TiNi 繊維含有インテリジェントマテリアルの き裂閉鎖機構のマイクロメカニクス解析*

(第 1 報, き裂閉鎖機構のモデル化と応力拡大係数の解析)

小野 裕之^{*1}, 荒木 栄敏^{*2}, 齋藤 憲司^{*2}

Micromechanical Analysis of Crack Closure Mechanism for the Intelligent Material Containing TiNi Fibers (1st Report, Modeling of Crack Closure Mechanism and Analysis of the Stress Intensity Factor)

Hiroyuki ONO, Shigetoshi ARAKI^{*3} and Kenji SAITO

^{*3} Kyoto Institute of Technology, Dept. of Mechanical and System Engineering,
Matsugasaki, Sakyo-ku, Kyoto, 606-8585 Japan

Micromechanical modeling of an intelligent material containing TiNi fibers is performed by taking into consideration of the existence of crack bridging fibers with transformation strain which corresponds to the total amount of shrinkage of the fiber. In modeling, thermal expansion strain due to the mismatch of thermal expansion coefficients between TiNi fiber and matrix is also considered. The stress and strain fields in the matrix, fibers, and fictitious eigenstrain in cracks can be found, hence, the total potential energy of the model will be derived from these fields. By using the total potential energy, the stress intensity factor at the tip of crack in the material will be expressed successfully in terms of the transformation strain of fibers and the thermal expansion strain occurred in the material.

Key Words: Micromechanics, Eigenstrain, Intelligent Material, TiNi Shape Memory Alloy, Crack Closure, Stress Intensity Factor

1. 緒 言

センサ機能(外界からの情報検知), アクチュエータ機能(材料側の機能発現)およびこれら二つの機能を併せ持った自己制御機能を有する材料であると言われていたインテリジェントマテリアルは, 機械, 金属工学分野から生体, 医療分野に至るまでの種々の分野において現在検討されている⁽¹⁾. この中で材料の力学的性質に関するものとして, センサ機能については, 圧電素子や光ファイバを材料中に埋め込み, 材料の変形や損傷を検出することなどが検討されており, アクチュエータ機能については熱弾性形マルテンサイト変態することによって剛性が変化するという形状記憶合金の特性を利用して材料の制振特性を自在に制御しようとする試みがなされている. また, 酸化ジルコニアや形状記憶合金の応力誘起マルテンサイト変態によって生じるゾーンウェイクによるき裂の自己閉鎖作用についても, インテリジェント化という観点から検討されている⁽²⁾⁽³⁾. さらに, より積極的に形状記憶合金の形状

記憶効果を利用することによってき裂を閉鎖させようとする試みもなされている. 例えば島本ら⁽⁴⁾⁽⁵⁾は, 繊維の長手方向に引張変形を与えて形状記憶処理した TiNi 形状記憶合金繊維をエポキシ母材に埋め込み, これを加熱することによって繊維を収縮させ, 光弾性じまを実験観察することによってき裂先端の応力拡大係数が減少することを報告している.

TiNi 合金を用いたインテリジェントマテリアルの解析としては, 球形の TiNi 粒子を扁平あるいは扁平だ円体に変形させて形状記憶処理したものを Al 母材に埋め込んだ材料に対する Yamada らの等価介在物法による解析⁽⁶⁾がある. これは, 材料中に生じる平均残留応力や材料の降伏応力が TiNi 粒子の形状を元の球形に回復させる場合の粒子に与える予ひずみの大きさやその含有率によってどのように変化するか求めたものである. Taya ら⁽⁷⁾は, TiNi 繊維/Al 材について繊維収縮による降伏応力の増加についても解析しており, 得られた結果が実験結果と良く一致することを確認している. これらの解析は, いずれも TiNi 合金の形状記憶効果による形状回復によって生じる場を介在物による固有場の問題として取扱ったものであり, 材料の微細構造を考慮できるマイクロメカニクスの手法が, インテリジェントマテリアルの解析にも極め

* 原稿受付 2000 年 1 月 4 日.

^{*1} 正員, 京都工芸繊維大学大学院.

^{*2} 正員, 京都工芸繊維大学工学部 (☎ 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町).

て有効であることを示したものである。Taya らの解析⁽⁷⁾は TiNi 合金の形状回復前の降伏応力と、形状回復のための加熱・冷却過程とをたどった後の降伏応力との違いを論じたものであるが、これらの温度過程においては TiNi 合金の弾性係数がかなり減少することが報告⁽⁸⁾されており、弾性係数の大きさに依存する力学特性、例えばき裂閉鎖による応力拡大係数の変化などを論じる際にはこの温度過程も考慮しなければならない。

そこで本研究では、TiNi 繊維含有インテリジェントマテリアルを取り上げ、TiNi 繊維の形状回復のための温度過程を考慮した等価介在物モデルを検討する。モデル化に際しては、あらかじめ繊維の長手方向に引張変態ひずみが与えられた TiNi 繊維が母材中のき裂を架橋している状態を想定するとともに、加熱によって生じる繊維の収縮を固有ひずみを用いて表す。さらに、この加熱過程において、繊維と母材の熱伝導率や線膨張係数の違いによって材料中に生じる熱膨張ひずみを考慮する。得られたモデルを解析することによって母材、繊維およびき裂の応力場とひずみ場を求めるとともに、系の全ポテンシャルエネルギーを定式化する。さらに、得られた結果を用いて繊維の収縮によるき裂の閉鎖を表すき裂の応力拡大係数を繊維の変態ひずみや熱膨張ひずみの関数として定式化することを目的とする。

2. TiNi 繊維含有インテリジェントマテリアルのモデル化と解析

2.1 形状記憶合金の形状記憶効果 図1(a)はマルテンサイト変態終了点 M_f 以下の温度で、マルテンサイト相になっている形状記憶合金を示したものである。温度を保持したままこれに変形を加えた状態が図1(b)である。このような処理は形状記憶処理と呼ばれている。形状記憶処理を行った図1(b)の合金を加熱すると、オーステナイト逆変態開始点 A_s でオーステナイト相への逆変態が生じ始め、その後加えた変

