外力と変位境界を 2 ヶ所ずつ与えた薄板の
曲げ問題の解の誘導とその応用*三 輪 昌 弘^{*1}, 長谷部 宣男^{*2}, 山 田 正 俊^{*3}Mixed Boundary Value Problem with Two
Displacement Boundaries for Thin Plate BendingMasahiro MIWA, Norio HASEBE^{*4} and Masatoshi YAMADA^{*4} Dept. of Civ. Engrg., Nagoya Inst. of Tech.,
Gokiso-cho, Showa-ku, Naboya, Aichi, 466-8555 Japan

Solution of the mixed boundary value problem for thin plate bending with two external force and two displacement boundaries is derived. General solution is derived using a rational mapping and complex stress functions. A semi-infinite plate with two displacement constraints within a semi-elliptic notch under uniform bending is considered as an application. Stress distributions, stress intensity of debonding at the tip of the displacement constraint, stress concentration factors at the bottom of the semi-elliptic notch, and stress intensity factors when the semi-elliptic notch is changed into an edge crack are calculated. Besides, a general solution for one external force boundary and one displacement boundary is also derived.

Key Words: Thin Plate, Mixed Boundary Value Problem, Complex Variable, Mapping Function, Stress Intensity Factor, Interface Crack, Notch, Stress Concentrations Factor

1. 序 論

薄板の曲げ問題の解析は与える境界条件によって、①外力のみが与えられる外力境界値問題、②変位のみが与えられる変位境界値問題、③境界の一部で外力が、残りの境界で変位が与えられる混合境界値問題の 3 つに大別される。本論文では第 3 番目の混合境界値問題のうち、外力境界と変位境界がそれぞれ 2 ヶ所ずつ与えられる場合について、有理写像関数と複素応力関数を用いて一般解の誘導とその応用例を述べる。変位境界を 2 ヶ所所有する混合境界値問題は、変位境界上で生ずる応力の合力に起因する積分定数(式(3)の C_1 , C_2 , C_3)を決定する必要がある、これらを見捨てることのできる変位境界が 1 ヶ所の場合に比較して数学的に難しい。また、用いられる Plemelj 関数のため数学的により複雑な問題になる。変位境界上では固定の条件、すなわち直交するたわみ角の 2 成分 $\partial w / \partial x = \partial w / \partial y = 0$ を与える。この問題を 2 ヶ所固定の混合境界値問題、あるいは単に 2 ヶ所固定の問題と呼ぶことにする。さらに外力境界と変位境界がそれぞれ 1 ヶ所で、変位境界上で固定の条件を与えるとき、これを 1 ヶ所固定の混合境界値問題あるいは 1 ヶ所固定の問題と呼ぶ。また本論文では 2 ヶ所固定の問題の一般解を簡単化して 1 ヶ所固定の問題の解を得る。

任意形状の薄板の混合境界値問題の研究には、例えば板の 1 ヶ所固定の混合境界値問題⁽¹⁾などがみられる。

この問題を発展させて 2 ヶ所固定の混合境界値問題を解析することは、より複雑な構造解析へ適用範囲が広がり有用である。2 ヶ所固定の薄板の混合境界値問題の解は、Fourier 級数によるそれぞれ対辺固定、自由の矩形板の解⁽²⁾の解が見当たすが、任意形状に対する解は見当たらないようである。

本論文では一般解の誘導として、半楕円形ノッチの境界上の内部 2 ヶ所を剛拘束した半無限板に一樣曲げモーメントが作用する場合を用いて行う。またこの形状は後述するように、薄板と他の(半楕円形の)部材の交差部のモデルでもある。半楕円形ノッチの深さと幅の比を変化させてクラック、半円形ノッチ、ノッチの存在しない半平面などの形状を容易に解析することができる。そして、半楕円形ノッチの深さと幅の比や、深さと変位境界の長さの比を変えて、剥離の応力の強さ(界面クラックの応力拡大係数)を求める。これによって剛境界の接合部の剥離進展を考察することができる。さらに、半楕円ノッチ底部での応力集中係数や、半楕円ノッチ部の幅が 0 になったクラックの応力拡大係数を求める。

2. 写像関数と複素応力関数

図-1 に示す半楕円形状のノッチ(BCDEF)を有する半無限板が、そのノッチ部の一部分を 1 ヶ所(CDE)(図-1a), あるいは 2 ヶ所(BC および EF)(図-1b)で固定され、一樣曲げを受ける場合を例に解を導く。

半楕円形ノッチを有する半無限領域を単位円内部に写像する関数は、次式で与えられる^{(3), (4)}。

* 原稿受付 1999 年 12 月 20 日。

^{*1} JR 東海(株) (☎ 416-0937 富士市前田 118-1 新富士保線所)。^{*2} 正員, 名古屋工業大学工学部 (☎ 466-8555 名古屋市昭和区御器所町)。^{*3} 愛知県庁 (☎ 460-8501 名古屋市中区三の丸 3-1-2)。

E-mail: hasebe@kōzō4.ace.nitech.ac.jp

Fig. 1 Semi-Infinite Plate with Semi-Elliptic Notch and Unit Circle

(a) One Displacement Boundary (b) Two Displacement Boundaries

$$z = -ia \frac{\sqrt{1+\zeta^2}}{1-\zeta} - ib \frac{1+\zeta}{1-\zeta} \quad (1)$$

ここに a は半楕円形ノッチの深さ、 $2b$ は幅を表す。写像されるノッチの形状は、 $a=b$ で半円、 a が小さくなるにしたがって偏平な半楕円形ノッチとなり、 $a=0$ のときはノッチのない半無限板の写像関数となる。つまり、 $a=0$ のときには固定部分は直線で、1ヶ所固定の問題の場合は、例えば板と他の部材が交差する接合部、又はその両側から剥がれた構造のモデル(図-2)と考えることができる。2ヶ所固定の場合は、同様の交差部において中央に接合されていない部分のある構造のモデル(図-3)と考えることができる。本論文では固定境界から剥がれている状態をクラックと区別して剥離と呼ぶことにする。反対に b が小さくなるとノッチは鋭い半楕円形になり、 $b=0$ のときクラックを有する半無限板となる。つまり $b=0$ のとき、1ヶ所固定の問題は、板を貫通する部材との接合部で、板の端部側から接合線に沿って剥離した構造のモデルとなる。2ヶ所固定の場合は、板の内部側の接合線先端から剥離した構造のモデルと考えることができる。半楕円形の剛な部分を柱、板部分を床と考えることもできる。

