極低温における表面層にき裂を有するガラス繊維強化プラスチックの特異熱応力*

上田 整^{*1}, 服部 剛士^{*2}, 喜田 義宏^{*1}

Thermal Singular Stresses of Glassfiber Reinforced Plastics With Surface Cracks at Low Temperatures

Sei UEDA^{*3}, Tsuyoshi HATTORI and Yoshihiro KITA

^{*3} Osaka Institute of Technology, 5-16-1, Omiya, Asahi-ku, Osaka, Osaka, 535-8585, Japan

Thermal singular stress problem for the cracked glassfiber reinforced plastics at low temperatures is considered. The layered composite is made of a layer bonded between two layers of different physical properties, and the surface layers contain the cracks normal to the interfaces. Fourier transforms are used to formulate the problem in terms of a singular integral equation. Numerical calculations are carried out for the cases of the embedded and edge cracks, and the thermal stress intensity factors at different temperatures are shown graphically.

Key Words: Stress Intensity Factor, Laminated Constructions, Elasticity, Fracture Mechanics, Glassfiber Reinforced Plastics, Integral Transform, Low Temperature

1. 結 言

核融合炉超伝導マグネットなどの極低温構造機器の電氣的熱的絶縁材料, 構造支持材料あるいは浸水防止材料として非金属材料である繊維強化プラスチックの適用が期待されている。特に, ガラス-エポキシ系の織物複合材料 G-10CR, G-11CR は, 極低温用材料としての規格化も行われており, 新材料開発の基準材料として位置付けられている⁽¹⁾。このような複合材料の極低温における破壊挙動の解明は, 核融合炉超伝導マグネットなどの安全性評価上重要な課題である⁽²⁾。

このため, 著者らは, G-10CR の三層複合材料モデルを提案し, 界面に垂直な中央き裂⁽³⁾, 破断層き裂⁽⁴⁾および界面に垂直なき裂と界面き裂から成る T 形き裂⁽⁵⁾を有する複合材料の特異熱応力を解明した。また, 多数のき裂が存在する場合を想定したき裂間相互干渉問題⁽⁶⁾についても検討を加えている。さらに, これらの解析は, 衝撃負荷を受ける場合に拡張され, 動的特異熱応力に及ぼす複合材料の温度および幾何学的形状の影響が明らかにされている⁽⁷⁾⁽⁸⁾。上記解析で対象とした三層複合材料モデルは, 積層板 $[90/0]_s^\theta$ の織り込み角度 θ が零度の場合に相当しており⁽²⁾, 積層板 $[90/0]_s^\theta$

の逆の積層順序である積層板 $[0/90]_s^\theta$ を対象とした極低温破壊力学的挙動の解明も重要である⁽⁹⁾。

本報は, G-10CR 積層板 $[0/90]_s^\theta$ の織り込み角度 θ が零度の場合をモデル化したき裂を有する三層複合材料を対象に, 極低温における複合材料の表面層に存在するき裂先端の特異熱応力を厳密に理論解析したものである。解法は, Fourier 変換法を用いて問題の解を特異積分方程式の解に導いて解く方法によった。特異積分方程式を数値解析し, 内部き裂および縁き裂の熱応力拡大係数に及ぼす材料温度および幾何学的形状の影響をグラフに示し詳細に検討した。

2. 問題の呈示と基礎式

図 1 に示す直角座標系 (x, y, z) において, 織物複合材料である G-10CR 積層板 $[0/90]_s^\theta$ の織り込み角度 θ が零度の場合をモデル化し, $0 \leq x \leq h_1$, $2h_2 - h_1 \leq x \leq 2h_2$, $-\infty < y < \infty$ の領域を占める z 軸方向に繊維強化された直交異方性弾性体 I および $h_1 \leq x \leq 2h_2 - h_1$, $-\infty < y < \infty$ の領域を占める y 軸方向に繊維強化された直交異方性弾性体 II から成る三層複合材料を考える。弾性体 I には長さ $2a_0 = b - a$ ($0 \leq a < b < h_1$) の二次元き裂が, $y = 0$ 面上に $x = h_2$ 面に対称に存在するものとする。物性値温度依存性を有する弾性体 I の縦弾性係数, 横弾性係数, Poisson 比および線膨張係数を $E_{xI}(\Phi)$, $E_{yI}(\Phi)$, $E_{zI}(\Phi)$, $G_{xyI}(\Phi)$, $G_{yzI}(\Phi)$, $G_{zxI}(\Phi)$,

* 原稿受付 2000 年 6 月 2 日。

^{*1} 正員, 大阪工業大学工学部 (☎ 535-8585 大阪市旭区大宮 5-16-1)。

^{*2} 学生員, 大阪工業大学大学院。

E-mail: ueda@med.oit.ac.jp

$\nu_{xyI}(\Phi), \nu_{yzI}(\Phi), \nu_{zxI}(\Phi), \alpha_{xI}(\Phi), \alpha_{yI}(\Phi), \alpha_{zI}(\Phi)$ とする. ここに, Φ は材料温度であり, Poisson 比 $\nu_{xyI}(\Phi)$ は, x 軸方向の垂直応力による x 軸方向の垂直ひずみを $\varepsilon_{xx}^*(\Phi)$, y 軸方向の垂直ひずみを $\varepsilon_{yy}^*(\Phi)$ とすると $\nu_{xyI}(\Phi) = -\varepsilon_{yy}^*(\Phi)/\varepsilon_{xx}^*(\Phi)$ である. 弾性体 II の弾性特性および熱特性は $E_{xII}(\Phi), E_{yII}(\Phi), E_{zII}(\Phi), G_{xyII}(\Phi), G_{yzII}(\Phi), G_{zxII}(\Phi), \nu_{xyII}(\Phi), \nu_{yzII}(\Phi), \nu_{zxII}(\Phi), \alpha_{xII}(\Phi), \alpha_{yII}(\Phi), \alpha_{zII}(\Phi)$ であり, 下添字 x, y, z は座標軸方向を, $\delta = I, II$ は弾性体 I, II を表わすものとする.