形が回復し、図1(c)に示すようにオーステナイト逆変態終了点 A_f に達したときには完全に元の形状に戻る。これを冷却し、最初の温度に戻しても形は変わらない。このような現象は形状記憶効果⁽¹⁾と呼ばれており、また、図1(b)で与えたひずみは変態ひずみと呼ばれている。

2.2 介在物を用いた TiNi 繊維のモデル化 長手方向に引張変態ひずみ ϵ^T を与えて形状記憶処理した TiNi 繊維を母材に埋め込んだ複合材料を考える。これを加熱すると材料中の繊維は収縮する。このときの繊維のひずみ ϵ^{*T} は周囲の母材による拘束がない場合には $\epsilon^{*T} = -\epsilon^T$ となるが、実際には拘束があるため、繊維には引張、母材には圧縮の残留応力が生じることになる。このような残留応力は繊維に収縮ひずみ ϵ^{*T} を固有ひずみとして与えたときの固有応力にほかならない。

引張変態ひずみは塑性ひずみであるため、これによる繊維の体積変化は生じない。繊維の長手方向を x_3 方向に取り、 x_1 - x_2 面内で繊維形状が対称であるとする、 x_1 および x_2 方向の変態ひずみは $\epsilon_{11}^T = \epsilon_{22}^T = -\epsilon_{33}^T/2$ となる。したがって、この変態ひずみが回復して生じる x_1, x_2 方向の収縮ひずみ(固有ひずみ)についても、

$$\epsilon_{11}^{*T} = \epsilon_{22}^{*T} = -\epsilon_{33}^{*T}/2 \dots\dots\dots (1)$$

なる関係となる。この ϵ_{ij}^{*T} は引張変態ひずみ ϵ_{ij}^T が加熱によって回復して生じるひずみであるため、温度の関数となるが、この関係については後述する。

繊維を収縮させるためには材料を加熱する必要があるが、この際、一般的に繊維と母材の熱伝導率や線膨張係数は異なるため、結果として材料中には熱膨張ひずみが生じる。繊維を母材に埋め込んだときの熱膨張ひずみは零であり、このときの温度を基準温度 T_r とする。加熱後の繊維の温度と母材の温度をそれぞれ T_f, T_m とすると、母材の熱膨張を基準としたときの繊維の熱膨張は、

$$\epsilon_{ij}^{*L} = \delta_{ij} \{ \alpha^f (T_f - T_r) - \alpha (T_m - T_r) \} \dots\dots\dots (2)$$

で与えられる。ここで α^f と α はそれぞれ繊維と母材の線膨張係数であり、 δ_{ij} は Kronecker のデルタである。繊維は実際には周囲の母材の拘束によって自由に膨張できないため、材料内には熱応力が生じることになる。この熱応力は繊維に式(2)の熱膨張ひずみ ϵ_{ij}^{*L} を固有ひずみとして与えたときの固有応力となる。

2.3 TiNi 繊維含有インテリジェントマテリアルの幾何学的モデル化 図2は、繊維の長手方向に引張変態ひずみを与えて形状記憶処理した TiNi 繊維を一方方向に多数配列して母材中に埋め込んだインテリジェ

Fig.1 Shape memory effect of shape memory alloy

ントマテリアルの模式図である。図中の斜線部は TiNi 繊維を示す。また、母材は樹脂系材料を想定する。このインテリジェントマテリアルに対して、繊維の長手方向に応力 σ^o を負荷すると、母材の破断ひずみが TiNi 繊維のそれよりも小さい場合には母材中にき裂が生じることになる。このき裂が進展して繊維の間隔より大きくなったときには、図2のように繊維がき裂を架橋するき裂架橋領域が生じることになる。このような状態から材料を加熱することによって繊維を収縮させることでき裂を閉鎖することができる。

図2の状態を図3に示すように幾何学的にモデル化する。図中の斜線部で示した繊維領域は半径 r の円柱とする。作用応力 σ_{33}^o は繊維の長手方向にのみ作用するものとし、この方向を x_3 方向に取る。また、き裂領域 Ω_c の形状は半径 a 、厚さ $2c$ のペニー形とし、き裂面は作用応力の方向に垂直であるとする。き裂架橋領域 Ω_d は繊維とき裂とが重なり合う領域であり、その形状を近似的に半径 r 、厚さ $2c$ のペニー形とする。材料中には多数のき裂が存在し、これゆえにき裂架橋領域も多数存在する状態を想定する。今、繊維の体積含有率を f とおき、き裂の含有率をこれまでの解析と同様にき裂密度 ρ に取ると、き裂架橋領域の含有率は近似的に ρf で与えられる⁽⁹⁾。

2・4 繊維の等価式 前述したように、繊維は収縮ひずみ ε_{ij}^{*T} と熱膨張ひずみ ε_{ij}^{*L} とを固有ひずみとして有する不均質介在物と見なすことができる。繊維の等価式は次式となる。

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^o + \bar{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}^{\infty}(\Omega_f) \\ = C_{ijkl}^f \{ \varepsilon_{kl}^o + \bar{\varepsilon}_{kl} + S_{klmn}^f (\varepsilon_{mn}^{*T} + \varepsilon_{mn}^{*L} + \varepsilon_{mn}^{*f}) \} \end{aligned}$$

Fig. 2 The typical picture of the intelligent material containing TiNi fibers

$$\begin{aligned} & -(\varepsilon_{kl}^{*T} + \varepsilon_{kl}^{*L}) \} \\ & = C_{ijkl}^f \{ \varepsilon_{kl}^o + \bar{\varepsilon}_{kl} + S_{klmn}^f (\varepsilon_{mn}^{*T} + \varepsilon_{mn}^{*L} + \varepsilon_{mn}^{*f}) \\ & - (\varepsilon_{kl}^{*T} + \varepsilon_{kl}^{*L} + \varepsilon_{kl}^{*f}) \} \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