解析には有理写像関数が用いられる。式(1)は無理式の項が含まれるので、これを分数式の和の有理型写像関数に変換して解析に用いる。

$$z = \frac{E_0}{1-\zeta} + \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{\zeta_k - \zeta} + E_c = \omega(\zeta) \quad (2)$$

ここに E_0 , E_k , E_c , ζ_k は複素定数、 n は分数式の項数で本論文では $n=24$ を用いる^{(5), (6), (7)}。

(1) 2ヶ所固定の場合 2ヶ所固定の問題の複素応力関数の一般解を導く。1ヶ所固定の問題の一般解は、2ヶ所固定の問題の解を利用して容易に求められるの

で、後に述べる。単位円内で正則な複素応力関数 $\phi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ を考える。外力の2成分が与えられる外力境界を $L(L_1:FAB, L_2:CDE)$ 境界、変位の2成分が与えられる変位境界を $M(M_1:BC, M_2:EF)$ 境界と呼ぶ(図-1)。 $\zeta = \sigma$ を単位円上の座標とすると、外力境界条件および変位境界条件はそれぞれ次式で与えられる⁽⁸⁾。

$$\begin{aligned} -\kappa\phi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\phi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} \\ = \frac{1}{D(1-\nu)} \int [m(s) + i \int p(s) ds] dz + iC_1 z + C_2 + iC_3 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\phi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\phi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = \frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} \quad (4)$$

ここに、 $m(s)$, $p(s)$ はそれぞれ境界に作用する曲げモーメントおよび置換せん断力で、 s は境界に沿う座標、 $\partial w / \partial x$, $\partial w / \partial y$ はそれぞれ x および y 方向のたわみ角、 D は板の曲げ剛さ、 ν は Poisson 比、 $\kappa = (3+\nu)/(1-\nu)$ 、 C_1 , C_2 , C_3 は積分定数で実数である。ここに、 C_2 は曲げモーメント $m(s)$ の、 C_1 , C_3 は置換せん断力 $p(s)$ の積分に起因する積分定数で、物理的に C_2 , C_3 はそれぞれ $m(s)$, $p(s)$ の合力に相当する量を意味する。外力境界上に、一部分でも外力の作用していない自由境界が存在する場合、解析接続⁽⁹⁾を利用して応力関数 $\psi(\zeta)$ は次式で表わされる。

$$\psi(\zeta) = \kappa \phi(1/\bar{\zeta}) - \frac{\omega(1/\bar{\zeta})}{\omega'(\zeta)} \phi'(\zeta) \quad (5)$$

解析領域の単位円内を領域 S^+ 、単位円外を領域 S^- と呼ぶ。 ζ が境界上の σ に近づいたとき $1/\bar{\sigma} = \sigma$ の関係を用いて、式(5)は次のように表される。

$$\psi(\sigma) = \kappa \phi^-(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \phi^{*+}(\sigma) \quad (6)$$

上式において、領域 S^+ および S^- から近づいた境界上の関数の値に対してそれぞれ $+$, $-$ の肩符をつけている。 $\omega(\zeta)$ は有理関数で $\overline{\omega^*(\sigma)} = \omega^-(\sigma)$ であるので肩符をつけていない。式(6)を式(3), (4)に代入すると、境界条件式はそれぞれ次式で表される。

$$\begin{aligned} \phi^+(\sigma) - \phi^-(\sigma) = -\frac{1}{\kappa} \left[\frac{1}{D(1-\nu)} \int [m(s) + i \int p(s) ds] dz \right. \\ \left. + iC_1 z + C_2 + iC_3 \right] = f_L(\sigma) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\phi^+(\sigma) + \kappa \phi(\sigma) = \frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} = f_M(\sigma) \quad (8)$$

以上によりこの問題は、境界 L_1 , L_2 で式(7)を、境界 M_1 , M_2 で式(8)を満足する $\phi(\zeta)$ を求める Riemann-Hilbert 問題に帰着され、一般解は次の形で表される⁽⁹⁾。

$$\phi(\zeta) = \frac{\chi(\zeta)}{2\pi i} \int_{L+M} \frac{h(\sigma)}{\chi(\sigma)(\sigma-\zeta)} d\sigma + \chi(\zeta) g(\zeta);$$

$$h(\sigma) = \begin{cases} f_A(\sigma) & \text{on } L(L_1, L_2) \\ f_M(\sigma) & \text{on } M(M_1, M_2) \end{cases} \quad (9)$$

ここに, $\chi(\zeta)$ は Plemelj 関数で,

$$\chi(\zeta) = (\zeta - \alpha_1)^{1-\lambda} (\zeta - \beta_1)^\lambda (\zeta - \alpha_2)^{1-\lambda} (\zeta - \beta_2)^\lambda; \quad (10)$$

$$\lambda = 0.5 - i\delta; \quad \delta = \frac{\ln \kappa}{2\pi}$$

$\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ は L, M 境界の接点の座標を表す (図-1b 参照). $g(\zeta)$ は式(7,8)の同次方程式の解で, 領域 S^+ で正則な関数である. それは式(5)の $\psi(\zeta)$ が S^+ で正則である条件から, 以下のように決定される⁽¹⁾.

