熱負荷による接着帯板端部での特異応力場の強さ*

陳 玳 珩^{*1}, 野々村 一紀^{*2}, 牛 島 邦 晴^{*3}Stress Intensity Factor at the Edge Point of a Bonded Strip
under Thermal LoadingDai-Heng CHEN^{*4}, Kazunori NONOMURA and Kuniharu USHIJIMA^{**4} Science University of Tokyo, Dept. of Mechanical Engineering,
Kagurazaka 1-3, Shinjuku-ku Tokyo, 162-8601 Japan

In this paper, the singular stress field around the edge point in a bonded strip subjected to thermal loading is analyzed by body force method. Based on the numerical results, the effect of the beam geometry and material combination on the stress intensity factors are investigated. It is found that the singular stress σ_θ caused by heating or cooling may be positive or negative, depending on material combinations. It is also found that there is not a unique relationship between the stress singularity factor K and the eigenvalue λ .

Key Words: Elasticity, Body Force Method, Thermal Stress, Stress Intensity Factor, Bonded Strip

1. 緒 言

近年、構造物の軽量化や高剛性化のために異種材料を重ね合わせた積層板が多く用いられるようになっていいる。それに伴い、その強度を正確に評価することが重要視され、弾性論に基づく、あるいは境界要素法や有限要素法などによる応力解析が多くの研究者によって行われている^{(1)~(4)}。積層板の破壊の多くは層間のはく離であるため、その挙動を知るにあたり、層間応力の特性を把握する必要がある。しかし、はく離などの破壊の起点となる接合角部では、材料の不連続のために応力が無限大となる、いわゆる特異応力場を形成するため、応力値のみからでの高精度な強度評価を行うことは難しい。そのために、形成した特異応力場の強さを接合角部からの破壊のパラメータとして用いることが検討され⁽⁵⁾、特異応力場の強さを精度良く求めることが必要となってきた。そこで著者の一人は、体積力法⁽⁶⁾を用い、応力の特異性を代表する体積力また

は体積力対の基本密度関数を導入することによって、V 形切欠き、介在物、界面き裂、板状接合試験片などの特異応力場の問題を数値解析によって精度良く求める手法を示してきた^{(7)~(9)}。また、さらにこの手法を改良することによって、特異応力場の強さを直接未知数とする解析手法を提案し、二層接合帯板の問題に適用して解析を行ってきた⁽¹⁰⁾。

一方、異種材料の接合材では、通常、接合温度と使用温度とが異なるため、それぞれの線膨張係数の差異から熱残留応力が生じる。この熱残留応力もまた接合材の強度・破壊に大きな影響を与えることから、接合角部の強度評価をする際、外力負荷によるものの他に熱残留応力による特異応力場も評価することが重要となる。そこで本研究では、図 1 に示すような材料 1 と材料 2 それぞれの横弾性係数、ポアソン比、線膨張係数が、 $G_1, G_2, \nu_1, \nu_2, \gamma_1^*, \gamma_2^*$ であるような、二層または三層(ただし、上層と下層を同じ材料とする)板状接合試験片が一様な温度変化を受けるときに生じる熱残留応力について、その特異応力場を引張荷重による特異応力場との等価性に基づき体積力法を用いて求め、検討を行う。

* 原稿受付 1999 年 7 月 23 日。

^{*1} 正員, 東京理科大学工学部 (☎ 162-8601 東京都新宿区神楽坂 1-3)。^{*2} 正員, トヨタ自動車(株) (☎ 471-0826 豊田市トヨタ町 1)。^{*3} 准員, 東京理科大学大学院。

E-mail: chend@me.kagu.sut.ac.jp

2. 接合角部先端における応力特異性

異種材料の接合角部においては、材料および形状の不連続のために、弾性応力は特異性を示すことが知られている。図1のような接合材の角部 A, B における応力特異性は、次の特性方程式⁽¹¹⁾

$$\begin{aligned} & [\cos^2(\lambda\pi/2) - (1-\lambda)^2]\beta^2 \\ & + 2(1-\lambda)^2[\cos^2(\lambda\pi/2) - (1-\lambda)^2]\alpha\beta \\ & + (1-\lambda)^2[(1-\lambda)^2 - 1]\alpha^2 \\ & + \cos^2(\lambda\pi/2)\sin^2(\lambda\pi/2) = 0 \quad \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

の範囲 $0 < \text{Re}(\lambda) < 1$ 内の根から決定される。式(1)中の α, β は両材料の弾性定数の組合せによって定義される Dundurs の材料複合パラメータ⁽¹²⁾であり、次式