Fig.1 Composite model with surface cracks.

冷却による熱的負荷 $\Phi - \Phi_s$ が作用する複合材料のき裂先端の特異応力について検討する. ここに, Φ_s は熱ひずみが零である複合材料の作成温度である. 本問題は重ね合わせの原理を用いることにより, 一般化平面ひずみ状態⁽²⁾におけるき裂の無い複合材料の熱応力問題と平面ひずみ状態におけるき裂を有する複合材料の特異熱応力問題に分けて考えることができる. き裂の無い複合材料の熱応力問題は前報⁽³⁾と同様であり, 本報では特異熱応力問題のみを解析する.

x および y 軸方向の変位成分を $u_{x\delta}(x, y), u_{y\delta}(x, y)$ ($\delta = I, II$) とすると, 平面ひずみ状態における応力成分 $\sigma_{xx\delta}(x, y), \sigma_{yy\delta}(x, y), \sigma_{xy\delta}(x, y)$ ($\delta = I, II$) は

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx\delta}(x, y) \\ \sigma_{yy\delta}(x, y) \\ \sigma_{xy\delta}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11\delta}(\Phi) & c_{12\delta}(\Phi) & 0 \\ c_{12\delta}(\Phi) & c_{22\delta}(\Phi) & 0 \\ 0 & 0 & c_{66\delta}(\Phi) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial u_{x\delta}(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial u_{y\delta}(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial u_{x\delta}(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial u_{y\delta}(x, y)}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\delta = I, II) \quad (1)$$

ここに, $c_{11\delta}(\Phi), c_{12\delta}(\Phi), c_{22\delta}(\Phi), c_{66\delta}(\Phi)$ ($\delta = I, II$) は付録 A に示す弾性定数である. また, 直交異方性弾性体の平衡方程式は次式で表わされる.

$$\left. \begin{aligned} c_{11\delta}(\Phi) \frac{\partial^2 u_{x\delta}(x, y)}{\partial x^2} + c_{66\delta}(\Phi) \frac{\partial^2 u_{x\delta}(x, y)}{\partial y^2} + \{c_{12\delta}(\Phi) + c_{66\delta}(\Phi)\} \frac{\partial^2 u_{y\delta}(x, y)}{\partial x \partial y} &= 0 \\ c_{66\delta}(\Phi) \frac{\partial^2 u_{y\delta}(x, y)}{\partial x^2} + c_{22\delta}(\Phi) \frac{\partial^2 u_{y\delta}(x, y)}{\partial y^2} + \{c_{12\delta}(\Phi) + c_{66\delta}(\Phi)\} \frac{\partial^2 u_{x\delta}(x, y)}{\partial x \partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\delta = I, II) \quad (2)$$

$y = 0$ 面および $x = h_2$ 面における対称性を考慮すると, 境界条件式および対称条件式は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{yyI}(x, 0) &= -\sigma_0^T(\Phi) \quad (a < x < b) \\ u_{yI}(x, 0) &= 0 \quad (0 \leq x \leq a, b \leq x \leq h_1) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\sigma_{xyI}(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x \leq h_1) \quad (4)$$

$$\sigma_{xyII}(x, 0) = 0 \quad (h_1 \leq x \leq h_2) \quad (5)$$

$$u_{yII}(x, 0) = 0 \quad (h_1 \leq x \leq h_2) \quad (6)$$

$$\sigma_{xxI}(0, y) = 0 \quad (0 \leq y < \infty) \quad (7)$$

$$\sigma_{xyI}(0, y) = 0 \quad (0 \leq y < \infty) \quad (8)$$

$$\sigma_{xxI}(h_1, y) = \sigma_{xxII}(h_1, y) \quad (0 \leq y < \infty) \quad (9)$$

$$\sigma_{xyI}(h_1, y) = \sigma_{xyII}(h_1, y) \quad (0 \leq y < \infty) \quad (10)$$

$$u_{xI}(h_1, y) = u_{xII}(h_1, y) \quad (0 \leq y < \infty) \quad (11)$$

$$u_{yI}(h_1, y) = u_{yII}(h_1, y) \quad (0 \leq y < \infty) \quad (12)$$

$$\sigma_{xyII}(h_2, y) = 0 \quad (0 \leq y < \infty) \quad (13)$$

$$u_{xII}(h_2, y) = 0 \quad (0 \leq y < \infty) \quad (14)$$

ここに, $\sigma_0^T(\Phi)$ は, 熱的負荷 $\Phi - \Phi_s$ により弾性体 I に作用する y 軸方向の垂直応力であり, 次式により与えられる⁽³⁾.

$$\sigma_0^T(\Phi) = \frac{h_0 - 1}{S_2(\Phi)^2 - S_1(\Phi)S_3(\Phi)} [S_3(\Phi) \times \{\varepsilon_{yII}^T(\Phi) - \varepsilon_{yI}^T(\Phi)\} - S_2(\Phi) \times \{\varepsilon_{zII}^T(\Phi) - \varepsilon_{zI}^T(\Phi)\}] \quad (15)$$

上式中, $h_0 = h_2/h_1$ であり, 定数 $S_1(\Phi), S_2(\Phi), S_3(\Phi)$ および熱ひずみ $\varepsilon_{y\delta}^T(\Phi), \varepsilon_{z\delta}^T(\Phi)$ ($\delta = I, II$) は付録 B に示す.