式(5)右辺第2項において, 単位円内 S^+ で $\omega'(\zeta) \neq 0$, $\overline{\omega(1/\bar{\zeta})} = \overline{\omega(1/\zeta)}$ は単位円内の点 $\zeta = 1/\bar{\zeta}_k = \zeta'_k$ で1位の極を有し, $\phi'(\zeta)$ は領域 S^+ で正則である. したがって, 第2項を単位円内の ζ'_k で Laurant 展開して

$$-\frac{\overline{\omega(1/\bar{\zeta})}}{\omega'(\zeta)} \phi'(\zeta) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k \bar{B}_k \zeta_k'^2}{\zeta'_k - \zeta} + \text{regular part} \quad (11)$$

ここに $A_k = \phi'(\zeta'_k)$, $B_k = \frac{E_k}{\omega'(\zeta'_k)}$ である. 式(5)の $\psi(\zeta)$ は領域 S^+ で正則でなければならないから, 式(11)の右辺第1項と式(5)の右辺第1項の正則でない部分は, 互いに打ち消しあわなければならない. したがって式(9)を考え, 式(9)の右辺第1項の荷重項の中から ζ'_k を含む項は現れないので, 式(5)は次式のように表される.

$$\psi(\zeta) = \kappa \chi(1/\bar{\zeta}) g(1/\bar{\zeta}) + \sum_{k=1}^n \frac{A_k \bar{B}_k \zeta_k'^2}{\zeta'_k - \zeta} + \text{regular part} \quad (12)$$

上式より, $g(\zeta)$ は次式のように決められる.

$$g(\zeta) = \frac{1}{\kappa} \sum_{k=1}^n \frac{\bar{A}_k B_k}{\chi(\zeta_k) (\zeta_k - \zeta)} \quad (13)$$

したがって $\phi(\zeta)$ は, 式(9), (13)より次式で表される.

$$\phi(\zeta) = H(\zeta) + \frac{\chi(\zeta)}{\kappa} \sum_{k=1}^n \frac{\bar{A}_k B_k}{\chi(\zeta_k) (\zeta_k - \zeta)}; \quad (14)$$

$$H(\zeta) = \frac{\chi(\zeta)}{2\pi i} \int_{L+M} \frac{h(\sigma)}{\chi(\sigma)(\sigma - \zeta)} d\sigma$$

次に, 具体的に境界条件を与えて式(14)の荷重項の積分を行う. x 方向の無限遠で一様曲げモーメント M_0 が作用し, 外力境界 L_1, L_2 は自由, 変位境界 M_1, M_2 は固定の条件として, それぞれ次式を考える.

$$m(s) = 0, \quad p(s) = 0 \quad \text{on } L_1, L_2 \quad (15a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{on } M_1, M_2 \quad (15b)$$

ここで求める応力関数 $\phi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ を次式のように表す.

$$\phi(\zeta) = \phi_0(\zeta) + \phi_1(\zeta); \quad (16a)$$

$$\psi(\zeta) = \psi_0(\zeta) + \psi_1(\zeta) \quad (16b)$$

ここに, $\phi_0(\zeta)$, $\psi_0(\zeta)$ は x 方向無限遠で一様曲げモーメント M_0 を与える関数で, 次式で表される.

$$\phi_0(\zeta) = -\frac{M_0}{4D(1+\nu)} \omega(\zeta); \quad (17b)$$

$$\psi_0(\zeta) = -\frac{M_0}{2D(1-\nu)} \omega(\zeta) \quad (17b)$$

$\phi_1(\zeta)$, $\psi_1(\zeta)$ は次のようにして求められる. 境界条件式の積分の基準点を点 A にとり, 点 A において $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ とする. まず境界 L_1 での計算を行う. 式(15), (16), (17)を式(3)に代入すると, $\phi_1(\zeta)$ および $\psi_1(\zeta)$ に関して,

$$-\kappa \phi_1(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \phi_1'(\sigma) + \overline{\psi_1(\sigma)} = -\frac{M_0}{2D(1-\nu)} [\omega(\sigma) - \overline{\omega(\sigma)}] \quad (18)$$

$\phi_1(\zeta)$ を決める L_1 上の境界条件式(7)の右辺の項 $f_{L_1}(\sigma)$ として κ を考え次式を得る.

$$f_{L_1}(\sigma) = -\frac{M_0}{2D(3+\nu)} [\omega(\sigma) - \overline{\omega(\sigma)}] \quad (19)$$

境界 M_1 では, 式(15), (16), (17)を式(4)に代入して,

$$\phi_1(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \phi_1'(\sigma) + \overline{\psi_1(\sigma)} = \frac{M_0}{2D} \left[\frac{\omega(\sigma)}{1+\nu} + \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{1-\nu} \right] \quad (20)$$

となり, M_1 上の境界条件式(8)の右辺の項 $f_{M_1}(\sigma)$ として

$$f_{M_1}(\sigma) = \frac{M_0}{2D} \left[\frac{\omega(\sigma)}{1+\nu} + \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{1-\nu} \right] \quad (21)$$

を得る. つづいて境界 L_2 上の条件を考える. 式(7)の荷重項の積分で, 境界 M_1 の固定境界上で未知反力 $m(s) \neq 0$, $p(s) \neq 0$ が存在しているため, これらの合力に関係する積分定数は $C_2 \neq 0$, $C_3 \neq 0$ である. しかし C_1 の意味から C_1 の値は M_1 上で変わらないので $C_1 = 0$ と採れる. 境界 L_1 のときと同様, 式(15), (16), (17)を式(3)に代入し, 式(7)の右辺の荷重項として次式を得る.

$$f_{L_2}(\sigma) = -\frac{M_0}{2D(3+\nu)} [\omega(\sigma) - \overline{\omega(\sigma)}] - \frac{C_2 + iC_3}{\kappa} \quad (22)$$

最後に境界 M_2 では, 境界 M_1 と同様にして次式を得る.

$$f_{M_2}(\sigma) = \frac{M_0}{2D} \left[\frac{\omega(\sigma)}{1+\nu} + \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{1-\nu} \right] \quad (23)$$

積分経路を一周して基準点 A に戻ったとき, 全体の釣り合いを満足するために, 固定境界 M_2 で生ずる反力 $m(s)$, $p(s)$ の合力は, 境界 M_1 でのそれに違符号で等しい. 式(19), (21), (22), (23)を式(14)の荷重項に代入し積分すると, $\phi_1(\zeta)$ の荷重項 $H_1(\zeta)$ は次式で得られる.