ここで ε_{ij}^{*f} は繊維の等価固有ひずみであり、

C_{ijkl}^f, C_{ijkl} : 繊維と母材の弾性定数

$\sigma_{ij}^o, \varepsilon_{ij}^o$: 作用応力と作用ひずみ

$\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\varepsilon}_{ij}$: 相互作用応力と相互作用ひずみ

$\sigma_{ij}^{\infty}(\Omega_f), S_{ijkl}^f$: 繊維の固有応力と繊維の Eshelby テンソル

である。また、作用応力 σ_{ij}^o と作用ひずみ ε_{ij}^o および相互作用応力 $\bar{\sigma}_{ij}$ と相互作用ひずみ $\bar{\varepsilon}_{ij}$ の間には、

$$\sigma_{ij}^o = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^o, \quad \bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \bar{\varepsilon}_{kl} \dots \dots \dots (4)$$

なる関係がある。等価式(3)に繊維の Eshelby テンソル⁽¹⁰⁾を代入するとともに、 x_1, x_2 方向に関する対称性を考慮して整理すると、

$$\begin{aligned} C_{11} \varepsilon_{11}^{*f} + C_{12} \varepsilon_{33}^{*f} &= -2D_1(\varepsilon_{11}^o + \bar{\varepsilon}_{11}) - (\varepsilon_{33}^o + \bar{\varepsilon}_{33}) \\ &+ C_{13} \varepsilon_{33}^{*T} + C_{14} \varepsilon_{33}^{*L} \dots \dots \dots (5 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{31} \varepsilon_{11}^{*f} + C_{32} \varepsilon_{33}^{*f} &= -2(\varepsilon_{11}^o + \bar{\varepsilon}_{11}) - D_3(\varepsilon_{33}^o + \bar{\varepsilon}_{33}) \\ &+ C_{33} \varepsilon_{33}^{*T} + C_{34} \varepsilon_{33}^{*L} \dots \dots \dots (5 \cdot b) \end{aligned}$$

となる。ここで C_{ij} と D_i は繊維と母材の弾性定数のみの関数である。式(5)に式(4)を代入し、繊維の等価固有ひずみ ε_{ij}^{*f} に関して解くと、

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{*f} &= \frac{1}{A} \left\{ B_{11} \bar{\varepsilon}_{11} + B_{12} \bar{\varepsilon}_{33} + (B_{12} - \nu B_{11}) \frac{\sigma_{33}^o}{E} \right. \\ &\left. + \left(B_{14} + \frac{A}{2} \right) \varepsilon_{33}^{*T} + (B_{15} - A) \varepsilon_{33}^{*L} \right\} \dots \dots (6 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{33}^{*f} &= \frac{1}{A} \left\{ B_{31} \bar{\varepsilon}_{11} + B_{32} \bar{\varepsilon}_{33} + (B_{32} - \nu B_{31}) \frac{\sigma_{33}^o}{E} \right. \\ &\left. + (B_{34} - A) \varepsilon_{33}^{*T} + (B_{35} - A) \varepsilon_{33}^{*L} \right\} \dots \dots (6 \cdot b) \end{aligned}$$

Fig. 3 Modeling of the intelligent material containing TiNi fibers

を得る。ここで E と ν は母材の縦弾性係数とポアソン比であり、 A と B_{ij} は C_{ij} と D_i の関数である。また、等価式(3)と式(4)より繊維の固有応力 $\sigma_{ij}^*(\Omega_f)$ は、

$$\sigma_{ij}^*(\Omega_f) = C_{ijkl} \{ S_{lmn}^f (\varepsilon_{mn}^{*T} + \varepsilon_{mn}^{*L} + \varepsilon_{mn}^{*f}) - (\varepsilon_{kl}^{*T} + \varepsilon_{kl}^{*L} + \varepsilon_{kl}^{*f}) \} \dots\dots\dots (7)$$

となるため、上式に式(6)を代入すると、

$$\frac{\sigma_{11}^*(\Omega_f)}{\mu} = F_{11} \tilde{\varepsilon}_{11} + F_{12} \tilde{\varepsilon}_{33} + \frac{F_{13} \sigma_{33}^0}{E} + F_{14} \varepsilon_{33}^{*T} + F_{15} \varepsilon_{33}^{*L} \dots\dots\dots (8 \cdot a)$$

$$\frac{\sigma_{33}^*(\Omega_f)}{\mu} = F_{31} \tilde{\varepsilon}_{11} + F_{32} \tilde{\varepsilon}_{33} + \frac{F_{33} \sigma_{33}^0}{E} + F_{34} \varepsilon_{33}^{*T} + F_{35} \varepsilon_{33}^{*L} \dots\dots\dots (8 \cdot b)$$

を得る。ここで μ は母材のせん断弾性係数であり、 F_{ij} は A, B_{ij} と弾性定数の関数である。

2・5 き裂とき裂架橋領域の固有ひずみと固有応力

き裂面は x_3 方向に開口するため、き裂 Ω_c ととき裂架橋領域 Ω_d に与える固有ひずみは 33 成分のみで良く、

$$\Omega_c \text{ 中: } \varepsilon_{33}^{*c} \dots\dots\dots (9 \cdot a)$$

$$\Omega_d \text{ 中: } \varepsilon_{33}^{*d} = -(1 - \alpha^d) \varepsilon_{33}^{*c}, \quad 0 \leq \alpha^d < 1 \dots\dots\dots (9 \cdot b)$$

