転がり接触疲労へのコースティック法の適用と コースティック像シミュレーション*

田宮 高信^{*1}, 松本 章久^{*2}, 佐藤 建吉^{*3}

Application of the Method of Caustics to Rolling Contact Fatigue and Simulation of the Caustic Images

Takanobu TAMIYA, Akihisa MATSUMOTO and Kenkichi SATO^{*4}

^{*4} Chiba University, Faculty of Engineering,
Yayoi-cho 1-33, Inage-ku, Chiba-shi, Chiba, 263-8522 Japan

As a series of studies to clarify the mechanism of crack initiation and propagation in rolling contact fatigue, the experimental method of caustics has been applied to disk-to-disk rolling contact fatigue tests. The cusp-like and round type caustic images were generated from the rolling contact point and the crack tip, respectively. Although the shape and size of the cusp-like image depending on the magnitude of applied load was constant, that of the round image was markedly changed with the relative position between the crack and the rolling contact point. The experimental caustic images have been simulated using a computer program developed by combining the theory of caustics with the theory of boundary element method. By comparing experimental caustic images with simulated ones, it is shown that the round type caustic image obtained in rolling contact is strongly affected by shear deformation of the crack.

Key Words: Experimental Stress Analysis, Contact Problem, Rolling Contact Fatigue, Method of Optics, Method of Caustics, Boundary Element Method

1. 緒 言

転がり軸受における玉・ころと案内面, 歯車の歯面, 鉄道の車輪とレールのような転がり接触を繰り返して受ける部分では, 転がり疲労き裂が発生する. そのため, 転がり疲労き裂の発生および進展機構に関しては古くから研究されているが, 影響因子が非常に多岐にわたるため⁽¹⁾, その機構は十分に明らかにされていない.

転がり疲労き裂の進展機構については, 近年, 破壊力学を適用した寿命予測やき裂伝ば後の形状予測が進んでおり, そのために様々な手法で転がり疲労き裂における応力拡大係数の解析が行われている. 例えば, Keer および Bryant^{(2),(3)}は弾性応力解析を用いて応力拡大係数の解析を行っている. また, 五嶋ら⁽⁴⁾は Keer らの手法を拡張して複数のき裂が存在する場合に適用している. 兼田, 村上および市丸ら^{(5),(6),(7)}は体積力法を用いて3次元き裂の解析を行っている. また, Saka ら⁽⁸⁾

は有限要素法を用いた解析を行っている. これらの解析的な手法では, 摩擦を伴い回転接触する対象のモデル化が困難であるなど課題が残されている.

著者らはコースティック法と呼ばれる光学の実験手法を用いて, き裂を有する転がり接触応力場の観察を行っている. コースティック法はレーザ光を用いる非接触の光学的測定手法であり, き裂の応力拡大係数や接触力の測定が可能であり⁽⁹⁾, 転がり接触における垂直力および接線力の測定へ適用されている^{(10),(11)}. またコースティック法は, 実験が比較的簡便で, 動的な応力場でも連続観察が可能であるという長所をもっている. よって本法は, き裂を有する転がり接触のような動的で複雑な応力場において, 接触応力やき裂の変形挙動, 応力拡大係数の評価に有力であると考えられる.

そこで本論文では, 転がり疲労下におけるき裂の進展機構解析にコースティック法を適用して, 予き裂を導入した試験片を用いてコースティック像の実験, 観察を行った. さらに, 実験的に得られたコースティック像を定量的に評価するため, 境界要素法を用いたシミュレーションプログラムを試作し, 転がり接触時

* 原稿受付 1999 年 10 月 7 日.

^{*1} 正員, 千葉大学大学院 (☎ 263-8522 千葉市稲毛区弥生町 1-33).

^{*2} 千葉大学大学院.

^{*3} 千葉大学工学部.