$$H_1(\zeta) = \frac{M_0}{4D(1+\nu)} \omega(\zeta)$$

$$- \chi(\zeta) \frac{M_0}{4D(1+\nu)} \left[\frac{E_0}{\chi(1)(1-\zeta)} + \frac{1}{\kappa} \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{\chi(\zeta_k) (\zeta_k - \zeta)} \right]$$

$$- \frac{C_2 + iC_3}{2\pi i \kappa} F_{L_1}(\zeta) \quad (24)$$

ただし,

Fig. 2 Stress Distributions for One Clamped Boundary

$$F_L(\zeta) = \chi(\zeta) \int_{\beta_1}^{\alpha_2} \frac{d\sigma}{\chi(\sigma)(\sigma - \zeta)} \quad (25)$$

である。式(25)の積分は困難であるが、その1階微分は ζ を積分内に含むことなく得られ⁽¹⁰⁾、式(24)の1階微分 $H_1'(\zeta)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} H_1'(\zeta) &= \frac{M_0}{4D(1+\nu)} \omega'(\zeta) \\ &= -\chi'(\zeta) \frac{M_0}{4D(1+\nu)} \left[\frac{E_0}{\chi(1)(1-\zeta)} + \frac{1}{\kappa} \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{\chi(\zeta_k)(\zeta_k - \zeta)} \right] \\ &= -\chi(\zeta) \frac{M_0}{4D(1+\nu)} \left[\frac{E_0}{\chi(1)(1-\zeta)^2} + \frac{1}{\kappa} \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{\chi(\zeta_k)(\zeta_k - \zeta)^2} \right] \\ &\quad + \frac{C_2 + iC_3}{4\pi\kappa} \frac{y(\zeta)}{y(1)} \left[\frac{-4I_{(0)} \{ \lambda(\zeta - \alpha_1)(\zeta - \alpha_2) + (1-\lambda)(\zeta - \beta_1)(\zeta - \beta_2) \}}{(1-\alpha_1)(1-\beta_1)(1-\alpha_2)(1-\beta_2)} \right. \\ &\quad \left. + I_{(0)} \left\{ \frac{(1-\lambda)(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)} + \frac{\lambda(1+\beta_1)(1+\beta_2)}{(1-\beta_1)(1-\beta_2)} \right\} \right. \\ &\quad \left. + 2I_{(1)} \left\{ 1 - \frac{1-\lambda}{1-\alpha_1} - \frac{\lambda}{1-\beta_1} - \frac{1-\lambda}{1-\alpha_2} - \frac{\lambda}{1-\beta_2} \right\} - I_{(2)} \right] \quad (26) \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} y(\zeta) &= \frac{\chi(\zeta)}{(\zeta - \alpha_1)(\zeta - \beta_1)(\zeta - \alpha_2)(\zeta - \beta_2)}; \\ I_{(n)} &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{t^n}{\chi_t(t)} dt \quad (n=0,1,2); \\ t &= -i \frac{1+\sigma}{1-\sigma}; \\ \chi_t(t) &= (t - t_{\alpha_1})^{1-\lambda} (t - t_{\beta_1})^{1-\lambda} (t - t_{\alpha_2})^{1-\lambda} (t - t_{\beta_2})^{1-\lambda}; \\ t_{\alpha_1} &= -i \frac{1+\alpha_1}{1-\alpha_1}; \quad t_{\beta_1} = -i \frac{1+\beta_1}{1-\beta_1}; \\ t_{\alpha_2} &= -i \frac{1+\alpha_2}{1-\alpha_2}; \quad t_{\beta_2} = -i \frac{1+\beta_2}{1-\beta_2} \quad (27) \end{aligned}$$

最後に積分定数 C_2, C_3 を決定する。式(5)の1階微分 $\psi'(\zeta)$ は、解析領域内で正則でなければならない。式(14)、(16)、(26)を式(5)に代入すると $1/\zeta$ の不正則項が現れる。 $\psi(\zeta)$ の正則条件よりこの項の係数は0でなければならない。これより C_2, C_3 は次式の実部、虚部で得られる。

Fig. 3 Stress Distributions for Two Clamped Boundaries

$$C_2 + iC_3 = \frac{\pi\chi(1)}{I_{(0)}} \left[\frac{M_0}{4D(1+\nu)} \left\{ \frac{\kappa E_0}{\chi(1)} + \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{\chi(\zeta_k)} \right\} - \sum_{k=1}^n \frac{\bar{A}_k B_k}{\chi(\zeta_k)} \right] \quad (28)$$

式(14)および(26)で $\phi_1(\zeta)$ が求められる。 $\phi_1(\zeta)$ 中の未定の定数 A_k は関係式 $A_k = \phi_1'(\zeta_k)$ ($k=1, 2, \dots, n$)の実部、虚部に関する $2n$ 元連立1次方程式を解いて得られる。これを式(16)に代入して $\phi(\zeta)$ の一般解が得られる。また、 $\psi(\zeta)$ は式(5)で与えられる。

(2) 1ヶ所固定の場合 1ヶ所固定の場合も、外力境界 L および変位境界 M での境界条件は式(7)、(8)で、その解は式(14)と同じ形で与えられる。ただし、1ヶ所固定の問題では積分定数を $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ とすることができる⁽⁸⁾。また、Plemelj関数は、境界 L と M の接点 α, β を用いて次式で表される(図-1a参照)。

$$\chi(\zeta) = (\zeta - \alpha)^{1-\lambda} (\zeta - \beta)^{\lambda}; \quad \lambda = 0.5 - i\delta; \quad \delta = \frac{\ln \kappa}{2\pi} \quad (29)$$

x 方向無限遠で一樣曲げモーメント M が作用する場合は、荷重項 $H_1(\zeta)$ は、式(24)において $C_2 = C_3 = 0$ として得られる。 $\phi(\zeta), \psi(\zeta)$ は式(16)、(5)で与えられる。