とおく。 Ω_d は Ω_c 内にあるので、 Ω_d 内の全固有ひずみはこれらの領域の和で与えられ、式(9)より $\alpha^d \varepsilon_{33}^{*c}$ となる。各領域の開口量は、式(9)の固有ひずみに領域の厚さ $2c$ を乗じることによって求められる。図4はき裂架橋領域の変形挙動を示したものである。図4(a)は $\alpha^d = 0$ の場合であり、き裂領域は $\Delta u_c = 2c \varepsilon_{33}^{*c}$ だけ開口しているが、き裂架橋領域は完全に閉じてい

(a) $\alpha^d = 0$

(b) $\alpha^d \neq 0$

Fig. 4 Deformation of crack bridging fibers

る状態を示す。一方、図4(b)は $\alpha^d \neq 0$ の場合であり、き裂架橋領域も $\Delta u_d = 2c \alpha^d \varepsilon_{33}^{*c}$ だけ開口している状態を示す。したがって、 α^d を用いてき裂領域とき裂架橋領域の開口量が異なるという状態を表すことができる。き裂領域の固有応力 $\sigma_{ij}^*(\Omega_c)$ は、式(9・a)の固有ひずみを用いて、

$$\sigma_{11}^*(\Omega_c) = -\frac{(1+2\nu)\pi\mu}{4(1-\nu)} \frac{c}{a} \varepsilon_{33}^{*c} \dots\dots\dots (10 \cdot a)$$

$$\sigma_{33}^*(\Omega_c) = -\frac{\pi\mu}{2(1-\nu)} \frac{c}{a} \varepsilon_{33}^{*c} \dots\dots\dots (10 \cdot b)$$

で与えられる⁽¹¹⁾。また、き裂架橋領域はき裂と同じペニー形であり、固有ひずみ $-(1 - \alpha^d) \varepsilon_{33}^{*c}$ を有する介在物であるので、式(10)を参照することによって固有応力 $\sigma_{ij}^*(\Omega_d)$ は次式で与えられる。

$$\sigma_{11}^*(\Omega_d) = -\frac{(1+2\nu)\pi\mu}{4(1-\nu)} \frac{c}{r} (1 - \alpha^d) \varepsilon_{33}^{*c} \dots\dots\dots (11 \cdot a)$$

$$\sigma_{33}^*(\Omega_d) = -\frac{\pi\mu}{2(1-\nu)} \frac{c}{r} (1 - \alpha^d) \varepsilon_{33}^{*c} \dots\dots\dots (11 \cdot b)$$

2・6 内部応力の和の条件とき裂面の条件

内部応力 σ_{ij} は、弾性定数や内部応力源にかかわらず物体 D 内で

$$\int_D \sigma_{ij} dD = 0 \dots\dots\dots (12)$$

なる条件を満足しなければならない。 Ω_n 領域の全内部応力を $\sigma_{ij}^{\text{inter}}(\Omega_n)$ と表すことにすると、各領域の全内部応力は、

$$\sigma_{ij}^{\text{inter}}(\Omega_f - \Omega_d) = \sigma_{ij}^*(\Omega_f) + \bar{\sigma}_{ij} \dots\dots\dots (13 \cdot a)$$

$$\sigma_{ij}^{\text{inter}}(\Omega_c - \Omega_d) = \sigma_{ij}^*(\Omega_c) + \bar{\sigma}_{ij} \dots\dots\dots (13 \cdot b)$$

$$\sigma_{ij}^{\text{inter}}(\Omega_d) = \sigma_{ij}^*(\Omega_d) + \sigma_{ij}^*(\Omega_c) + \sigma_{ij}^*(\Omega_f) + \bar{\sigma}_{ij} \dots\dots\dots (13 \cdot c)$$

$$\sigma_{ij}^{\text{inter}}(M) = \bar{\sigma}_{ij} \dots\dots\dots (13 \cdot d)$$

となる。ここで M は母材領域を表す。内部応力の和の条件式(12)に式(13)を代入し、各領域の含有率を考慮して積分すると、相互作用応力 $\bar{\sigma}_{ij}$ は、

$$\bar{\sigma}_{ij} = -[f \sigma_{ij}^*(\Omega_f) + \rho \{ \sigma_{ij}^*(\Omega_c) + f \sigma_{ij}^*(\Omega_d) \}] \dots\dots\dots (14)$$

となる。また、き裂面上では、き裂面の応力フリー条件

$$\sigma_{33}^{\text{inter}}(\Omega_c - \Omega_d) + \sigma_{33}^0 = \sigma_{33}^*(\Omega_c) + \bar{\sigma}_{33} + \sigma_{33}^0 = 0 \dots\dots\dots (15)$$

が満足されなければならない。式(15)に式(10)、式(14)および式(11)を代入して整理すると、

$$\varepsilon_{33}^{*c} = \frac{2(1-\nu)}{\pi\mu} \frac{a}{c} \frac{\{ \sigma_{33}^0 - f \sigma_{33}^*(\Omega_f) \}}{\phi} \dots\dots\dots (16)$$

$$\phi = 1 - \rho + (a/r)(1 - \alpha^d) \rho f \dots\dots\dots (17)$$

を得る。さらに式(14)に式(8)、(10)、(11)および式(16)を代入し式(4)を用いると、相互作用ひずみ $\tilde{\varepsilon}_{ij}$