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{G_1(\kappa_2 + 1) - G_2(\kappa_1 + 1)}{G_1(\kappa_2 + 1) + G_2(\kappa_1 + 1)} \\ \beta &= \frac{G_1(\kappa_2 - 1) - G_2(\kappa_1 - 1)}{G_1(\kappa_2 + 1) + G_2(\kappa_1 + 1)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

で定義されている。ただし、

$$\kappa_i = \begin{cases} (3 - \nu_i)/(1 + \nu_i) & (\text{plane stress}) \\ 3 - 4\nu_i & (\text{plane strain}) \end{cases} \quad (i=1, 2) \quad \dots\dots\dots (3)$$

材料複合パラメータ α と β は次式

$$\alpha(\alpha - 2\beta) > 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

を満足するときだけ、方程式(1)が範囲 $0 < \text{Re}(\lambda) < 1$

Fig. 1 Models of bonded strip

Fig. 2 Singular stress field caused by temperature change equivalent to that caused by uniaxial tension

内の根をもち、そのとき接合角部 A, B 近接の応力分布は次式で表される。

$$\sigma_{ij} = K \times r^{\lambda-1} f_{ij}(\theta) \quad (\sigma_{ij} = \sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}) \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 r, θ は角部 A を原点とする局部極座標系である。また、 $f_{ij}(\theta)$ は固有関数展開法により容易に求まる θ だけの関数であり、与えられた材料の組合せに対して、常に固有な形を取る。式(5)は、特異応力場の強さが1個の実数パラメータ K だけによって表されることを意味している。本研究では K の定義について、次式のような界面上の垂直応力 σ_θ に基づくものを用いる。

$$K = \lim_{r \rightarrow 0} [r^{1-\lambda} \times \sigma_\theta(r)]_{\theta=\pi/2} \quad \dots\dots\dots (6)$$

パラメータ K が求まれば、式(5)を通じて接合角部における特異応力場が具体的に求まる。特異応力場の強さ K は、角部先端から離れた所での弾性体の形状・寸法、荷重の状態などにも関係しており、その値を求めるためには通常数値解析の手法を用いなければならない。

3. 解析方法

図2に示すように、解析対象がある温度 T から一様な温度変化 ΔT を受ける場合に生じる熱残留応力による特異応力場について考える。この解析対象に生じる熱残留応力による特異応力場は、以下に示すプロセスから一軸引張荷重によって作り出すことができる。

まず、図2(a)の解析対象が分離していたと仮定すると、図2(b)のように一様な温度変化 ΔT を受けた場合、線膨張係数の差異により、界面に沿って両材料に熱膨張ひずみの差が生じる。この差は一様な圧縮荷重 σ_0

$$\sigma_0 = \frac{8G_1G_2(\gamma_2^* - \gamma_1^*)}{G_1(\kappa_2 - 1) - G_2(\kappa_1 - 1) - 2(G_1 - G_2)} \Delta T \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\gamma_i^* = \begin{cases} \gamma_i & (\text{plane stress}) \\ \gamma_i(1 + \nu_i) & (\text{plane strain}) \end{cases} \quad (i=1, 2) \quad \dots\dots\dots (8)$$

によるひずみ [図2(c)] でキャンセルすることができる⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾。したがって、この圧縮荷重 σ_0 をかけることで両材料を界面の長さが異なることなく再び結合することができ、接合後は角部に特異応力が生じないような応力状態 $\sigma_y = -\sigma_0$ となる [図2(d)]。しかし、このままでは実問題における表面力零の条件を満足していないので、図2(e)に示すような一軸引張荷重 σ_0 による応力場を加える。これにより、温度変化 ΔT を受けるときの熱残留応力による応力場は、一様な圧縮応力場 $\sigma_y = -\sigma_0$ [図2(d)] と一軸引張荷重 σ_0 による応力場 [図2(e)] の二つの和に等しいということになる。ここで、特異応力場に関しては、先述のように図2(d)では生じていないので、熱残留応力による特異応力場は、図2(e)の一軸引張荷重をかけたときによるものに等しいことがわかる。この引張荷重によって生じる特異応力場については、以下に述べるような、重ね合わせの原理に基づく解析手法⁽¹⁰⁾を用いて、容易に、かつ精度良く求めることができる。この解析手法では、まず、求めようとする応力場を応力特異性のある応力場とそれ以外の応力場の和と考える。応力特異性のある応力場については、求めようとする問題の接合角部に生じた特異応力場の強さを K と仮定すると、式(5)を通じて各応力成分が未知数 K に比例する形で一義的に決定できる。そして、それ以外の応力場は応力特異性がない問題となっているので、分布させるべき体積力の密度に、基本密度関数を導入することなく通常の体積力法によって容易に解析できる。したがって、この二つの応力場の和が、与えられた問

