力の場合に比較して最大値の差は大きい。

3.3 き裂伝ば寿命 負荷応力 $\sigma_{\max}/\sigma_{\text{mean}}^f=0.27$ のもとで、初期き裂長さ $a_i/d=0.5$ からき裂を伝ばさせ、任意のき裂長さ ($\Delta a/d \leq 200$) になるのに要する繰返し数について検討した。なお、繰返し数の算出には式(2)を用い、 $n=1$ として計算した。図10に各結晶粒の摩擦応力を $\sigma_{2k}^f/\sigma_{2k-1}^f=0.5, 0.8, 1.0, 1.25, 2.0$ としたときの最終き裂長さとして伝ば寿命の関係を示す。ただし、繰返し数については、 σ_{mean}^f および E を用いて

Fig. 10 Crack propagation life as a function of final crack length

Fig. 11 Relation between number of cycles and final crack length

無次元化している⁽⁷⁾⁽⁸⁾。一つめの粒界は $\Delta a/d=1$ にあり、このときの $\sigma_{2k}^f/\sigma_{2k-1}^f$ が 0.5 と 2.0 の無次元化繰返し数の差は 47 で、摩擦応力の大きい結晶粒を伝ばするほうが繰返し数は大きくなる。一方、 $\Delta a/d=200$ における無次元化繰返し数の差は 34 であり、その差は小さくなるものの、初期の繰返し数の差が、その後の伝ば寿命に大きく影響することがわかる。 $\Delta a/d=1$ および 200 における $\sigma_{2k}^f/\sigma_{2k-1}^f=1.0$ の寿命に対する $\sigma_{2k}^f/\sigma_{2k-1}^f=2.0$ の寿命の比は、それぞれ 55% および 90% である。き裂伝ばとともにその比は小さくなり、 $\sigma_{2k}^f/\sigma_{2k-1}^f=1.0$ の結果に漸近する。また同じ結果について横軸にき裂伝ば量を、縦軸に平均的な摩擦応力で得られる寿命との比をとった結果を図11に示す。 $\Delta a/d$ が小さいときには寿命比は結晶内の摩擦応力の影響を強く受け、摩擦応力の低い結晶粒へとき裂が伝ばする際には、寿命比が急激に減少し 1 に近づく。このことは、き裂伝ば速度が高速側へと急激な変化をすることを意味する。き裂長さが比較的長くなると、塑性域が複数の結晶にまたがるため、その変化は小さくなる。

$a_i/d=0.5$ の初期き裂長さからき裂を伝ばさせ、 $\Delta a/d=100$ に達するのに要する無次元化繰返し数と負荷応力との関係を図12に示す。負荷応力は $\sigma_{\max}/\sigma_{\text{mean}}^f$ が 0.2 から 0.5 の間について計算した。各負荷応力に対して、摩擦応力が $\sigma_{2k}^f/\sigma_{2k-1}^f=0.5$ および 2.0 で得られた結果を図中線で結んだ。負荷応力の減少とともに伝ば寿命は長くなり、両対数紙上でほぼ直線的な関係が得られ、S-N 曲線の導出が可能であることがわかる。

Fig. 12 Relation between applied stress and number of stress cycles

平滑材では、粒界で阻止された停留き裂が試料表面に観察されることが多い。前報⁽⁹⁾では、き裂伝ばの下限界条件を設定することによって平滑材の疲労限度を表し得ることを示した。本伝ばシミュレーションでは、き裂閉口に注目して、微小疲労き裂の伝ばに対するき裂閉口の重要性を指摘したが、さらに下限界条件を導入することによって、より現実的なモデルの構築が可能になるものと考えられる。

4. 結 論

一次元き裂を対象として、塑性誘起き裂閉口を有する微視組織的微小き裂先端のすべり帯が粒界を越える場合のき裂伝ばシミュレーションを行い、平面応力下でのき裂開閉口挙動を検討した。得られた主な結果をまとめる。

(1) き裂伝ばに伴うき裂先端開口変位範囲 $\Delta CTOD$ は隣接粒の摩擦応力が大きいときは減少し、小さいときには増加する。また、き裂開口応力は隣接粒の摩擦応力が大きいときは増加し、小さい場合には減少する。

(2) き裂面の残留変位は、最大き裂先端開口変位より推定可能であり、シミュレーションによらない簡便評価の可能性が示唆された。

(3) き裂先端開口変位範囲と有効応力拡大係数範囲の関係は、き裂先端が極めて粒界に近い場合を除いてほぼ一価関係で表せる。

(4) き裂が長くなり、き裂先端の塑性域が広がるにつれき裂開閉口挙動は塑性域内の平均的な摩擦応力

で得られる値に近づき、組織の影響は小さくなる。

(5) き裂伝ば寿命については、き裂の伝ば初期の挙動が寿命を支配する重要な因子であることが示された。

最後に、本研究の一部は、工業技術院産業科学技術研究開発制度「シナジーセラミックスの研究開発」の一環として、NEDOの委託を受けて行われたものである。ここに謝意を表する。

文 献

- (1) Suresh, S. and Ritchie, R. O., *Int. Metal Rev.*, **29**(1984), 445-476.
- (2) 田中啓介, 材料, **33**(1984), 961-972.
- (3) Morris, W. L., *Met. Trans.*, A, **11**(1980), 1117-1123.
- (4) Lankford, J., *Fatigue Eng. Mater. Struct.*, **5**(1982), 233-248.
- (5) Tokaji, K., Ogawa, T., Harada, Y. and Ando, Z., *Fatigue Eng. Mater. Struct.*, **9**(1986), 1-14.
- (6) Tanaka, K., *JSME Int. J.*, **35**(1987), 1-13.
- (7) 田中啓介・秋庭義明, 材料, **34**(1985), 1301-1307.
- (8) Tanaka, K., Akiniwa, Y., Nakai, Y. and Wei, R. P., *Eng. Fract. Mech.*, **24**-6(1986), 803-819.
- (9) 秋庭義明・田中啓介, 材料, **38**(1989), 1169-1175.
- (10) 秋庭義明・原田昭治・山上貴幸, 材料, **42**(1993), 663-639.
- (11) Bilby B. A., Cottrell, A. H. and Swinden, K. H., *Proc. R. Soc.*, A, **272**(1963), 304-314.
- (12) Newman, Jr. J. C., *ASTM STP*, 748(1981), 53-84.
- (13) 白鳥正樹・三好俊郎・宮本博・森孝男, 材料, **26**(1977), 753-759.
- (14) Tanaka, K., Hoshide, T. and Sakai, N., *Eng. Fract. Mech.*, **19**(1984), 805-825.
- (15) Budiansky, B. and Hutchinson, J. W., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **45**(1978), 267-276.