は,

$$\tilde{\varepsilon}_{11} = \frac{1}{L} \left(K_{11} \frac{\sigma_{33}^0}{\mu} + K_{12} \varepsilon_{33}^{*T} + K_{13} \varepsilon_{33}^{*L} \right) \quad \cdots (18 \cdot a)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{33} = \frac{1}{L} \left(K_{31} \frac{\sigma_{33}^0}{\mu} + K_{32} \varepsilon_{33}^{*T} + K_{33} \varepsilon_{33}^{*L} \right) \quad \cdots (18 \cdot b)$$

$$L = R_4 + f R_5 \frac{1}{\phi} \quad \cdots (19 \cdot a)$$

$$K_{11} = -(1+\nu) + \nu R_8 + \frac{R_2}{\phi},$$

$$K_{31} = -2(1+\nu) - R_8 - \frac{R_3}{\phi} \quad \cdots (19 \cdot b)$$

$$K_{1i} = \frac{f}{\phi} \{ f(F_{12} F_{3(i+2)} - F_{1(i+2)} F_{32}) - (1+\nu) F_{3(i+2)} \} \\ - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} f M_{(i+2)}, \quad (i=2, 3) \quad \cdots (19 \cdot c)$$

$$K_{3i} = -\frac{f}{\phi} \{ f(F_{11} F_{3(i+2)} - F_{1(i+2)} F_{31}) \\ + 2(1+\nu) F_{3(i+2)} \} + \frac{4\nu}{1-2\nu} f M_{(i+2)}, \quad (i=2, 3) \\ \cdots (19 \cdot d)$$

$$M_i = F_{1i} - \frac{1+2\nu}{2} F_{3i}, \quad (i=1, 2, 4, 5) \quad \cdots (19 \cdot e)$$

となる。ここで R_i は ϕ を含まない係数である。式(18)を式(6)と式(8)に代入すると、繊維の等価固有ひずみ ε_{ij}^{*f} と固有応力 $\sigma_{ij}^0(\Omega_f)$ は、それぞれ、

$$\varepsilon_{11}^{*f} = Q_{11} \frac{\sigma_{33}^0}{\mu} + \left(Q_{12} + \frac{1}{2} \right) \varepsilon_{33}^{*T} + (Q_{13} - 1) \varepsilon_{33}^{*L} \quad \cdots (20 \cdot a)$$

$$\varepsilon_{33}^{*f} = Q_{31} \frac{\sigma_{33}^0}{\mu} + (Q_{32} - 1) \varepsilon_{33}^{*T} + (Q_{33} - 1) \varepsilon_{33}^{*L} \quad \cdots (20 \cdot b)$$

$$\frac{\sigma_{11}^0(\Omega_f)}{\mu} = T_{11} \frac{\sigma_{33}^0}{\mu} + T_{12} \varepsilon_{33}^{*T} + T_{13} \varepsilon_{33}^{*L} \quad \cdots (21 \cdot a)$$

$$\frac{\sigma_{33}^0(\Omega_f)}{\mu} = T_{31} \frac{\sigma_{33}^0}{\mu} + T_{32} \varepsilon_{33}^{*T} + T_{33} \varepsilon_{33}^{*L} \quad \cdots (21 \cdot b)$$

となる。ここで Q_{ij} と T_{ij} は L と K_{ij} の関数である。式(16)に式(21)を代入すると、き裂の固有ひずみ ε_{33}^{*c} は、

$$\varepsilon_{33}^{*c} = \frac{2(1-\nu)}{\pi\mu} \frac{a}{c} \xi \sigma_{33}^0 \quad \cdots (22)$$

$$\xi = \frac{1-fF_3}{\phi} \quad \cdots (23)$$

となる。ここで F_3 は T_{ij} の関数である。

2.7 繊維および母材領域の全応力と全ひずみ

繊維領域と母材領域の全応力をそれぞれ $\sigma_{ij}^{\text{total}}(\Omega_f - \Omega_d)$, $\sigma_{ij}^{\text{total}}(M)$ と表すと、式(13)より、

$$\sigma_{ij}^{\text{total}}(\Omega_f - \Omega_d) = \sigma_{ij}^{\text{inter}}(\Omega_f - \Omega_d) + \sigma_{ij}^0 \\ = \sigma_{ij}^{\infty}(\Omega_f) + \bar{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}^0 \quad \cdots (24 \cdot a)$$

$$\sigma_{ij}^{\text{total}}(M) = \sigma_{ij}^{\text{inter}}(M) + \sigma_{ij}^0 = \bar{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}^0 \quad \cdots (24 \cdot b)$$

となる。上式に式(14)を代入した後に各領域の固有応力をさらに代入して整理すると全応力が求められる。特に繊維の長手方向(x_3 方向)についてその結果を示すと、

$$\frac{\sigma_{33}^{\text{total}}(\Omega_f - \Omega_d)}{\sigma_{33}^0} = \frac{1+\xi(f-\phi)}{f}, \quad \frac{\sigma_{33}^{\text{total}}(M)}{\sigma_{33}^0} = \xi \quad \cdots (25)$$

となり、また、繊維領域の全ひずみは、

$$\varepsilon_{33}^{\text{total}}(\Omega_f - \Omega_d) \\ = \frac{\sigma_{33}^{\text{total}}(\Omega_f - \Omega_d) - 2\nu^f \sigma_{11}^{\text{total}}(\Omega_f - \Omega_d)}{E^f} \\ + \varepsilon_{33}^{*T} + \varepsilon_{33}^{*L} \\ = (J_2 \phi + J_3) / \phi_0 \quad \cdots (26)$$

$$\phi_0 = R_4 \phi + f R_5 \quad \cdots (27)$$

となる。ここで E^f と ν^f はそれぞれ繊維の縦弾性係数とポアソン比であり、 J_i は ϕ を含まない係数である。

2.8 界面はく離挙動のモデル化と解析

TiNi 繊維を収縮させる方法としては、繊維を直接通電加熱する方法と材料全体を加熱する方法とが用いられている。母材としてエポキシを用いた場合には、繊維を直接通電加熱すると繊維のみが発熱するため、繊維-母材間界面近傍にある母材が熱により変質し、界面のはく離が生じやすくなるという問題が指摘されている。