題の境界条件を満たすように、前者の未知数である K と後者の体積力の密度を求めれば良いということになる。このような方法を取ることで、接合角部近傍の応力はあらかじめ特異性の考慮されたものになり、通常の離散化を用いた数値解析手法によって特異応力場の強さを直接、精度良く求めることができる。

4. 解析結果

4・1 接合材の内部応力について 図3と図4はそれぞれ、二層と三層の接合帯板について、接合材端部から Δ だけ離れた各断面における応力 σ_x の分布を示すものである。材料の組合せは $G_2/G_1=0.1$, $\nu_1=\nu_2=0.3$ で、平面ひずみ状態とした。図からわかるように端部からある程度離れた断面では、応力 σ_x が発生し、断面が端部に近づくにつれてその値は小さくなっている。しかし端部にごく近い断面 ($\Delta/h=0.1$) では、接合界面に近づくに従い応力に乱れが生じている。すなわち、 $\Delta/h=0$ のときは境界条件により $\sigma_x=0$ となるが、 Δ/h が零でなければ界面端部近傍での応力 σ_x の値は、端部に生じる応力の特異性によって急激に変化している。

また、界面端部に生じる応力特異性は、接合界面に沿う応力 σ_y の変化から、より明確に見ることができ。図5は、二層接合帯板の接合界面上の σ_y と接合材端部からの距離の関係について示したものである。図5から、 σ_y は端部に近づくにつれて変化し、端部近傍でその大きさは無限大に変化していることがわかる。これは、解析に用いた材料の Dundurs 複合パラ

Fig. 3 σ_x/σ_0 on sections with $\Delta/h=0.1\sim 2.0$ for two layer strip

Fig. 4 σ_x/σ_0 on sections with $\Delta/h=0.1\sim 2.0$ for three layer strip

メータ α, β がそれぞれ $\alpha=0.81818$, $\beta=0.23377$ であり, $\alpha(\alpha-2\beta)>0$ となっているために接合角部 A の近傍に, 応力の特異性が生じているためである。

一方, 材料の複合パラメータ α, β が $\alpha(\alpha-2\beta)<0$ となると, 接合角部に応力の特異性が生じない。図 5 には, このような場合の応力 σ_y の分布も示されている(図中点線)。それによると, $\alpha(\alpha-2\beta)>0$ の場合とは異なり, 端部近傍では乱れが生じているものの, その値が無限大へと変化していく傾向は見られない。

4.2 特異応力場の強さ 一様な温度変化 ΔT による接合角部での特異応力場の強さ K を示す際, $\sigma_0 \cdot L^{1-\lambda}$ を用いて

$$F=K/(\sigma_0 \cdot L^{1-\lambda}) \quad \dots\dots\dots (9)$$

Fig. 5 σ_y/σ_0 on the interface for two layer strip with $\alpha(\alpha-2\beta)>0$ and <0 , respectively

Fig. 6 Variation of $K/(\sigma_0 \cdot h_2^{1-\lambda})$ with l/h

のように無次元化を行った。ここに, σ_0 は式(7)で定義される温度変化 ΔT に対応する一軸引張応力の値であり, L は代表寸法で, 検討する問題によって $L=h_2$ または $L=l$ としている。

4.2.1 寸法による影響 ここでは接合帯板の各寸法が, 接合角部に生じた特異応力場に与える影響についての検討を行う。

図 6 は, 無次元化した特異応力場の強さ F と接合材の長さ l との関係を示したものである。材料の組合せは, $G_2/G_1=0.1$, $\nu_1=\nu_2=0.3$ (平面ひずみ)とし, 二層接合帯板の結果を実線, 三層接合帯板の結果を点線で示してある。二層接合帯板では, 無次元化した特異応力場の強さ F は, いずれの h_1/h_2 においても相対長さ l/h が大きくなるにつれてその大きさを増すが, 三層接合帯板での F の値はいったん大きくなってから減少に転じている。しかし, 二層, 三層問わず, いずれの場合も接合材の長さが $l/h>2$ になると F の値はほぼ一定となる。したがって, 温度変化 ΔT によって生じる, 接合帯板の角部における特異応力場の強さは $l/h>2$ であれば, それは無限長帯板の場合とほぼ同様とみなすことができる。