3. 解 析

$x-y$ 面内において, 弾性体 I は等方性, 弾性体 II は異方性であることを考慮し, 式 (2) に Fourier 変換を

適用すると弾性体 I の変位場が次のように求まる。

$$u_{xI}(x, y) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\{A_1(s) + sx A_2(s) - \kappa A_3(s)\} \right. \\ \times \sinh(sx) + \{A_4(s) + sx A_3(s) - \kappa A_2(s)\} \\ \times \cosh(sx) \Big] \cos(sy) ds \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{1-\kappa}{2} \frac{s}{|s|} + sy \right) \\ \times A_0(s) \exp(-|s|y - isx) ds \quad (16)$$

$$u_{yI}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\{A_1(s) + sx A_2(s)\} \cosh(sx) \right. \\ + \{A_4(s) + sx A_3(s)\} \sinh(sx) \Big] \sin(sy) ds \\ - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{s}{|s|} \left(\frac{1+\kappa}{2} \frac{s}{|s|} + sy \right) \\ \times A_0(s) \exp(-|s|y - isx) ds \quad (17)$$

ここに, $A_j(s)$ ($j = 0 \sim 4$) は境界条件および対称条件から決定される未知関数, $\kappa = 3 - 4\nu_I(\Phi)$ であり, $\nu_I(\Phi)$ は

$$\nu_I(\Phi) = \frac{2c_{66I}(\Phi)}{E_{yI}(\Phi)} \left\{ \frac{\nu_{xyI}(\Phi) E_{yI}(\Phi)}{E_{xI}(\Phi)} + \nu_{xzI}(\Phi) \nu_{yzI}(\Phi) \right\} \quad (18)$$

式 (16), (17) を式 (1) に代入すると, 応力場が次のように求まる。

$$\sigma_{xxI}(x, y) = -\frac{4c_{66I}(\Phi)}{\pi} \int_0^\infty s \left[\{A_1(s) + sx A_2(s) \right. \\ - \frac{1+\kappa}{2} A_3(s)\} \cosh(sx) + \{A_4(s) + sx A_3(s) \\ - \frac{1+\kappa}{2} A_2(s)\} \sinh(sx) \Big] \cos(sy) ds \\ - \frac{c_{66I}(\Phi)i}{\pi} \int_{-\infty}^\infty s \left(sy - \frac{s}{|s|} \right) \\ \times A_0(s) \exp(-|s|y - isx) ds \quad (19)$$

$$\sigma_{yyI}(x, y) = \frac{4c_{66I}(\Phi)}{\pi} \int_0^\infty s \left[\{A_1(s) + sx A_2(s) \right. \\ + \frac{3-\kappa}{2} A_3(s)\} \cosh(sx) + \{A_4(s) + sx A_3(s) \\ + \frac{3-\kappa}{2} A_2(s)\} \sinh(sx) \Big] \cos(sy) ds \\ + \frac{c_{66I}(\Phi)i}{\pi} \int_{-\infty}^\infty s \left(sy + \frac{s}{|s|} \right) \\ \times A_0(s) \exp(-|s|y - isx) ds \quad (20)$$

$$\sigma_{xyI}(x, y) = \frac{4c_{66I}(\Phi)}{\pi} \int_0^\infty s \left[\{A_4(s) + sx A_3(s) \right. \\ + \frac{1-\kappa}{2} A_2(s)\} \cosh(sx) + \{A_1(s) + sx A_2(s) \\ + \frac{1-\kappa}{2} A_3(s)\} \sinh(sx) \Big] \sin(sy) ds$$

$$- \frac{c_{66I}(\Phi)}{\pi} \int_{-\infty}^\infty |s| sy \\ \times A_0(s) \exp(-|s|y - isx) ds \quad (21)$$

同様に, 弾性体 II の変位場と応力場は次式で与えられる。

$$u_{xII}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\{A_5(s) \gamma_1 \exp(s \gamma_1 x) \right. \\ + A_7(s) \gamma_2 \exp(s \gamma_2 x)\} \cos(sy) \\ - \left\{ A_6(s) \cos\left(\frac{sy}{\gamma_1}\right) \right. \\ \left. + A_8(s) \cos\left(\frac{sy}{\gamma_2}\right) \right\} \exp(-sx) \Big] ds \quad (22)$$

$$u_{yII}(x, y) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\{A_5(s) \beta_1 \exp(s \gamma_1 x) \right. \\ + A_7(s) \beta_2 \exp(s \gamma_2 x)\} \sin(sy) \\ + \left\{ A_6(s) \frac{\beta_1}{\gamma_1} \sin\left(\frac{sy}{\gamma_1}\right) \right. \\ \left. + A_8(s) \frac{\beta_2}{\gamma_2} \sin\left(\frac{sy}{\gamma_2}\right) \right\} \exp(-sx) \Big] ds \quad (23)$$

$$\sigma_{xxII}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty s \left[\frac{\delta_1}{\gamma_1^2} \{A_5(s) \gamma_1^2 \exp(s \gamma_1 x) \right. \\ \times \cos(sy) + A_6(s) \exp(-sx) \cos\left(\frac{sy}{\gamma_1}\right)\} \\ + \frac{\delta_2}{\gamma_2^2} \{A_7(s) \gamma_2^2 \exp(s \gamma_2 x) \cos(sy) \\ + A_8(s) \exp(-sx) \cos\left(\frac{sy}{\gamma_2}\right)\} \Big] ds \quad (24)$$

$$\sigma_{yyII}(x, y) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty s \left[\delta_1 \{A_5(s) \gamma_1^2 \exp(s \gamma_1 x) \right. \\ \times \cos(sy) + A_6(s) \exp(-sx) \cos\left(\frac{sy}{\gamma_1}\right)\} \\ + \delta_2 \{A_7(s) \gamma_2^2 \exp(s \gamma_2 x) \cos(sy) \\ + A_8(s) \exp(-sx) \cos\left(\frac{sy}{\gamma_2}\right)\} \Big] ds \quad (25)$$

$$\sigma_{xyII}(x, y) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty s \left[\frac{\delta_1}{\gamma_1} \{A_5(s) \gamma_1^2 \exp(s \gamma_1 x) \right. \\ \times \sin(sy) - A_6(s) \exp(-sx) \sin\left(\frac{sy}{\gamma_1}\right)\} \\ + \frac{\delta_2}{\gamma_2} \{A_7(s) \gamma_2^2 \exp(s \gamma_2 x) \sin(sy) \\ - A_8(s) \exp(-sx) \sin\left(\frac{sy}{\gamma_2}\right)\} \Big] ds \quad (26)$$