E-mail: ksato@tu.chiba-u.ac.jp

の複雑なコースティックス像への適用性を検討した。

2. コースティックス法実験

2.1 コースティックス像を形成する原理 コースティックス法では、接触部やき裂先端に照射された光がスクリーン上に形成するコースティックス像を応力拡大係数や接触力の測定・解析に利用する。図1にコースティックス像の形成原理を示す。図はき裂を持つ平板に引張り負荷を与え、き裂先端部付近に光を照射した様子を示している。試験片内に荷重が負荷されていないとき、試験片内を透過した光は一樣にスクリーン上に到達する。しかしながら、荷重が負荷されるときき裂先端近傍の応力集中によって局所的に板厚および屈折率が変化し透過光が曲げられるため、スクリーン上には光の到達しない領域（シャドースポット）が形成される⁹⁾。このとき、シャドースポットの周囲には光が集中しコースティックス像が形成される。その光学的理論は3章で述べる。

2.2 転がり疲労への適用 図2に、実験に使用した2円板型の転がり疲労試験機を示す。本試験機はコースティックス法を転がり疲労へ適用して実験するために著者ら⁽¹²⁾が設計・開発した。転がり疲労試験へコースティックス法を適用し、垂直力および接線力を測定する手法については既報^{(10),(11)}で明らかにした。本論文ではさらに、き裂を有する転がり接触応力場へコースティックス法を適用し、実験的にき裂の変位挙動や応力拡大係数を評価する手法への拡張を試みる。図3に、実験に用いた試験片の概略を示す。①試験片円板（半径50mm、板厚4mm）にはコースティックス法での使用が容易なPMMAを使用した。また、著者らが行った転がり疲労試験において観察されている表面起点型き裂を想定して、表面と垂直をなす長さ2.4mmの予き裂を導入した。また、接触相手は②鋼円板（半径145mm、板厚5mm）である。本実験では、接触点を $\theta=0\text{deg}$ とし、き裂位置 θ を $+10\text{deg}$ から -10deg へ手動で回転させて行った。負荷荷重は垂直力を150N/mmとした。また、き裂を有する転がり接触下の応力場では接線力の作用が重要であるが、本論文では接線力は負荷せずに実験を行い、接線力の影響についての検討は続報にて報告する予定である。PMMAのヤング率とポアソン比はそれぞれ3.7GPaと0.37、また鋼のそれらは206GPaと0.3とした。よって、接触半幅 b はヘルツの関係⁽¹³⁾より1.3mmと計算された。

図4に、コースティックス法実験に用いた光学系を示す。本実験では、図の光学系を図2の転がり疲労試験機に組み込んで実験を行った。光源はHe-Neガスレ

Fig.1 The principle of the caustic image formation.

Fig.2 The test rig used in rolling contact fatigue. The test specimen of PMMA disk① is contacted with steel disk②.

Fig.3 PMMA disk specimen used for caustic experiment. The specimen has a radial crack from the surface.

Fig.4 Optical setup for caustic experiments.

ーザとし、コリメータにより拡大した後、凸レンズにより発散光として試験片に照射した。スクリーン上に結像されたコースティック像は、背後に設置した CCD カメラにより撮影し、ビデオ録画した。このとき、試験片からスクリーンまでの距離 z_o は 1585mm、試験片から焦点までの距離 z_i は 230mm とした。

3. コースティック像シミュレーション

3.1 コースティックス法の光学基礎式 実験的に得られるコースティック像を力学的に検討するため、境界要素法を用いてコースティック像のシミュレーションを行った。以下に発散光・透過型の光学系を想定し、コースティックス法の光学基礎式を示す。

いま、図 5 のように座標系を設定し、ベクトル $\mathbf{r}$ で表される試験片上の点 $A(x,y)$ を透過した光のスクリーン上への到達点を考える。応力が作用していないとき、点 A を透過した光は、 $\lambda_m \mathbf{r}$ で表される点 A' に到達する。ここで、 λ_m は光学系の拡大倍率であり、試験片から焦点までの距離を z_i 、試験片からスクリーンまでの距離を z_o で表したとき $\lambda_m = (z_i + z_o)/z_o$ で与えられる。よって、本実験条件では $\lambda_m = 7.9$ である。また、応力が作用する場合には、 A 点を透過した光は A' 点からベクトル $\mathbf{w}$ だけずれて点 $B(x_1, y_1)$ に到達する。点 B をベクトル $\mathbf{w}$ で表せば、それらの関係は次式で与えられる。

$$\mathbf{w} = \lambda_m \mathbf{r} + \mathbf{w} \quad (1)$$

式(1)において、ベクトル $\mathbf{w}$ は A 点における応力 and の勾配 $\text{grad}(\sigma_x + \sigma_y)$ に依存することが知られており、式(1)は次式で書き換えられる⁽¹⁴⁾。

$$\mathbf{w} = \lambda_m \mathbf{r} + z_o c_t \text{grad}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (2)$$