次に, 接合材の長さを $l/h>2$ とし, 材料 2 の厚さ h_2 を固定し, 材料 1 の厚さ h_1 を変化させたときの, 接合角部に生じた特異応力場の強さ K について検討したものを図 7 に示す。二層接合帯板の結果を実線, 三層接合帯板の結果を点線とし, 材料 1, 2 の組合せは図中に示された四とおりを考えている。いずれの場合も h_1 が非常に薄くなると, 無次元化した特異応力場の強さ F の値は無理なく零へ向かっていることがわかり,

Fig. 7 Variation of $K/(\sigma_0 \cdot h_2^{1-\lambda})$ with h_1/h_2

十分に厚くなる ($h_1/h_2 > 4$) と F の値はほぼ一定となる。

4・2・2 材料の影響 Dundurs の研究⁽¹²⁾ によれば、応力境界値の問題において、二つの材料による接合材の応力場に含まれる各材料の弾性定数の影響は、式(2)で定義された2個のパラメータ α, β だけで表される。そこで、 $l/h=10$ として、パラメータ $\beta = -0.4, -0.3, \dots, 0.4$ の場合について、二層、三層接合帯板の接合材の角部 A に生じた特異応力場の強さ K ともう一つのパラメータ α との関係をも $h_1/h_2=1$ の場合について検討したものを図8に、 $h_1/h_2=1/2$ の場合について検討したものを図9に示す。それによると、無次元化した特異応力場の強さ F は、二層、三層接合帯板とも、 h_1/h_2 の値によらず、すべての α, β の範囲

Fig. 8 Variation of $K/(\sigma_0 \cdot h_2^{1-\lambda})$ with α, β for $h_1/h_2=1$

Fig. 9 Variation of $K/(\sigma_0 \cdot h_2^{1-\lambda})$ with α, β for $h_1/h_2=1/2$

において正となり、その値は0.2から1.2の間に収まっている。また、同じ材料の組合せに対する F の値は、 α が正の領域では三層に比べ二層接合帯板のほうが大きく、 α が負の領域では逆に三層接合帯板のほうが大きくなっている。図8, 9では、両材料の厚さ比 h_1/h_2 について、 h_1/h_2 が1/2と1の二とおりだけを示しているが、本研究では h_1/h_2 を広範囲に変化させ同様な計算を行っている。その結果、無次元化した特異応力場の強さは h_1/h_2 によらず常に正であることがわかった。また、図8, 9では $l/h=10$ としているが、図6の検討からわかるように、それは $l/h > 2$ の場合全体をカバーしていることとなる。したがって、図8, 9のような計算結果から、熱残留応力による特異応力場の強さ K の正負を示す図〔図10〕が得られる。横軸に G_2/G_1 をとると、Bogy の研究⁽¹¹⁾ によって応力特異性の有無は、まず G_1, G_2 の比により図中の点線によって区分され、 $G_2/G_1 < (3-\kappa_2)/(3-\kappa_1)$ または、 $G_2/G_1 > (\kappa_2+1)/(\kappa_1+1)$ のときのみ接合角部において応力特異性が生じる。そして縦軸に γ_2^*/γ_1^* をとると、無次元化した特異応力場の強さ $F=K/(\sigma_0 \cdot h_2^{1-\lambda})$ が常に正であることと、 σ_0 が

$$\sigma_0 = \frac{8G_2(\gamma_2^* - \gamma_1^*)\Delta T}{(3-\kappa_1)\left(\frac{G_2}{G_1} - \frac{3-\kappa_2}{3-\kappa_1}\right)} \quad (10)$$

のように書けることからわかるように、応力特異性のある領域を、さらに $\gamma_2^*/\gamma_1^*=1$ の実線によって四つに分割することができる。これら四つの領域は $K/\Delta T$

Fig. 10 Regions of material combinations for $K>0$ and $K<0$

Fig. 11 Relation between $K/\sigma_0 \cdot l^{1-\lambda}$ and λ for various material combinations

の正負によって図中記号 $\oplus$ の領域と $\ominus$ の領域の二つに大別される。 $\oplus$ の領域については、加熱の際に特異応力場の強さが正になる。これは、このような材料の組合せでは、加熱の際に接合角部において引張りの応力 σ_y が発生し、それによって接合角部からの引張分離破壊が起こる危険性があることを意味している。一方、 $\ominus$ の領域では、冷却の際に特異応力場の強さが正になる。これは、加熱ではなく冷却の際に接合角部からの引張分離破壊が起こる危険性があることを意味していると言える。なお、図中の $\gamma_2/\gamma_1=1$ の線上では、両材料の線膨張係数が等しいため、熱応力は生じない。