ここに, $A_j(s)$ ($j = 5 \sim 8$) は未知関数, $\delta_k = (1 + \beta_k) c_{66II}(\Phi)$ ($k = 1, 2$) であり, γ_k^2 ($k = 1, 2$) は次の特性方程式の 2 根である。

$$c_{11II}(\Phi)c_{66II}(\Phi)\gamma^4 + \{c_{12II}(\Phi)^2 + 2c_{12II}(\Phi)c_{66II}(\Phi) - c_{11II}(\Phi)c_{22II}(\Phi)\}\gamma^2 + c_{22II}(\Phi)c_{66II}(\Phi) = 0 \quad (27)$$

また, β_k ($k = 1, 2$) は次式より求まる.

$$\beta_k = \frac{c_{11II}(\Phi)\gamma_k^2 - c_{66II}(\Phi)}{c_{12II}(\Phi) + c_{66II}(\Phi)} \quad (k = 1, 2) \quad (28)$$

これらの変位成分および応力成分は対称条件式 (4) ~ (6) を自動的に満足している.

特異積分方程式を導くために, 次のような新しい未知関数 $G(x)$ を導入する⁽¹⁰⁾.

$$G(x) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} u_{yI}(x, 0) & (a < x < b) \\ 0 & (0 \leq x \leq a, b \leq x \leq h_1) \end{cases} \quad (29)$$

式 (17) を式 (29) に代入し, Fourier 逆変換することにより, 未知関数 $A_0(s)$ が次のように求まる.

$$sA_0(s) = -\frac{2}{1+\kappa} \int_a^b G(t) \exp(ist) dt \quad (30)$$

式 (7) ~ (14) と式 (30) より, 未知関数 $A_n(s)$ ($n = 0 \sim 8$) は未知関数 $G(t)$ を用いて次式で表わされる.

$$DA = R \quad (31)$$

上式中, D は $d_{m,n}(s)$ ($m, n = 0 \sim 8$) を要素とする正方マトリクス, A および R はそれぞれ $A_n(s)$ および $R_n(s)$ ($n = 0 \sim 8$) を要素とする列ベクトルであり, 要素 $d_{m,n}(s)$ ($m, n = 0 \sim 8$) および $R_n(s)$ ($n = 0 \sim 8$) は付録 C に示す. 式 (31) より未知関数 $A_n(s)$ ($n = 0 \sim 8$) は

$$A_n(s) = \sum_{m=0}^8 Q_{m,n}(s) R_m(s) \quad (n = 0 \sim 8) \quad (32)$$

上式中, $Q_{m,n}(s)$ ($m, n = 0 \sim 8$) は

$$Q_{m,n}(s) = \frac{D_{m,n}(s)}{|D|} \quad (m, n = 0 \sim 8) \quad (33)$$

ここに, $|D|$ は正方マトリクス D の行列式, $D_{m,n}(s)$ は行列式における要素 $d_{m,n}(s)$ ($m, n = 0 \sim 8$) の余因子である.

境界条件式 (3) の第 1 式を用いると, 未知関数 $G(t)$ に関する次の特異積分方程式が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{G(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_a^b G(t) \{M^\infty(t, x) + M(t, x)\} dt \\ = -\frac{1+\kappa}{4c_{66I}(\Phi)} \sigma_0^T(\Phi) \end{aligned} \quad (34)$$

ここに, $M^\infty(t, x)$ および $M(t, x)$ は積分核であり

$$\left. \begin{aligned} M^\infty(t, x) &= \frac{4tx}{(t+x)^3} - \frac{x+3t}{(t+x)^2} + \frac{2}{t+x} \\ M(t, x) &= \int_0^\infty \{m(t, x, s) - m^\infty(t, x, s)\} ds \\ m^\infty(t, x, s) &= \{2txs^2 - (x+3t)s + 2\} \\ &\quad \times \exp\{-s(x+t)\} \\ m(t, x, s) &= (1+\kappa) \sum_{m=0}^8 s \left[\left\{ Q_{m,1}(s) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + sxQ_{m,2}(s) + \frac{3-\kappa}{2} Q_{m,3}(s) \right\} \right. \\ &\quad \times \cosh(sx) + \left\{ Q_{m,4}(s) + sxQ_{m,3}(s) \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{3-\kappa}{2} Q_{m,2}(s) \right\} \sinh(sx) \right] r_m(s) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

ここに, $r_m(s)$ ($m = 0 \sim 8$) は付録 C に示す. また, 境界条件式 (3) の第 2 式より次の補足の条件式が得られる.

$$\int_a^b G(t) dt = 0 \quad (36)$$

4. 特異積分方程式の数値解析および応力拡大係数

特異積分方程式 (34) の数値解析に際し, 内部き裂 ($a > 0$) の場合と縁き裂 ($a = 0$) の場合に分けて考える必要がある. 内部き裂 ($a > 0$) の場合は, 次の無次元量を導入する.