(a) Not debonding (b) Debonding

Fig. 5 Behavior of interfacial debonding

(a) Crack closing (b) Crack opening

Fig. 6 Modeling of interfacial debonding

る⁽¹²⁾。これは、材料全体を加熱することによってある程度避けることができるが、母材と繊維の熱伝導率の違いによって繊維と母材との間で温度差が生じることは避け難く、程度の差はあるもののいずれにしても界面のはく離が生じるものと思われる。したがって、本解析では界面はく離挙動も考慮することにする。図5は界面はく離挙動を模式的に示したものである。図5(a)は斜線で示した繊維がき裂を完全に架橋している状態を表し、図5(b)ははく離 δ が生じることによって図中のA領域で応力が緩和し、き裂架橋領域が Δu_d だけ開口した状態を表している。図6は図5をモデル化したものである。図6(a)に示すように、き裂面とはく離面が分離してはいるが開口していない状態を考える。A領域は図5(b)におけるA領域に相当し、またB領域は繊維領域を表している。これに外力が作用すると、B領域は Δu_d だけ伸張する。この状態が図6(b)に示した状態であり、図5(b)におけるA領域の応力が近似的に零であるとした場合と等

価であると考えることができる。今、B領域の全ひずみは近似的に式(26)で与えられる繊維の全ひずみ $\epsilon_{33}^{\text{total}}(\Omega_f - \Omega_d)$ に等しいとおくと、

$$\frac{\Delta u_d}{2\delta} = \epsilon_{33}^{\text{total}}(\Omega_f - \Omega_d) \quad \dots\dots\dots (28)$$

なる関係を得る。き裂架橋領域の開口量 Δu_d とき裂の固有ひずみ ϵ_{33}^{*c} との間には、

$$\Delta u_d = 2c\alpha^d \epsilon_{33}^{*c} \quad \dots\dots\dots (29)$$

なる関係があるため、式(28)に式(26)と式(29)を代入すると α^d が求められ、次式となる。

$$\alpha^d = 1 - \kappa_a \frac{r}{a} \quad \dots\dots\dots (30)$$

3. き裂のエネルギー解放率と 応力拡大係数

3.1 系の全ポテンシャルエネルギー 外力が一定の場合、本モデルの全ポテンシャルエネルギーの変化量 F は外部表面力を F_i とし、表面を S とすると、

$$F = \frac{1}{2} \int_D \{ \sigma_{ij}^o + \tilde{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}^{\text{res}}(\Omega_n) \} (\epsilon_{ij}^o + \tilde{\epsilon}_{ij} + \epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^{*n}) dD - \int_S F_i (u_i^o + \tilde{u}_i + u_i) dS + \frac{1}{2} \int_D \sigma_{ij}^o \epsilon_{ij}^o dD \quad \dots\dots\dots (31)$$

で与えられる。ここで $\sigma_{ij}^{\text{res}}(\Omega_n)$ と ϵ_{ij}^{*n} はそれぞれ Ω_n 介在物の固有応力と固有ひずみであり、 ϵ_{ij} はひずみ乱れである。また、 $u_i^o, \tilde{u}_i, u_i$ はそれぞれ $\epsilon_{ij}^o, \tilde{\epsilon}_{ij}, \epsilon_{ij}$ に対応する変位を示す。式(31)の積分を各介在物領域と母材領域について分離し、各領域の固有ひずみを代入するとともに、応力の釣合条件と境界条件およびき裂面上における応力フリー条件式(15)を用いると、

$$\begin{aligned} F = & -\frac{1}{2} \int_{\Omega_f} \sigma_{ij}^o \epsilon_{ij}^{*f} dD - \int_{\Omega_f} \sigma_{ij}^o (\epsilon_{ij}^{*T} + \epsilon_{ij}^{*L}) dD - \frac{1}{2} \int_{\Omega_f} \{ \tilde{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}^{\text{res}}(\Omega_f) \} (\epsilon_{ij}^{*T} + \epsilon_{ij}^{*L}) dD - \frac{1}{2} \int_{\Omega_c} \sigma_{ij}^o \epsilon_{ij}^{*c} dD \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega_d} \sigma_{ij}^o (1 - \alpha^d) \epsilon_{ij}^{*c} dD - \frac{1}{2} \int_{\Omega_d} \{ \sigma_{ij}^{\text{res}}(\Omega_f) + \sigma_{ij}^{\text{res}}(\Omega_d) \} \alpha^d \epsilon_{ij}^{*c} dD - \frac{1}{2} \int_{\Omega_d} \{ \sigma_{ij}^{\text{res}}(\Omega_c) + \sigma_{ij}^{\text{res}}(\Omega_d) \} (\epsilon_{ij}^{*T} + \epsilon_{ij}^{*L}) dD \\ & \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

となる。さらに、2章で求めた各領域の固有応力と相互作用応力とを代入して積分すると、 F は、

$$\begin{aligned} \frac{F}{V_D} = & - \left[\frac{f}{AL\phi} \{ (1 + fe_0)(S_2 - S_1\phi) - fS_3e_1 \} + \frac{2(1-\nu)}{\pi} \rho \xi \eta + \frac{fe_2}{A} \right] \frac{(\sigma_{33}^o)^2}{2\mu} \\ & - \frac{f(1+2\nu)\sigma_{33}^o}{4} \left\{ \frac{(1+fe_0)(R_{11} - R_6\phi) - fR_{12}e_1}{L\phi} + e_1 \right\} (2\epsilon_{33}^{*L} - \epsilon_{33}^{*T}) - \frac{\sigma_{33}^o}{2} \left\{ \frac{(R_1 + fR_0)(f-\phi)}{L\phi} + 1 \right\} (\epsilon_{33}^{*T} + \epsilon_{33}^{*L}) \\ & \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

$$\eta = 1 - f + f\alpha^d \left\{ 1 + \frac{a}{r} (1 - \alpha^d) \xi + F_3 \right\} \quad \dots\dots\dots (34)$$