ここで、 c_t は材料定数、 t は試験片の板厚であり、本実験では $c_t = -1.08 \times 10^{-4} \text{mm}^2/\text{N}$ 、 $t = 4 \text{mm}$ である。式(2)がコースティックス法の光学基礎式であり、試験片上の点 A に入射した光のスクリーン上への到達点 B を求めるには、点 A における応力 and の勾配 $\text{grad}(\sigma_x + \sigma_y)$ を求め、式(2)に代入すればよいことを示している。

3.2 境界要素法とコースティックス法の結合 解析的にコースティック像をシミュレートするには、式(2)を用いて試験片上の多数の点 $A(x,y)$ についてスクリーン上への光の到達点 $B(x_1, y_1)$ を求めればよい。これはすなわち、多数の点 A での応力 and の勾配 $\text{grad}(\sigma_x + \sigma_y)$ を求めることに帰着する。応力 and の勾配 $\text{grad}(\sigma_x + \sigma_y)$ は、応力場の理論解があれば、それを微分して容易に求めることができる。しかしながら、き裂を有する転がり接触のような複雑な応力場に関しては応力場の理論解は

Fig.5 A schematic illustration representing caustic image formation and vector relations.

Fig.6 Relationship between inner stresses with surface forces and surface displacements in BEM analysis.

ない。よって本論文では、応力 and の勾配 $\text{grad}(\sigma_x + \sigma_y)$ を境界要素法を用いて求めることによりコースティック像をシミュレートした。以下に、コースティックス法理論を境界要素法と結合する方法^{(15),(16)}を述べる。

境界要素法では境界上の点 Q における変位 $u_x(Q)$ 、 $u_y(Q)$ および表面力 $t_x(Q)$ 、 $t_y(Q)$ から、境界 s に対する積分方程式を用いて、任意の内点 p の応力 $\sigma_{ij}(p)$ を次式で表す⁽¹⁷⁾ (図 6)。

$$\sigma_{ij}(p) = \int_s \{ D_{ijx}(p, Q) t_x(Q) + D_{ijy}(p, Q) t_y(Q) \} ds - \int_s \{ S_{ijk}(p, Q) u_k(Q) + S_{ijy}(p, Q) u_y(Q) \} ds \quad (3)$$

ここで $D_{ijk}(p, Q)$ 、 $S_{ijk}(p, Q)$ は節点座標と内点座標から求められる係数マトリクスであり、境界上の点 Q の変位 $u_k(Q)$ および表面力 $t_k(Q)$ の内点 p に対する影響係数を表している。また、 i, j および k は x, y をとる。

応力 and の勾配 $\text{grad}(\sigma_x + \sigma_y)$ を求めるには、式(3)で求められた応力から応力 and の近似関数を見出し、その関数を微分する方法もあるが、その方法では計算が

複雑になり誤差も大きくなる．本論文では精度のよいシミュレーションを行うため，境界上の変位 $u_x(Q)$, $u_y(Q)$ および表面力 $t_x(Q)$, $t_y(Q)$ から内点 p における応力和の勾配 $\text{grad}(\sigma_x(p)+\sigma_y(p))$ を直接求められる積分方程式を以下のように導出し，境界要素解析プログラムに導入した．

式(3)より，応力和 $\sigma_x(p)+\sigma_y(p)$ を表す積分方程式は次式で表される．

$$\begin{aligned} \sigma_x(p)+\sigma_y(p) = & \int_s \{ [D_{xxx}(p,Q)+D_{yyx}(p,Q)]t_x(Q) \\ & + [D_{xxy}(p,Q)+D_{yyy}(p,Q)]t_y(Q) \} ds \\ & - \int_s \{ [S_{xxx}(p,Q)+S_{yyx}(p,Q)]u_x(Q) \\ & + [S_{xxy}(p,Q)+S_{yyy}(p,Q)]u_y(Q) \} ds \\ \equiv & \sigma_{\text{sum}} \end{aligned} \quad (4)$$