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{b-a}{2} \xi + \frac{b+a}{2} \\ x &= \frac{b-a}{2} \eta + \frac{b+a}{2} \\ G(t) &= \phi(\xi) \end{aligned} \right\} \quad (a < t, x < b, -1 < \xi, \eta < 1) \quad (37)$$

従って, 特異積分方程式 (34) は次のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\phi(\xi)}{\xi-\eta} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \phi(\xi) \{M^{\infty*}(\xi, \eta) \\ + M^*(\xi, \eta)\} d\xi = -\frac{1+\kappa}{4c_{66I}(\Phi)} \sigma_0^T(\Phi) \end{aligned} \quad (38)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} M^{\infty*}(\xi, \eta) &= \frac{b-a}{2} M^\infty(t, x) \\ M^*(\xi, \eta) &= \frac{b-a}{2} M(t, x) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

式 (38) の解 $\phi(\xi)$ の特異性を考慮して, $\phi(\xi)$ を次のように置く.

$$\phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \sum_{n=0}^{\infty} B_n T_n(\xi) \quad (-1 < \xi < 1) \quad (40)$$

ここに, $T_n(\xi)$ は Tchebycheff の多項式, $B_0, B_1, \dots$ は未知定数である. また, 式 (36) より, 次式が得られる.

$$\int_{-1}^1 \phi(\xi) d\xi = 0 \quad (41)$$

式 (40), (41) および Tchebycheff の多項式の直交性より

$$B_0 = 0 \quad (42)$$

式 (40) を式 (38) に代入し, Tchebycheff の多項式の性質

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(\xi) d\xi}{(\xi - \eta) \sqrt{1 - \xi^2}} = U_{n-1}(\eta) \quad (|\eta| < 1, n = 1, 2, \dots) \quad (43)$$

を用いると, 式 (38) は

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n U_{n-1}(\eta) + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-1}^1 \{M^{\infty*}(\xi, \eta) + M^*(\xi, \eta)\} \frac{B_n T_n(\xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi = -\frac{1 + \kappa}{4c_{66I}(\Phi)} \sigma_0^T(\Phi) \quad (44)$$

ここに, $U_n(\eta)$ は第 2 種 Tchebycheff の関数であり, 式 (44) 中の積分は Gauss の数値積分法により容易に評価することができる. 分割点 $\eta_n (n = 1, 2, 3, \dots, N)$ を次のように決定し, 式 (44) を連立方程式に帰着し, 定数 $B_1, B_2, \dots, B_N$ を求めた.

$$\left. \begin{aligned} T_N(\eta_n) &= 0 \\ \eta_n &= \cos \left\{ (2n - 1) \frac{\pi}{2N} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (45)$$

ここに, N は級数の打ち切り項数である. 得られた定数 $B_1, B_2, \dots, B_N$ を用いると, 内部き裂先端 ($x = a, b$) における応力拡大係数 K_{Ia} および K_{Ib} が次のように求まる.

$$\left. \begin{aligned} K_{Ia} &= \lim_{x \rightarrow a} \{2\pi(a - x)\}^{1/2} \sigma_{yyI}(x, 0) \\ &= \frac{4c_{66I}(\Phi)}{\kappa + 1} (\pi a_0)^{1/2} \sum_{n=1}^N (-1)^n B_n \\ K_{Ib} &= \lim_{x \rightarrow b} \{2\pi(x - b)\}^{1/2} \sigma_{yyI}(x, 0) \\ &= -\frac{4c_{66I}(\Phi)}{\kappa + 1} (\pi a_0)^{1/2} \sum_{n=1}^N B_n \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

緑き裂 ($a = 0$) の場合は, 次の無次元量を導入する.

$$t = \frac{b}{2}(1 + \xi), \quad x = \frac{b}{2}(1 + \eta), \quad G(t) = \phi(\xi) \quad (0 < t, x < b, -1 < \xi, \eta < 1) \quad (47)$$

式 (47) で導入された ξ と η に対して, 式 (38), (39) は有効であるが, 積分核 $M^{\infty*}(\xi, \eta)$ は一般化された Cauchy 特異核となる. また, 解 $\phi(\xi)$ は $\xi = 1$ でのみ特異性を有するため, $\phi(\xi)$ を次のように置く.

$$\phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi}} \sum_{n=0}^{\infty} C_n T_n(\xi) \quad (-1 < \xi < 1) \quad (48)$$

ここに, $C_0, C_1, \dots$ は未知定数である. 特異積分方程式の特異性は, 次式を用いることにより除くことができる.

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(\xi) d\xi}{(\xi - \eta) \sqrt{1 - \xi}} = T_n(\eta) \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi}(\xi - \eta)} + \int_{-1}^1 \frac{T_n(\xi) - T_n(\eta)}{\sqrt{1 - \xi}(\xi - \eta)} d\xi \quad (49)$$

ここで, 右側第 2 項の積分は有限であり, 第 1 項の積分は次式となる.

$$\int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi}(\xi - \eta)} = \frac{\log |D(\eta)|}{\sqrt{1 - \eta}} \quad (\eta < 1) \quad (50)$$

$$D(\eta) = \frac{1 + \sqrt{(1 - \eta)/2}}{1 - \sqrt{(1 - \eta)/2}} \quad (51)$$

内部き裂の場合と同様に連立方程式に帰着し, 定数 $C_0, C_1, \dots, C_N$ を決定すると, 応力拡大係数 K_{Ib} が次のように求まる.

$$\begin{aligned} K_{Ib} &= \lim_{x \rightarrow b} \{2\pi(x - b)\}^{1/2} \sigma_{yyI}(x, 0) \\ &= -\frac{4c_{66I}(\Phi)}{\kappa + 1} (\pi b)^{1/2} \sum_{n=0}^N C_n \end{aligned} \quad (52)$$

5. 数値結果および考察

数値解析に際し, 複合材料の幾何学的形状は $h_2/h_1 = 2.0$ とし, 温度は $\Phi_s = 395[\text{K}]$ (複合材料の作成温度)⁽²⁾, $\Phi = 293[\text{K}]$ (室温), $77[\text{K}]$ (液体窒素温度), $4[\text{K}]$ (液体ヘリウム温度) とした. また, 式 (15) で与えられる弾性体 I の y 方向垂直応力は, $\sigma_0^T(293) = 18.89[\text{MPa}]$, $\sigma_0^T(77) = 82.39[\text{MPa}]$, $\sigma_0^T(4) = 111.36[\text{MPa}]$ であり, 級数の打ち切り項数は $N = 12$ で精度上十分であることを確認した.