3. 応力分布

得られた一般解の応用例として、1ヶ所あるいは2ヶ所固定の場合の応力分布図を示す。

(1) 1ヶ所固定の場合 図-2は $b/a=0.5$ なる半楕円形ノッチ1ヶ所固定の場合で、固定境界の位置を $c/a=0.5$ で表しており、Poisson比は $\nu=0.25$ である。 M_r, M_θ は、それぞれ境界上に生ずる法線方向と接線方向の曲げモーメント、 $M_{r\theta}$ はねじりモーメントである。固定境界上では常に $M_{r\theta}=0$ であり、固定境界上の M_r, M_θ には、 $M_\theta = \nu M_r$ なる関係がある⁽¹⁾。

(2) 2ヶ所固定の場合 図-3は2ヶ所固定の場合の応力分布例で、 $b/a=0.5, c/a=0.5, \nu=0.25$ である。 CDE はノッチ底部に剥離が生じた場合に相

Fig. 4 Non-Dimensional Stress Intensity of Debonding F_a for Two Clamped Boundaries ($\nu=0.25$)

Fig. 5 Non-Dimensional Stress Intensity of Debonding F_a and F_b for Two Clamped Boundaries ($\nu=0.25$)

当する。

4. 剥離の応力の強さ

固定境界上の剥離先端からの距離を r として、剥離先端近傍の応力成分は次式で表わされる⁽¹⁵⁾。

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{1}{\sqrt{2r(1+\nu)}} \{ (1-\nu) \cosh \pi \delta \\ &\quad - 2(1+\nu) \sinh \pi \delta \} |\tilde{\alpha}_0| \cos(\theta_0 + \delta \ln r) \\ M_y &= \frac{-(3+\nu)}{\sqrt{2r(1+\nu)}} \cosh \pi \delta |\tilde{\alpha}_0| \cos(\theta_0 + \delta \ln r); \\ M_{xy} &= \frac{1}{\sqrt{2r(1+\nu)}} \{ (1+\nu) \cosh \pi \delta - 2 \sinh \pi \delta \} |\tilde{\alpha}_0| \sin(\theta_0 + \delta \ln r) \end{aligned} \quad (30a, b, c)$$

ここに θ_0 は $\tilde{\alpha}_0$ の偏角で、 $\tilde{\alpha}_0 = A_I + iA_{II}$ とすると $\theta_0 = \tan^{-1}[A_{II}/A_I]$ となる。式(30)からわかるように、剥離先端の応力の大きさは $|\tilde{\alpha}_0|$ で表されることがわかる。ここではクラックの場合の応力拡大係数との混同を避けるため、剥離先端での応力拡大係数を「剥離の応力の強さ」と呼び、 $|\tilde{\alpha}_0|$ で表す。1ヶ所固定、2ヶ所固定のそれぞれの問題について、剥離は左右対称に発生した場合を考える。対称性から、各々の問題の2つの剥離

先端 C, E での剥離の応力の強さの絶対値は等しい。

(1) 2ヶ所固定の場合 点 $E(\xi = \alpha_2)$ での剥離の応力の強さ $\tilde{\alpha}_0$ は次式で計算される^{(4), (10), (15)}。

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_0 &= 2\sqrt{2}D(1+\nu) \exp(-\pi\delta) \frac{[\omega'(\alpha_2)(\alpha_2 - \beta_2)]^{\frac{1}{2}} g(\alpha_2)}{\omega'(\alpha_2)(\alpha_2 - \beta_2)} \\ &\quad \times \exp \left\{ i\lambda \left(\theta_A + \pi + \frac{\gamma}{2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (31)$$

ただし、 $g(\alpha_2) = \lim_{\xi \rightarrow \alpha_2} [\phi'(\xi)(\xi - \alpha_2)^{\frac{1}{2}}(\xi - \beta_2)^{\frac{1}{2}}]$, θ_A は剥離面すな

わち点 E の接線と x 軸がなす角、 γ は単位円上で α_2 と β_2 の中心角 $\gamma = \angle \alpha_2 O \beta_2$ である(図-1b 参照)。剥離先端近傍の界面上の応力成分は、 $\tilde{\alpha}_0$ を使って式(30)で表せる。

$\nu=0.25$ の場合で、次式で定義した2通りの無次元化した剥離の応力の強さ F_a, F_b を用いる。

$$F_a = \frac{|\tilde{\alpha}_0|}{M_0 \sqrt{a}}; \quad F_b = \frac{|\tilde{\alpha}_0|}{M_0 \sqrt{b}} \quad (32a, b)$$

F_a はノッチの深さ a を一定としたとき、 F_b はノッチの幅 b を一定としたときの剥離の応力の強さを表す。

図-4の F_a はノッチ深さ a を一定にして、剥離が進展した場合の図とみなすことができる。2ヶ所固定の場合、 c/a は深さに対する固定部分の長さの比を表している。つまり剥離が進展するとき、 c/a は大→小すなわち横軸の右→左となる。剥離が進展するにしたがって F_a は単調増加しているため、一旦生じた剥離は停止することなく破断にいたる。 b/a が大きくノッチが扁平な形状になるほど F_a の値は増加し、剥離の進展に対する F_a の増加割合も急になる。図-5a は楕円ノッチ深さ a を一定にして幅 b を変化させたときの F_a の図、図-5b は b を一定にして a を変えたときの F_b である。両者とも、横軸左方向に近づくにしたがって楕円ノッチは深く鋭く、右側へ向かうと浅く扁平な形状となる。 a を一定にして b を変化させると、 b が大きいほど F_a は増加する。例えば、破壊靱性値を $F_{Ca} = 1.0$ 、初期の剥離長を $c/a > 0.1$ とすれば、 $a/b > 0.65$ の範囲で $F_a < F_{Ca}$ となり剥離は進展せず安全である。逆に b を一定にして a を変化させると、 a が大きいほど F_b は増加するが、 $c/a = 0.1$ では a が小さくノッチが浅くなったときにも F_b は増加する。例えば、 $F_{Cb} = 1.0$ 、 $c/a > 0.1$ とすれば、 $0.17 > b/a$ かつ $a/b > 0.26$ の範囲であれば $F_b < F_{Cb}$ となり剥離は進展せず安全である。