よって，式(4)に示すように応力和を σ_{sum} と表すと，式(2)に代入することにより，光のスクリーン上での到達点を表すベクトル $\mathbf{W}$ は次式で表される．

$$\begin{aligned} \mathbf{W} = & \lambda_m \mathbf{r} + z_o c_i t \text{ grad}(\sigma_{\text{sum}}) \\ = & (\lambda_m x + z_o c_i t \sigma_{\text{sum},x}) \mathbf{i} + (\lambda_m y + z_o c_i t \sigma_{\text{sum},y}) \mathbf{j} \end{aligned} \quad (5)$$

ここで，下付の x および y はそれぞれ x , y による微分を表し， $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ はそれぞれ x , y 方向の単位ベクトルを表している．式(5)における微分の具体形は非常に複雑な式となるため，ここでは紙面の都合で省略する．

式(5)がコースティック法を境界要素法に結合した積分方程式であり，式(5)を離散化して境界要素解析プログラムへ導入することによりコースティック像をシミュレーションできる．また，転がり接触は文字通り接触問題であるため，本境界要素解析プログラムではペナルティ法⁽¹⁸⁾を導入して，接触解析を行っている．

3.3 シミュレーションの条件 図 7 にシミュレーションに用いた境界要素解析モデルの概略図を示す．領域 #1, #2 で構成されている下部モデルは PMMA 円板，領域 #3 の上部モデルは鋼円板をモデル化したものである．PMMA 円板には接触中心から角度 θ の位置に，長さ $c=2.4\text{mm}$ のき裂が配されており，き裂の位置 θ を $\pm 10\text{deg}$ について 0.5deg 刻みで移動させ，それぞれ静的接触問題として解析した．さらに，コースティック像をシミュレーションするため，接触部およびき裂周辺には図示されているように内点を設定した．これらの点が図 5 における光の透過点 A にあたり，それぞれの内点について式(5)より，透過光がスクリーン上へ到

Fig.7 Model and boundary element meshes for BEM analysis.

達する点 B の座標を求めた．内点は 0.1mm の間隔で約 4000 点設定した．また，下辺は完全拘束とし，荷重条件は実験と同様 $P=150\text{N/mm}$ とした．PMMA 円板／鋼円板間，およびき裂面間の接触部はペナルティ法を用いた接触解析が行われる．

4. 結果と考察

4.1 実験で得られたコースティック像 図 8 に実験結果を示す．図は接触点へき裂が右側 ($\theta > 0\text{deg}$) から近づき，接触点である $\theta = 0\text{deg}$ を通過した後，接触点から左側 ($\theta < 0\text{deg}$) へ遠ざかる過程を示している．き裂を有する円板に接触負荷を与えたとき，コースティック像はき裂先端部から得られる円形の像と接触部から得られる尖頭形の像の二つが形成された．

き裂を有する転がり接触応力場はき裂の移動とともに複雑な変化をするが，それぞれの像は明瞭に形成されており，コースティック法が連続観察に適していることが分かる．以下では，き裂先端から得られるコースティック像に注目して考察を行った．

き裂先端から得られるコースティック像は，き裂が接触点に近づくにしたがって，(a)から(d)へと徐々に大きくなり，(d)において最大になった後，接触点の真下に至ると(f)のようにき裂先端の像はきわめて小さくなり接触による像のみが得られた．さらに，き裂が接触点を通過して遠ざかる過程 ($\theta < 0\text{deg}$) では，(g)から(h)へと再び大きくなった後，(i)から(k)ではあまり大きさが変わらず，(l) $\theta = -6\text{deg}$ に至って小さくなる変化を示した．このように，き裂が接触点へ近づく過程と接触点から遠ざかる過程でその変化は対称とはならず，負荷履歴の影響を受けていることが明らかになった．これらの力学的な背景については，境界要素法によるシミュレーション結果から次節で検討する．

4.2 シミュレーションで得られたコースティック像 図 9 に，試作したコースティック像シミュレーションプログラムによるシミュレーション結果を示す．シミ

Fig.8 Caustic images obtained by experiment. Cusp-like images are formed from a contact point, and round images are formed from a crack tip.