Fig.2 Stress intensity factors K_{Ia} and K_{Ib} for the embedded crack, $(a + b)/h_1 = 0.5$, $h_2/h_1 = 2.0$.

最初に, 内部き裂 ($a/h_1 > 0$) の場合について検討する. 図 2 は無次元化された応力拡大係数 $(K_{Ia}, K_{Ib}) / \sigma_0^T(\Phi)(\pi a_0)^{1/2}$ に及ぼす弾性体 I の厚さに対するき裂長さの比, すなわち a_0/h_1 の影響を示したもので, き裂の位置を $(a+b)/h_1 = 0.5$ とした場合である. $K_{Ia}/\sigma_0^T(\Phi)(\pi a_0)^{1/2}$ は $K_{Ib}/\sigma_0^T(\Phi)(\pi a_0)^{1/2}$ より大

あり, $a_0/h_1 \rightarrow 0$ の時, $K_{Ia}/\sigma_0^T(\Phi)(\pi a_0)^{1/2}, K_{Ib}/\sigma_0^T(\Phi)(\pi a_0)^{1/2}$ はいずれの温度でも 1.0 に漸近する. $K_{Ia}/\sigma_0^T(\Phi)(\pi a_0)^{1/2}$ は a_0/h_1 の増大に伴って増大し, 温度の低下に伴い増大する. また, $K_{Ib}/\sigma_0^T(\Phi)(\pi a_0)^{1/2}$ の値は, $\Phi=77, 4[\text{K}]$ の場合, a_0/h_1 の増大に伴って増大するのに対し, $\Phi=293[\text{K}]$ の場合, 最初僅かに増大し, 極大値を取った後減少する傾向を示す. 図 3, 4 は, K_{Ia}, K_{Ib} に及ぼすき裂位置 $(a+b)/h_1$ の影響を示したグラフであり, き裂長さを $a_0/h_1 = 0.2$ とした. K_{Ia}, K_{Ib} は $(a+b)/h_1$ の減少および温度 Φ の低下に伴って増大する. 特に, $0.2 < (a+b)/h_1 < 0.3$ では, $(a+b)/h_1$ の増大による K_{Ia}, K_{Ib} の減少が顕著である.

Fig.3 Stress intensity factor K_{Ia} for the embedded crack, $a_0/h_1 = 0.2, h_2/h_1 = 2.0$.

Fig.4 Stress intensity factor K_{Ib} for the embedded crack, $a_0/h_1 = 0.2, h_2/h_1 = 2.0$.

次に, 縁き裂 ($a/h_1 = 0.0$) の場合について検討する. 図 5 は, 無次元化された応力拡大係数 $K_{Ib}/\sigma_0^T(\Phi)(\pi b)^{1/2}$ に及ぼすき裂長さ比 b/h_1 の影響を示したもので, $\Phi=293, 77, 4[\text{K}]$ とした. $K_{Ib}/\sigma_0^T(\Phi)(\pi b)^{1/2}$ はき裂長さ比 b/h_1 の増大に伴い減少し, 温度 Φ の低下に伴い増大する. また, $b/h_1 \rightarrow 0$ で $K_{Ib}/\sigma_0^T(\Phi)(\pi b)^{1/2}$ はいずれの温度の場合も 1.121 に漸近する.

Fig.5 Stress intensity factor K_{Ib} for the edge crack, $a/h_1 = 0.0, h_2/h_1 = 2.0$.

6. 結 言

本報は, 織物複合材料である G-10CR 積層板 $[0/90]_s^\theta$ の織り込み角度 θ が零度の場合をモデル化したき裂を有する三層複合材料を対象に, き裂先端の特異熱応力を厳密に理論解析したものである. 内部き裂および縁き裂の場合について数値計算し, 熱応力拡大係数に及ぼす材料温度および幾何学的形状の影響を定量的に明らかにした. すなわち, 無次元化された熱応力拡大係数は, 材料温度, き裂長さおよびき裂位置に依存して顕著に変化することが明らかになった.

付 録 A

弾性定数 $c_{11\delta}(\Phi), c_{12\delta}(\Phi), c_{22\delta}(\Phi), c_{66\delta}(\Phi)$ ($\delta = \text{I, II}$) は

$$\left. \begin{aligned} c_{11\delta}(\Phi) &= \left\{ \frac{1}{E_{z\delta}(\Phi)} - \frac{\nu_{yz\delta}(\Phi)^2}{E_{y\delta}(\Phi)} \right\} \\ &\quad \times \frac{c_{0\delta}(\Phi)}{E_{x\delta}(\Phi)E_{z\delta}(\Phi)} \\ c_{12\delta}(\Phi) &= \left\{ \frac{\nu_{xz\delta}(\Phi)\nu_{yz\delta}(\Phi)}{E_{y\delta}(\Phi)} + \frac{\nu_{xy\delta}(\Phi)}{E_{x\delta}(\Phi)} \right\} \\ &\quad \times \frac{c_{0\delta}(\Phi)}{E_{x\delta}(\Phi)E_{y\delta}(\Phi)} \\ c_{22\delta}(\Phi) &= \left\{ \frac{1}{E_{x\delta}(\Phi)} - \frac{\nu_{zx\delta}(\Phi)^2}{E_{z\delta}(\Phi)} \right\} \\ &\quad \times \frac{c_{0\delta}(\Phi)}{E_{x\delta}(\Phi)E_{y\delta}(\Phi)} \\ c_{66\delta}(\Phi) &= G_{xy\delta}(\Phi) \end{aligned} \right\} \quad (\delta = \text{I, II}) \quad (53)$$