(2) 1ヶ所固定の場合

1ヶ所固定の場合の $\tilde{\alpha}_0$ は、式(31)において $\alpha_2 \rightarrow \alpha, \beta_2 \rightarrow \beta$ として1ヶ所固定の場合の $\phi'(\xi)$ 及び $\chi(\xi)$, $\gamma = \angle \alpha O \beta$ (図-1 参照)を用いて計算される。式(32)の無次元化した剥離の応力の強さをを用いる。図-6は、いくつかの半楕円形ノッチの幅と深さの比 b/a について、剥離長さ c/a が

 Fig. 6 Non-Dimensional Stress Intensity of Debonding F_a for One Clamped Boundary ($\nu=0.25$)

 Fig. 7 Non-Dimensional Stress Intensity of Debonding F_a and F_b for One Clamped Boundary ($\nu=0.25$)

変化したときの F_a の図である。 b/a が小さいほど、つまりノッチが鋭くなるほど全体的に F_a の値は小さくなり、剥離は発生しにくくなる。 b/a が大きくノッチが扁平になってくると F_a の値は極大値を有する。破壊靱性値が F_a の極大値よりも小さいとき、一旦剥離が発生しても途中で停止する。例えば、 $b/a=5.0$ 、破壊靱性値 $F_{Ca}=1.0$ と仮定し、初期の剥離長が $c/a=0.2$ のとき、 $F_a > F_{Ca}$ なので剥離は進展するが、 $c/a=0.87$ 付近で $F_a < F_{Ca}$ 、となって停止する。逆に b/a が小さいときには、例えば $b/a=0.1$ のとき F_a は小さいので剥離は生じにくい、 F_a は単調増加しているの一旦剥離が生じると進展し続け破断する。各々の b/a に対する極大値より破壊靱性値 F_{Ca} が大きいとき、剥離の進展は生じない。図-7aは、一定のノッチ深さ a に対して幅 $2b$ を変化させた場合の F_a を示す。 b が大きくなるほど F_a は増加し、 a/b が 0.4 より小さくなったあたりから急増する。例えば、破壊靱性値 $F_{Ca}=1.0$ と仮定すれば、 $a/b > 0.35$ の範囲で $F_a < F_{Ca}$ となり剥離は進展せず安全である。図-7bは、一定のノッチ幅 $2b$ に対して深さ a を変化させた場合の F_b を示している。 a が大きいほど F_b は増加し、 b/a が 0.2 より小さくなったあたりから急

 Table 1 Stress Concentration Factors by Eq.(33) and Eq.(36) for One Clamped Boundary ($\nu=0.25$)

ρ/a	$c/a=0$			$c/a=0.5$		
	Eq.(33)	Eq.(36)	Error(%)	Eq.(33)	Eq.(36)	Error(%)
0.0001	-31.5972	-31.5952	-0.006	-38.5404	-38.5354	-0.013
0.0005	-14.5292	-14.5309	0.011	-17.6464	-17.6457	-0.004
0.0010	-10.4848	-10.4874	0.025	-12.6956	-12.6958	0.002
0.0050	-5.0884	-5.0917	0.064	-6.0884	-6.0902	0.029
0.0100	-3.8104	-3.8133	0.077	-4.5236	-4.5251	0.033
0.0500	-2.1076	-2.1084	0.039	-2.4364	-2.4371	0.027
0.1000	-1.7056	-1.7052	-0.022	-1.9432	-1.9428	-0.022
0.2000	-1.4228	-1.4209	-0.132	-1.5952	-1.5938	-0.089
0.5000	-1.1744	-1.1704	-0.337	-1.2880	-1.2852	-0.217
1.0000	-1.0512	-1.0462	-0.475	-1.1344	-1.1309	-0.304
2.0000	-0.9656	-0.9609	-0.483	-1.0264	-1.0235	-0.285
5.0000	-0.8920	-0.8909	-0.123	-0.9324	-0.9316	-0.083
10.0000	-0.8560	-0.8620	0.697	-0.8856	-0.8893	0.418

$$\text{Error} = \frac{\text{Eq.(36)} - \text{Eq.(33)}}{\text{Eq.(33)}} \times 100$$

 Table 2 Coefficients of Eq.(36) for One Clamped Boundary ($\nu=0.25$)

	$c/a=0$	0.25	0.5	0.75	0.9
k_1	-0.3087	-0.3286	-0.3779	-0.4473	-0.5061
k_2	-0.7251	-0.7307	-0.7453	-0.7589	-0.7662
k_3	-0.01241	-0.01098	-0.007748	-0.004592	-0.002826

増する。例えば、破壊靱性値 $F_{Cb}=1.0$ 、初期剥離長 $c/a < 0.9$ とすれば、 $b/a > 0.25$ の範囲で $F_b < F_{Cb}$ となり剥離は進展せず安全である。

5. 応力集中係数

半楕円ノッチ底部での応力集中係数 SCF を求める。 SCF は、薄板の応力集中を生じていない部分での曲げモーメント M_0 、半楕円ノッチ底部での最大曲げモーメントを M_{max} として次式で定義される。

$$SCF = \frac{M_{max}}{M_0} \quad (33)$$

(1) 1ヶ所固定の場合 半楕円ノッチ底部付近の境界は固定されており、この境界上に作用する法線方向および接線方向の曲げモーメント M_r 、 M_θ の間には、 $M_\theta = \nu M_r$ なる関係が成立する。したがって $M_r > M_\theta$ より、ここでは式(33)の M_{max} には M_r の最大値を用いる。 $\nu=0.25$ のとき、いくつかの ρ/a および c/a に対して得られた SCF を表-1に示す。固定境界および自由境界での SCF は、ノッチ底部の曲率半径 ρ ($\rho < 1$) を用いて一般に次式で表される⁽¹²⁾、⁽¹¹⁾。

$$SCF = \sum_{j=1}^{\infty} k_j \rho^{m_j} \quad (34)$$

ここに、 k_j は境界条件や薄板の形状によって決まる定数、 m_j はノッチの隅角部角度から求められる特性方程式の根で、いまの場合、隅角部角度は 360° であるから $m_j = 0.5j - 1$ ($j=1, 2, \dots$) である。半楕円ノッチの深さ a を寸法の基準とすると式(34)は、