となる。ここで V_D は物体の体積、 e_i は ϵ_{33}^{*T} と ϵ_{33}^{*L} を含む係数、 S_i は ϕ を含まない係数である。

3.2 き裂のエネルギー解放率 材料中に存在するペニー形き裂1個当たりのエネルギー解放率 G_a は、

$$G_a = - \frac{\partial F}{\partial (\pi a^2)} \frac{1}{n_c} \quad \dots\dots\dots (35)$$

で与えられる。ここで n_c は材料中に含まれるき裂の全個数である。式(35)に式(33)を代入し、整理すると、

$$G_a = \frac{a}{r} G_r \zeta_a \quad \dots\dots\dots (36)$$

となる。ここで G_r は繊維を含まない母材中に半径 r のペニー形き裂が1個だけ存在する場合のエネルギー解放率であり、

$$G_r = \frac{2(1-2\nu)}{\pi\mu} (\sigma_{33}^0)^2 r \quad \dots\dots\dots (37)$$

で与えられる。また、 ζ_a は、

$$\begin{aligned} \zeta_a = & -\frac{\pi f}{2(1-\nu)} \frac{S_0}{A\phi_0^2} \phi_a^* + \xi \left[\eta \left(1 - \rho R_4 \frac{\phi_a^*}{\phi_0} \right) \right. \\ & + \frac{f}{3} (1 + \kappa_a \xi + F_3) (\kappa_a - \kappa_a^*) \frac{r}{a} \\ & + f \xi \left(1 - \kappa_a \frac{r}{a} \right) \left\{ \frac{\kappa_a^*}{3} - \rho \xi (R_4 \kappa_a + R_5) \frac{\phi_a^*}{\phi_0} \right\} \Big] \\ & - \frac{\pi f}{2(1-\nu)} \frac{\mu}{\sigma_{33}^0} \xi \left\{ \frac{1+2\nu}{2} R_{12} (2\varepsilon_{33}^{*L} - \varepsilon_{33}^{*T}) \right. \\ & \left. + (R_4 + R_5) (\varepsilon_{33}^{*T} + \varepsilon_{33}^{*L}) \right\} \frac{\phi_a^*}{\phi_0} \quad \dots\dots\dots (38) \end{aligned}$$

である。ここで ϕ_a^* は ϕ の、 κ_a^* は κ_a の a による微分に関する係数を示す。また、式中のき裂密度 ρ はき裂長さ a の関数であるため、 ρ を一定値とした場合に、き裂の進展に伴いき裂の個数が減少することになる。したがって、エネルギー解放率 G_a の計算に際しては、従来の解析と同様に ρ に換わってき裂の個数を与える ρ_n を用いる⁽¹³⁾。

3・3 き裂の応力拡大係数 平面ひずみ状態では、応力拡大係数 K_{Ir} とエネルギー解放率 G_a の関係は、

$$G_a = \frac{1-\nu}{2\mu} K_{Ir}^2 \quad \dots\dots\dots (39)$$

で与えられる。式(39)に式(36)を代入すると、

$$K_{Ir} = \frac{2}{\pi} K_{Ir} \sqrt{\frac{a}{r}} \zeta_a \quad \dots\dots\dots (40)$$

となる。ここで K_{Ir} は G_r に対応する応力拡大係数であり、次式で与えられる。

$$K_{Ir} = \sigma_{33}^0 \sqrt{\pi r} \quad \dots\dots\dots (41)$$

4. TiNi 繊維の収縮ひずみと熱膨張ひずみ

4・1 収縮ひずみ ε_{33}^{*T} と温度との関係 マルテン

Fig. 7 Process of shape memory shrinkage

サイト変態終了点 M_f 以下の温度で TiNi 繊維に引張変態ひずみ ε_{33}^T を与えた後にこれを加熱すると、繊維は指数関数的に収縮することが、林らによって実験的に求められている⁽¹⁴⁾。図7はこれを模式的に示したものであり、図の縦軸は生じる収縮ひずみ ε_{33}^{*T} を ε_{33}^T で除したものであり、横軸は温度 T を表す。図中の A_s はオーステナイト逆変態開始点、 A_f は終了点である。 M_f から A_s までの加熱過程①では繊維は収縮しないため $\varepsilon_{33}^{*T}/\varepsilon_{33}^T = 0$ となる。 A_s から A_f までの加熱過程②においては、引張変態ひずみは温度の増加につれて回復し、収縮ひずみ ε_{33}^{*T} の値は指数関数的に減少する。また A_f では形状が完全に元に戻るから $\varepsilon_{33}^{*T}/\varepsilon_{33}^T = -1$ となる。本研究ではこのような回復挙動を、

$$\frac{\varepsilon_{33}^{*T}}{\varepsilon_{33}^T} = - \left[1 - \frac{\exp \{ (A_f - T)/5 \} - 1}{\exp \{ (A_f - A_s)/5 \} - 1} \right], \quad (A_s \leq T \leq A_f) \quad \dots\dots\dots (42)$$

と近似した。

4・2 熱膨張ひずみ ε_{33}^{*L} 繊維に与える熱膨張ひずみは、式(2)を用いて繊維温度 T_f と母材温度 T_m から求められる。図2に示した材料を、温度一定の恒温槽に入れて材料全体を加熱する状態を考える。このとき、繊維は端面から、母材は周囲からの熱の流入によって加熱され、また、材料内部では繊維-母材間の熱伝導も生じる。この熱伝導を支配する熱物性値は $k/(\rho c)$ であり、 k, c, ρ はそれぞれ熱伝導率、比熱および密度である。TiNi 繊維の $k/(\rho c)$ の値は樹脂系母材のそれよりも 10~100 倍程度大きい⁽¹⁵⁾ ため、繊維温度は母材温度よりも速やかに上昇すると考えられる。したがって、繊維温度 T_f は恒温槽の温度、すなわち環境温度とみなすことができる。また、母材については材料内部の領域を考え、周囲からの熱の流入を無視し、繊維からの熱伝導によってのみ加熱されると考える。このとき、繊維軸に垂直な面内における母材の温度 T_m は、繊維-母材界面では $T_m = T_f$ であるが、界面から離れるにつれて減少するという分布を持つ。