ここに

$$\begin{aligned} c_{0\delta}(\Phi) &= 1 - 2\nu_{xy\delta}(\Phi)\nu_{yz\delta}(\Phi)\nu_{zx\delta}(\Phi) \\ &\quad - \frac{E_{x\delta}(\Phi)\nu_{zx\delta}(\Phi)^2}{E_{z\delta}(\Phi)} - \frac{E_{y\delta}(\Phi)\nu_{xy\delta}(\Phi)^2}{E_{x\delta}(\Phi)} \\ &\quad - \frac{E_{z\delta}(\Phi)\nu_{yz\delta}(\Phi)^2}{E_{y\delta}(\Phi)} \quad (\delta = \text{I, II}) \end{aligned} \quad (54)$$

繊維強化複合材料の弾性特性および熱特性 $E_l(\Phi), E_t(\Phi), G_{lt}(\Phi), G_{tt}(\Phi), \nu_{lt}(\Phi), \nu_{tl}(\Phi), \nu_{tt}(\Phi), \alpha_l(\Phi), \alpha_t(\Phi)$

と弾性体 I, II の弾性特性および熱特性 $E_{x\delta}(\Phi), E_{y\delta}(\Phi), E_{z\delta}(\Phi), G_{xy\delta}(\Phi), \nu_{xy\delta}(\Phi), \nu_{yz\delta}(\Phi), \nu_{zx\delta}(\Phi), \alpha_{x\delta}(\Phi), \alpha_{y\delta}(\Phi), \alpha_{z\delta}(\Phi)$ ($\delta=I, II$) の関係は

$$\left. \begin{aligned} E_{zI}(\Phi) &= E_{yII}(\Phi) = E_l(\Phi) \\ E_{xI}(\Phi) &= E_{yI}(\Phi) = E_{xII}(\Phi) \\ &= E_{zII}(\Phi) = E_t(\Phi) \\ G_{xyI}(\Phi) &= G_{tt}(\Phi) \\ G_{xyII}(\Phi) &= G_{tl}(\Phi) \\ \nu_{zxI}(\Phi) &= \nu_{yzII}(\Phi) = \nu_{lt}(\Phi) \\ \nu_{yzI}(\Phi) &= \nu_{xyII}(\Phi) = \nu_{tl}(\Phi) \\ \nu_{xyI}(\Phi) &= \nu_{zxII}(\Phi) = \nu_{tt}(\Phi) \\ \alpha_{zI}(\Phi) &= \alpha_{yII}(\Phi) = \alpha_l(\Phi) \\ \alpha_{xI}(\Phi) &= \alpha_{yI}(\Phi) = \alpha_{xII}(\Phi) \\ &= \alpha_{zII}(\Phi) = \alpha_t(\Phi) \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

ここに、下添字 l および t は繊維方向および繊維と垂直方向を示す。弾性特性 $E_l(\Phi), E_t(\Phi), G_{lt}(\Phi), G_{tt}(\Phi), \nu_{lt}(\Phi), \nu_{tl}(\Phi), \nu_{tt}(\Phi)$ は繊維および母材の弾性特性を用いて、繊維の体積含有率 $V_f = 0.5$ として Hashin の式⁽¹¹⁾より求めた。また、繊維と母材の弾性特性および複合材料の熱特性は、次の指数関数で近似した⁽³⁾。

$$\left. \begin{aligned} E_f(\Phi) &= 83.76 \exp(-2.405 \times 10^{-4} \Phi) \text{ [GPa]} \\ \nu_f(\Phi) &= 0.251 \exp(6.038 \times 10^{-4} \Phi) \\ G_f(\Phi) &= E_f(\Phi)/2 \{1 + \nu_f(\Phi)\} \text{ [GPa]} \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Bisphenol A epoxy} \\ E_m(\Phi) &= 9.338 \exp(-3.443 \times 10^{-3} \Phi) \text{ [GPa]} \\ \nu_m(\Phi) &= 0.326 \exp(-1.419 \times 10^{-3} \Phi) \\ G_m(\Phi) &= E_m(\Phi)/2 \{1 + \nu_m(\Phi)\} \text{ [GPa]} \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Glassfiber reinforced plastic} \\ \alpha_l(\Phi) &= 5.295 \exp(1.535 \times 10^{-3} \Phi) \\ \alpha_t(\Phi) &= 20.48 \exp(1.725 \times 10^{-3} \Phi) \end{aligned} \right\} \quad [\times 10^{-6}/K] \quad (58)$$

ここに、 $E_f(\Phi), E_m(\Phi)$ は縦弾性係数、 $G_f(\Phi), G_m(\Phi)$ は横弾性係数、 $\nu_f(\Phi), \nu_m(\Phi)$ は Poisson 比であり、下添字 f, m は繊維と母材を示す。

付 録 B

定数 $S_j(\Phi)$ ($j = 1 \sim 3$) および熱ひずみ $\varepsilon_{y\delta}^T(\Phi), \varepsilon_{z\delta}^T(\Phi)$ ($\delta = I, II$) は

$$\left. \begin{aligned} S_1(\Phi) &= -\frac{h_0 - 1}{E_{yI}(\Phi)} - \frac{1}{E_{yII}(\Phi)} \\ S_2(\Phi) &= \frac{(h_0 - 1)\nu_{yzI}(\Phi)}{E_{yI}(\Phi)} + \frac{\nu_{yzII}(\Phi)}{E_{yII}(\Phi)} \\ S_3(\Phi) &= -\frac{h_0 - 1}{E_{zI}(\Phi)} - \frac{1}{E_{zII}(\Phi)} \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{y\delta}^T(\Phi) &= \int_{\Phi_0}^{\Phi} \alpha_{y\delta}(\phi) d\phi \\ \varepsilon_{z\delta}^T(\Phi) &= \int_{\Phi_0}^{\Phi} \alpha_{z\delta}(\phi) d\phi \end{aligned} \right\} \quad (\delta = I, II) \quad (60)$$