Table 3 Stress Concentration Factors by Eq.(33) and (36) for Two Clamped Boundaries ($\nu=0.25$)

ρ/a	$c/a=0.5$		
	Eq.(33)	Eq.(36)	Error(%)
0.0001	36.9774	36.9748	-0.007
0.0005	16.7945	16.7925	-0.012
0.0010	12.0118	12.0102	-0.013
0.0050	5.6287	5.6280	-0.013
0.0100	4.1162	4.1156	-0.014
0.0500	2.0974	2.0972	-0.008
0.1000	1.6188	1.6189	0.003
0.2000	1.2803	1.2805	0.015
0.5000	0.9797	0.9800	0.033
1.0000	0.8279	0.8283	0.053
2.0000	0.7203	0.7208	0.063
5.0000	0.6245	0.6246	0.014
10.0000	0.5795	0.5753	-0.101

$$\text{Error} = \frac{\text{Eq.(36)} - \text{Eq.(33)}}{\text{Eq.(33)}} \times 100$$

Table 4 Coefficients of Eq.(36) for Two Clamped Boundaries ($\nu=0.25$)

	$c/a=0.1$	0.25	0.5	0.75	0.9
k_1	0.5543	0.4772	0.3651	0.2337	0.1183
k_2	0.7185	0.6174	0.4648	0.2780	0.1086
k_3	-0.0001922	-0.000834	-0.001561	-0.002214	-0.002694

$$SCF = \sum_{j=1}^{\infty} k_j \left(\frac{\rho}{a} \right)^{0.5j-1} \quad (35)$$

と表される。さらに SCF の式は、式(35)の第3項までを採った次式で精度よく表されることを示す。

$$SCF = k_1 \sqrt{\frac{a}{\rho}} + k_2 + k_3 \sqrt{\frac{\rho}{a}} \quad (36)$$

k_1 , k_2 および k_3 は、 $\rho < 1$ のみならず $\rho > 1$ の計算結果の SCF の値をも用いて最小二乗法を用いて決め、その結果を表-2に示す。また、式(36)で得られる SCF を、式(33)での値とあわせて表-1に示す。両者間の誤差は0.2%以下で非常に小さく、よい精度で表されている。

(2) 2ヶ所固定の場合 2ヶ所固定の場合、半楕円ノッチ底部付近の境界は自由境界であるので $M_r=0$ となる。式(33)の M_{max} には M_θ の最大値を用いる。自由境界の SCF も式(34)で表される⁽¹¹⁾。

隅角部角度が 360° のときは式(35)で表され、さらに式(36)で表される近似式を考える。 $\nu=0.25$ のとき、いくつかの ρ/a および c/a に対して、式(33)および式(36)で得られる SCF を表-3に、式(36)の定数 k_1 , k_2 および k_3 を表-4に示す。この場合も、両者間の誤差は0.2%以下で非常に小さく、よい精度で表されている。

6. 応力拡大係数

$b/a=0$ のとき、半楕円ノッチはクラックとなる。このクラックの応力拡大係数について以下について調べる。

(1) 1ヶ所固定の場合 クラック先端付近のクラッ

Fig. 8 Non-Dimensional Stress Intensity of Debonding F_B for One Clamped Boundary ($\nu=0.25$)

ク面は固定されているので、このクラックを「固定のクラック」と呼ぶ。クラック先端を原点としクラックを x 軸上に選ぶとき、先端近傍の応力は、固定のクラックの応力拡大係数 $K = k_{Br} + ik_{Sr}$ を用いて次式で表される。

$$M_x = \frac{1}{4\sqrt{2r}} \cdot \frac{1-\nu}{1+\nu} k_{Br} \left(\frac{5+3\nu}{1-\nu} \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{5\theta}{2} \right) + \frac{1}{4\sqrt{2r}} \cdot \frac{1-\nu}{1+\nu} k_{Sr} \left(-\frac{1+7\nu}{1-\nu} \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{5\theta}{2} \right) \quad (37a)$$

$$M_y = \frac{1}{4\sqrt{2r}} \cdot \frac{1-\nu}{1+\nu} k_{Br} \left(\frac{3+5\nu}{1-\nu} \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{5\theta}{2} \right) - \frac{1}{4\sqrt{2r}} \cdot \frac{1-\nu}{1+\nu} k_{Sr} \left(\frac{7+\nu}{1-\nu} \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{5\theta}{2} \right) \quad (37b)$$

$$M_{xy} = \frac{1}{4\sqrt{2r}} \cdot \frac{1-\nu}{1+\nu} k_{Br} \left(\sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{5\theta}{2} \right) - \frac{1}{4\sqrt{2r}} \cdot \frac{1-\nu}{1+\nu} k_{Sr} \left(3 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{5\theta}{2} \right) \quad (37c)$$

ここに、極座標 (r, θ) の r はクラック先端からの距離、 θ はクラック (x 軸) とのなす角である (図-11)。また k_{Br} , k_{Sr} は固定のクラックの曲げおよび面外せん断モードの応力拡大係数で、複素応力関数 $\phi(\zeta)$ と写像関数 $\omega(\zeta)$ を用いて次式で得られる。

$$k_{Br} - ik_{Sr} = -2D(1+\nu) \exp \left(-\frac{i\delta_0}{2} \right) \frac{\phi'(\zeta_0)}{\sqrt{\omega'(\zeta_0)}} \quad (38)$$

ここに、 δ_0 は x 軸とクラックのなす角、 ζ_0 はクラック先端の座標で、いまの場合 $\delta_0 = -\pi$, $\zeta_0 = -1$ である。

解析結果として次式で無次元化した応力拡大係数 F_{Br} , を図-8に示す。また対称性から $k_{Sr}=0$ である。

$$F_{Br} = \frac{3+\nu}{1+\nu} \cdot \frac{k_{Br}}{M_0 \sqrt{a}} \quad (39)$$

また k_{Br} は、前節で述べた応力集中係数 SCF を用いて次式により求めることもできる⁽¹³⁾。

$$k_{Br} = \frac{1+\nu}{2} \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[\sqrt{\rho} \cdot M_{max} \right] = \frac{1+\nu}{2} k_1 \quad (40)$$