Fig. 8 Modeling of heat conduction

この分布を求めるために、1本の繊維を取り囲む母材領域を考える。繊維含有率が小さい場合には、この母材領域は十分大きいので、これを無限体とみなす。図8はこのモデルであり、図中の斜線部はTiNi繊維の断面であり、その半径を r とする。座標軸の半径方向を R とする。また、 T_m を基準温度 T_r と T_f とを用いて、

$$\theta_m = \frac{T_m - T_r}{T_f - T_r} \dots\dots\dots (43)$$

によって無次元化し、経過時間を t とすると、母材の熱伝導方程式は、

$$\frac{\partial \theta_m}{\partial t} = \frac{k_m}{\rho_m c_m} \left(\frac{\partial^2 \theta_m}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \theta_m}{\partial R} \right) \dots\dots\dots (44)$$

となる。ここで k_m , c_m , ρ_m はそれぞれ母材の熱伝導率、比熱および密度である。初期条件は、 $t=0$ のとき $R=r$ で $\theta_m=1$ 、境界条件は $R \rightarrow \infty$ で θ_m は有限値となる。 θ_m の解は、

$$\theta_m = 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-F_m \lambda^2} \times \frac{J_0\left(\lambda \frac{R}{r}\right) Y_0(\lambda) - Y_0\left(\lambda \frac{R}{r}\right) J_0(\lambda)}{J_0^2(\lambda) + Y_0^2(\lambda)} \frac{d\lambda}{\lambda} \dots\dots\dots (45)$$

で与えられる⁽¹⁶⁾。ここで J_0 と Y_0 はそれぞれ零次の第一種ベッセル関数と第二種ベッセル関数である。また $F_m = k_m t / (\rho_m c_m r^2)$ であり、これは、経過時間を材料の幾何学的寸法と熱物性値によって無次元化した時間である。式(45)より母材温度は R の関数であるが、本研究では図示したように繊維の断面積との比が繊維含有率 f に等しくなるような半径 $R/r = 1/\sqrt{f}$ の円を考え、この周上の温度を母材の温度として用いることにし、これを $T_{m(R_0)}$ と表す。したがって、式(45)より

$$\frac{T_f - T_{m(R_0)}}{T_f - T_r} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-F_m \lambda^2} \times \frac{Y_0\left(\frac{\lambda}{\sqrt{f}}\right) J_0(\lambda) - J_0\left(\frac{\lambda}{\sqrt{f}}\right) Y_0(\lambda)}{J_0^2(\lambda) + Y_0^2(\lambda)} \frac{d\lambda}{\lambda} \dots\dots\dots (46)$$

となる。また、繊維に与える熱膨張ひずみは、

$$\varepsilon_{ij}^{*L} = \delta_{ij} \{ (\alpha^f - \alpha) (T_f - T_r) + \alpha (T_f - T_{m(R_0)}) \} \dots\dots\dots (47)$$

で与えられる。

5. 結 言

本報では、TiNi 繊維含有インテリジェントマテリアルのマイクロメカニクスによるモデル化を検討した。モデル化に際しては、引張変態ひずみを与えたTiNi繊維が母材中のき裂を架橋している状態を想定するとともに、加熱による繊維の収縮を固有ひずみを用いて表し、さらに、この加熱過程において材料中に生じる熱膨張ひずみを考慮した。得られたモデルを解析することによって、材料内の応力場、ひずみ場と系の全ポテンシャルエネルギーを求め、これよりき裂の応力拡大係数を定式化した。

次報では、TiNi 繊維含有インテリジェントマテリアルにおける繊維収縮によるき裂の閉鎖作用を明らかにするために、収縮過程における応力拡大係数の数値計算を行う。

なお、本研究の一部に平成11年度文部省科学研究費〔基盤研究(C)、課題番号10650087〕の助成を得たことを付記し、謝意を表する。

文 献

- (1) 日本機械学会編、知的複合材料と知的適応構造物、(1996)、8-55、養賢堂。
- (2) 木村浩二・浅岡照夫・船見国男、機講演、(1996-10)、369-370。
- (3) Claussen, N., *J. Am. Ceram. Soc.*, **59**-1, -2(1976), 49-51。
- (4) 島本聡・田谷稔、機論、**63**-605, A(1997), 26-31。
- (5) 島本聡・古屋泰文・田谷稔、機論、**65**-634, A(1999), 96-100。
- (6) Yamada, Y., Taya, M. and Watanabe, R., *Mater. Trans. JIM.*, **34**-3(1993), 254-260。
- (7) Taya, M., Furuya, Y. and Shibata, S., ほか3名, *Soc. Phot. Inst. Eng.*, 1916(1993), 373-383。
- (8) Pace, N. G. and Saunders, G. A., *Phil. Mag.*, **22**(1970), 73-82。
- (9) 齋藤憲司・岩本正治・荒木栄敏・矢野直義、機論、**58**-548, A(1992), 107-110。
- (10) Mura, T., *Micromechanics of Defects in Solids*, 2nd revised ed., (1987), 74-84, Kluwer Academic Pub.
- (11) 文献(10)の240~241ページ。
- (12) 池辺秀人・梅崎栄作・河原栄次・渡辺寛、機講論、(1995-2), 515-516。
- (13) 荒木栄敏・岩本正治・齋藤憲司、機論、**58**-552, A(1992), 209-215。
- (14) 林萍華・戸伏壽昭・田中喜久昭・伊貝亮、機論、**60**-575, A(1994), 174-181。
- (15) 田中喜久昭・戸伏壽昭・宮崎修一、形状記憶合金の機械的性質、(1993)、1-6、養賢堂。
- (16) Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C., *Conduction of Heat in Solids*, 2nd ed., (1959), 334-341, Oxford University Press。