また、特異応力場の強さに及ぼす接合両材料の定数の影響について、Munz-Yangは、複合材料パラメータ α, β から決定される、一つのパラメータである応力特異性指数 λ だけによって表すことができると主張し⁽¹⁵⁾、解析対象として $h_1/l=h_2/l=2$ の二層接合帯板(平面ひずみ状態)を例に取り、温度変化 ΔT による特異応力場の強さ K と特異性指数 λ の間に以下のような関係があるとの解析結果を示している⁽¹⁵⁾。

$$K/\sigma_0 \cdot l^{1-\lambda} = 1 - 2.89\omega + 11.4\omega^2 - 51.9\omega^3 + 135.7\omega^4 - 135.8\omega^5 \quad (11)$$

ここで、

$$\omega = 1 - \lambda \quad (12)$$

そこで、Munz-Yangの主張が正しいかどうかを検証するために、本研究においても解析対象として同様のもの($h_1/l=h_2/l=2$, 平面ひずみ状態)を取扱い、各 λ に対してさまざまな材料の組合せを考え、それぞれの特異応力場の強さ K を求めたものを図11に示す。

図中の曲線は式(11)を表している。これによると、一つの λ に対応する無次元化した特異応力場の強さ $K/\sigma_0 \cdot l^{1-\lambda}$ は、ある幅を持って分布していることがわかる。 $\lambda < 0.8$ では、各 λ に対する分布の幅は狭く、 $K/\sigma_0 \cdot l^{1-\lambda}$ の分布領域がほぼ線状となっている。これは、図11中の材料複合パラメータ α, β と λ の線図に示されるように、 λ が小さいほど α, β の変動する範囲が狭くなっているからである。これらから、特異応力場の強さ K と特異性指数 λ の間にはなんらかの相関関係はあるものの、Munz-Yangの指摘したような1対1対応関係ではないと結論付けることができる。

5. 結 論

本研究では、二層あるいは上下対称な三層板状接合試験片が、一様な温度変化 ΔT を受けるとき接合角部に生じた特異応力場の問題について、熱弾性解析を行わず体積力法を用いた弾性解析のみで解析、評価を行った。数値計算の結果に基づいて、接合材の寸法および材料の組合せによる影響を検討して、主に以下の結論が得られた。

(1) 一様な温度変化 ΔT を受けるときの特異応力場の強さ K は、材料の組合せによって、加熱した際に接合界面に引張応力が発生するものと、冷却した際に接合界面に引張応力が発生するものに分類することができる。

(2) 一様な温度変化 ΔT を受けるときの特異応力場の強さ K と、特異性指数 λ の間には相関関係はあるものの、文献(15)に示されているような1対1対応関係ではないといえる。

文 献

- (1) Kuo, A. Y., *J. Appl. Mech.*, **56**(1989), 585-589.
- (2) 白鳥正樹・森孝男, 機論, **54**-498, A(1988), 251-258.
- (3) 杉林俊雄・池上皓三, 日本接着協会誌, **18**-11 (1982), 484-493.
- (4) 沢俊行・ほか3名, 機論, **52**-483, A(1986), 2506-2511.
- (5) 服部敏雄・ほか3名, 機論, **54**-499, A(1988), 597-602.
- (6) 西谷弘信・陳玳珩, 体積力法, (1987), 第三章, 培風館.
- (7) 西谷弘信, 機誌, **70**-580 (1967), 627-635.
- (8) Chen, D. H., *Int. J. Fract.*, **70** (1995), 81-97.
- (9) 陳玳珩, 西谷弘信, 機論, **59**-567, A(1993), 2682-2686.
- (10) 陳玳珩, 野々村一紀, 機論, **64**-621, A(1998), 125-130.
- (11) Boggy, D. B., *Int. J. Solids Struct.*, **6** (1970), 1287-1313.
- (12) Dundurs, J., *J. Appl. Mech.*, **36** (1969), 650-652.
- (13) 山崎利春, 機論, **57**-544, A(1991), 3029-3036.
- (14) 陳玳珩・西谷弘信, 機論, **59**-564, A(1993), 1937-1941.
- (15) Munz, D. and Yang, Y. Y., *J. Appl. Mech.*, **59** (1992), 857-861.