式(36)と表-1 および式(40)の k_{Br} から求められる F_{Br} の値は、式(39)の値とよく一致している。

(2) **2ヶ所固定の場合** この場合、クラック先端付近のクラック面は自由境界で、いわゆる一般のクラックと同じである。先端が原点となるようクラックを x 軸上に選ぶとき、クラック先端近傍の応力は、応力拡大係数 $K=k_B+ik_S$ を用いて、たとえば M_x は、次式で表される^{(14), (6)}

$$M_x = \frac{-1}{4\sqrt{2r}} \cdot \frac{1-\nu}{1+\nu} k_B \left(3\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{5\theta}{2} \right) + \frac{1}{4\sqrt{2r}} \cdot \frac{1-\nu}{1+\nu} k_S \left(-\frac{9+7\nu}{1-\nu} \sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{5\theta}{2} \right) \quad (41)$$

解析結果として、次式で無次元化した応力拡大係数 F_B を図-9に示す。また対称性から $k_S=0$ である。

$$F_B = \frac{3+\nu}{1+\nu} \cdot \frac{k_B}{M_0\sqrt{a}} \quad (42)$$

k_B は、前節で述べた応力集中係数 SCF を用いて次式より求めることもできる⁽¹³⁾。

$$k_B = \frac{1}{2} \lim_{\rho \rightarrow 0} [\sqrt{\rho} \cdot M_{\max}] = \frac{1}{2} k_1 \quad (43)$$

式(36)と表-2 および式(43)の k_B を用いて得られる F_B の値は、式(42)の値とよく一致している。

7. 結 語

薄板の問題で、境界の任意の2ヶ所の部分で変位、残りの境界で外力を与える混合境界値問題の複素応力関数 $\phi(\zeta)$ の一般解を得た。その1階微分の形 $\phi'(\zeta)$ は積分に ζ を含むことなく得られる。従って数値積分が不要となり、応力成分の計算が容易になる。また、この2ヶ所固定の解を利用して、変位境界を1ヶ所与える場合の一般解は、Plemelj 関数を式(10)から式(30)に代え、さらに式(7)中の積分定数を0として得られる。写像関数を用いて比較的任意の形状の解析ができ、得られた解は、有理写像関数の表す形状に対して厳密解で、応力集中係数や応力拡大係数が精度よく求められる。得られた一般解の応用例として、半楕円形のノッチを有し、そのノッチ部分の境界の一部を1ヶ所あるいは2ヶ所で固定した問題を解析した。それぞれに関して応力分布の一例を示した。そして、各々の場合について、半楕円ノッチの深さと幅の比、ノッチ深さと剥離長さの比を変化させて剥離の応力の強さを求め、これを破壊のクライナリオンとして剥離の強さを求め、その進展について述べた。さらに、半楕円ノッチ底部の応力集中係数、半楕円ノッチの特別な場合であるクラックの応力拡大係数を求め、応力集中係数と応力拡大係数の関係について述べた。

Fig. 9 Non-Dimensional Stress Intensity of Debonding F_B for Two Clamped Boundaries ($\nu=0.25$)

文 献

- (1) Hasebe, N., "Mixed Boundary Value Problem of Plate with Crack," J. Engrg. Mech., Vol.110, No.1, (1984) pp.37-48.
- (2) Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S., "Theory of plates and shells," 2nd ed. McGraw-Hill Book Co., New York, N. Y. (1959)
- (3) 長谷部, 半楕円切欠きを有する半無限板の応力解析, 名古屋工業大学学報, 24, (1972), pp.295-301.
- (4) Hasebe, N., Tsutsui, S. and Nakamura, T., "Debondings at a Semielliptic Rigid Inclusion on the Rim of a Half Plane," J. Appl. Mech., Vol.55, (1988) pp.574-579.
- (5) Hasebe, N., "Uniform Tension of a Semi-Infinite Plate with a Crack at an End of a Stiffened Edge "Ingenieur Archiv 48, (1979) pp.129-141.
- (6) Hasebe, N. and Inohara, S., "Stress Analysis of a Semi-Infinite Plate with an Oblique Edge Crack," Ingenieur Archiv 49, (1980) pp.51-62.
- (7) Hasebe, N., Nakamura, T. and Ito, Y., "Analysis of the Second Mixed Boundary Value Problem for a Thin Plate " J. Appl. Mech., Vol.61, (1994) pp.555-559.
- (8) Savin, G. N., "Stress Concentration around Hole " Pergamon Press Oxford England. (1961)
- (9) Muskhelishvili, N. I., "Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity," 4th ed., Noordhoff, The Netherlands. (1963)
- (10) Hasebe, N., Tsutsui, S. and Nakamura, T., "A mixed boundary value problem for debonding of a semielliptic rigid inclusion on the rim of a half plane," Archive of Appl. Mech. 62, (1992) pp.306-315.
- (11) 長谷部, 三角形切欠きおよび突起を有する半無限板の応力解析, 土木学会論文集報告集, 194, (1971), pp.29-40.
- (12) Hasebe, N., Sugimoto, T. and Nakamura, T., "Stress Concentration in Clamped Edge of Thin Plate," J. Engrg. Mech., Vol.112, No.7, (1986) pp.642-653.
- (13) Hasebe, N., and Kutanda, Y., "Calculation of Stress Intensity, Factor from Stress Concentration Factor," Engrg. Frac. Mech., 10, (1978) pp.215-221.
- (14) Sih, G. C., Paris, P. C. and Erdogan, F., "rack-tip stress intensity factors for plate extension and plate bending problems," Appl. Mech., Vol.29, (1962) pp.306-312.
- (15) Hasebe, N. and Salama, M., "Thin plate Bending Problem of Partially Bounded Bi-material Strips", Archive of App. Mech., 64., (1994), pp.424-434.