シミュレーション結果は実験結果と対応している。

図 9 を図 8 と比較すると、き裂先端から得られるコースティック像の大きさが $\theta = \pm 2\text{deg}$ で最大になり形状が複雑に変化することは概ね一致している。特に、き裂が近づく過程 ($\theta > 0\text{deg}$) では両者の変化は高精度に一致している。ただし、詳細に観察すると、 $\theta < -2\text{deg}$ において両者に相違も確認された。すなわち、シミュレーション像は実験像に比べ $\theta < -2\text{deg}$ 以降は急激に小さくなり、 $\theta = 0$ に対して対称な変化となっている。

ここで、き裂先端から得られるコースティック像の変化をき裂の変形挙動から考察する。シミュレーションにおいてき裂の変形挙動を調べたところ、接触点には接線力を負荷していないため、き裂は全領域で閉口しており、き裂先端の応力集中は、せん断モード（モード II 変形）のみが原因していることが分かった。よって、き裂先端から形成されたコースティック像は、

き裂のせん断変形と密接な関係にあること、また、実験とシミュレーションでの $\theta < -2\text{deg}$ 以降の相違はせん断変形挙動に関係していることが予想される。このことから、以下ではき裂面の相対変位を実験とシミュレーションで比較し、考察を行った。

4.3 き裂面の相対変位との関係 コースティック像とき裂のせん断変形との関係、また実験とシミュレーションでの相違の原因を検討するため、き裂面の相対変位を直接測定した。き裂先端付近に研磨紙によりき裂を横切った傷を付け、き裂先端から 0.5mm の位置で傷のずれを測定した（図 10）。また、測定にあたっては、光学顕微鏡の光軸を水平にして図 2 に示した装置に設置し、き裂面の相対変位を直接観察した。相対変位の測定結果を図 11 に示す。図にはシミュレーションによって得られた相対変位も同時に示した。図中、横軸は接触点を 0deg としたときのき裂の位置を表し

Fig.9 Caustic images obtained by simulation for the conditions corresponding to Fig.8.

Fig.10 Relative displacement of crack face.

ており、き裂は+側から-側へ移動している。

実験およびシミュレーションによる相対変位はともに $\theta = \pm 2\text{deg}$ 付近で最大となる変化をし、 $\theta > -2\text{deg}$ において両者は精度良く一致した。また、 $\theta < -2\text{deg}$ において両者は一致せず、実験では $\theta = -2 \sim -5\text{deg}$ において

Fig.11 The variation of relative displacement with crack position.

12 μm 程度で横ばいとなるのに対し、シミュレーションでは急激に低下した。この結果を図 8 および図 11 と比較すると、実験とシミュレーションが $\theta > -2\text{deg}$ で一致し、 $\theta < -2\text{deg}$ で相違すること、 $\theta = \pm 2\text{deg}$ で最大となること、実験では $\theta = -2 \sim -5\text{deg}$ において大きさが変化

せず、シミュレーションでは急激に小さくなっていることなど、相対変位とコースティック像はよく対応していることが分かる。

またこの結果は、実験における相対変位およびコースティック像が $\theta=-2\sim-5\text{deg}$ の範囲で変化しなかった原因とき裂面の摩擦挙動の重要な関係を示している。すなわち、 $\theta<-2\text{deg}$ の位置はき裂が接触点から遠ざかる除荷過程であるため、き裂面の相対変位は減少しようとするが、き裂面の摩擦力によりき裂面のすべりが妨げられ、相対変位の減少が妨げられたためであると考えられる。一方、シミュレーションにおいては負荷履歴を考慮しない静的接触解析を行ったため、コースティック像と相対変位が $\theta=0\text{deg}$ に対して対称関係を示したと考えられる。

4.4 コースティックス法の適用法とシミュレーションプログラムの拡張 以上のように、き裂先端から得られるコースティック像の大きさは、き裂の相対変位に依存している。このことから、相対変位に対応するコースティック像の特性値（寸法）を抽出し、その特性値と相対変位の関係式を見いだすことができれば、その関係式を用いてコースティック実験から容易に相対変位を算出することができる。さらに、コースティック像を用いて相対変位を算出する手法はコースティック像から応力拡大係数を決定する手法に発展させることができる。また、そのような特性値の評価するにはシミュレーションプログラムを用いるのが便利であり、本論文で試作したシミュレーションプログラムの適用が有力となる。ただし、本シミュレーションプログラムは転がり接触問題において重要なき裂面の不可逆な摩擦挙動を解析できないため、負荷履歴解析をプログラムに導入して拡張することが課題である。

5. 結 言

き裂を有する転がり接触下での応力状態の評価にコースティックス法を適用することを目的とし、コースティックス法実験およびシミュレーションにより適用性の検討を行った。その結果を以下にまとめる。

- (1) き裂を有する転がり接触応力場においてコースティックス法実験を行うと、き裂の位置とともに大きさと形状が変化するコースティック像が明瞭に観察される。
- (2) コースティック像をシミュレーションするため、境

界要素法とコースティックス法の理論を結合し、コースティック像シミュレーションプログラムを試作した。その結果、定性的には実験結果を再現できた。

- (3) き裂先端から得られるコースティック像の大きさの変化は、き裂面の相対変位の変化と対応しており、コースティックス法を用いて、せん断変形挙動や応力拡大係数の評価が可能であることを示した。
- (4) 本論文の解析では負荷履歴を考慮していないため、き裂面の摩擦による不可逆過程が大きく影響する場合には実験との相違が生じた。より高精度のシミュレーションのため、プログラムに負荷履歴解析を導入し拡張することが課題である。

文 献

- (1) 平野, トライボロジスト, **39**, 8 (1994), 644.
- (2) L. M. Keer, M. D. Bryant & G. K. Haritos: *Trans. ASME, J. Lubrication Technology*, **104** (1982) 347.
- (3) L. M. Keer, M. D. Bryant: *Trans. ASME, J. Lubrication Technology*, **105** (1983) 198.
- (4) 五嶋孝仁・神島祐児: 日本機械学会論文集(A編), **59**, 566 (1993) 2373.
- (5) 兼田楨宏・八塚裕彦・村上敬宜: 日本機械学会論文集(A編), **51**, 470 (1985) 2618.
- (6) 村上敬宜・栄中・市丸和徳: 日本機械学会論文集(A編), **58**, 556 (1992) 2313.
- (7) 市丸和徳: トライボロジスト, **39**, 8 (1994) 660.
- (8) H. Salehizadeh, N. Saka: *Trans. ASME, J. Lubrication Technology*, **115** (1992) 690.
- (9) 佐藤建吉: 材料試験技術, **39**, 1 (1994) 44.
- (10) 田宮高信・佐藤建吉: トライボロジスト, **43**, 8 (1998) 723.
- (11) 田宮高信・佐藤建吉・町田進: 日本機械学会論文集(A編), **65**, 637 (1999) 1990.
- (12) 田宮高信・佐藤建吉: 日本機械学会論文集(A編), **65**, 632 (1999) 833.
- (13) K. L. Johnson: *Contact Mechanics*, Cambridge Univ. Press, (1985) 84.
- (14) P. S. Theocaris: *Mechanics of Fracture 7, Experimental evaluation of stress concentration and intensity factors*, Martinus Nijhoff Publishers, (1981) 189.
- (15) 佐藤建吉・真島拓士: 第26回応力・ひずみ測定シンポジウム講演論文集, (1995) 25.
- (16) K. Sato, K. Shimizu & S. Kodama: *Proceedings of the Second China/Japan International Symposium on Machine Elements*, Wuxi, China, (1996) 17.
- (17) 結城良治・木須博行: 境界要素法による弾性解析, 培風館, (1987) 74.
- (18) 山崎光悦・森雅弘: 日本機械学会論文集(A編), **54**, 604 (1988) 1629.