付 録 C

マトリックス D の要素 $d_{m,n}(s)$ ($m, n = 0 \sim 8$) は

$$\left. \begin{aligned} d_{0,0}(s) &= s, \quad d_{0,k}(s) = 0 \quad (k = 1 \sim 8), \\ d_{1,0}(s) &= 0, \quad d_{1,1}(s) = 2s, \\ d_{1,2}(s) &= 0, \quad d_{1,3}(s) = -s(1 + \kappa), \\ d_{1,k}(s) &= 0 \quad (k = 4 \sim 8), \quad d_{2,0}(s) = d_{2,1}(s) = 0, \\ d_{2,2}(s) &= s(1 - \kappa), \quad d_{2,3}(s) = 0, \quad d_{2,4}(s) = 2s, \\ d_{2,k}(s) &= 0 \quad (k = 5 \sim 8), \quad d_{3,0}(s) = 0, \\ d_{3,1}(s) &= 2s \cosh(sh_1), \\ d_{3,2}(s) &= 2s^2 h_1 \cosh(sh_1) - s(1 + \kappa) \sinh(sh_1), \\ d_{3,3}(s) &= -s(1 + \kappa) \cosh(sh_1) + 2s^2 h_1 \sinh(sh_1), \\ d_{3,4}(s) &= 2s \sinh(sh_1), \\ d_{3,5}(s) &= (1 + \beta_1) c_{660}(\Phi) s \exp(\gamma_1 sh_1), \\ d_{3,6}(s) &= (1 + \beta_1) c_{660}(\Phi) s \exp(-\gamma_1 sh_1), \\ d_{3,7}(s) &= (1 + \beta_2) c_{660}(\Phi) s \exp(\gamma_2 sh_1), \\ d_{3,8}(s) &= (1 + \beta_2) c_{660}(\Phi) s \exp(-\gamma_2 sh_1), \\ d_{4,0}(s) &= 0, \quad d_{4,1}(s) = 2s \sinh(sh_1), \\ d_{4,2}(s) &= s(1 - \kappa) \cosh(sh_1) + 2s^2 h_1 \sinh(sh_1), \\ d_{4,3}(s) &= 2s^2 h_1 \cosh(sh_1) + s(1 - \kappa) \sinh(sh_1), \\ d_{4,4}(s) &= 2s \cosh(sh_1), \\ d_{4,5}(s) &= \gamma_1 (1 + \beta_1) c_{660}(\Phi) s \exp(\gamma_1 sh_1), \\ d_{4,6}(s) &= -\gamma_1 (1 + \beta_1) c_{660}(\Phi) s \exp(-\gamma_1 sh_1), \\ d_{4,7}(s) &= \gamma_2 (1 + \beta_2) c_{660}(\Phi) s \exp(\gamma_2 sh_1), \\ d_{4,8}(s) &= -\gamma_2 (1 + \beta_2) c_{660}(\Phi) s \exp(-\gamma_2 sh_1), \\ d_{5,0}(s) &= 0, \quad d_{5,1}(s) = s \sinh(sh_1), \\ d_{5,2}(s) &= -s\kappa \cosh(sh_1) + s^2 h_1 \sinh(sh_1), \\ d_{5,3}(s) &= s^2 h_1 \cosh(sh_1) - s\kappa \sinh(sh_1), \\ d_{5,4}(s) &= s \cosh(sh_1), \quad d_{5,5}(s) = \gamma_1 s \exp(\gamma_1 sh_1), \\ d_{5,6}(s) &= -\gamma_1 s \exp(-\gamma_1 sh_1), \\ d_{5,7}(s) &= \gamma_2 s \exp(\gamma_2 sh_1), \\ d_{5,8}(s) &= -\gamma_2 s \exp(-\gamma_2 sh_1), \\ d_{6,0}(s) &= 0, \\ d_{6,1}(s) &= s \cosh(sh_1), \quad d_{6,2}(s) = s^2 h_1 \cosh(sh_1), \\ d_{6,3}(s) &= s^2 h_1 \sinh(sh_1), \quad d_{6,4}(s) = s \sinh(sh_1), \\ d_{6,5}(s) &= \beta_1 s \exp(\gamma_1 sh_1), \\ d_{6,6}(s) &= \beta_1 s \exp(-\gamma_1 sh_1), \\ d_{6,7}(s) &= \beta_2 s \exp(\gamma_2 sh_1), \\ d_{6,8}(s) &= \beta_2 s \exp(-\gamma_2 sh_1), \\ d_{7,k}(s) &= 0 \quad (k = 0 \sim 4), \\ d_{7,5}(s) &= \gamma_1 (1 + \beta_1) \exp(\gamma_1 sh_2), \\ d_{7,6}(s) &= -\gamma_1 (1 + \beta_1) \exp(-\gamma_1 sh_2), \\ d_{7,7}(s) &= \gamma_2 (1 + \beta_2) \exp(\gamma_2 sh_2), \\ d_{7,8}(s) &= -\gamma_2 (1 + \beta_2) \exp(-\gamma_2 sh_2), \\ d_{8,k}(s) &= 0 \quad (k = 0 \sim 4), \quad d_{8,5}(s) = \gamma_1 \exp(\gamma_1 sh_2), \\ d_{8,6}(s) &= -\gamma_1 \exp(-\gamma_1 sh_2), \\ d_{8,7}(s) &= \gamma_2 \exp(\gamma_2 sh_2), \\ d_{8,8}(s) &= -\gamma_2 \exp(-\gamma_2 sh_2) \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

列ベクトル $\mathbf{R}$ の要素 $R_n(s)$ ($n = 0 \sim 8$) は

$$R_n(s) = \frac{2}{1+\kappa} \int_a^b r_n(t, s) G(t) dt \quad (n = 0 \sim 8) \quad (62)$$

$$\left. \begin{aligned} r_0(t, s) &= -\exp(ist) \\ r_1(t, s) &= st \exp(-st) \\ r_2(t, s) &= (st - 1) \exp(-st) \\ r_3(t, s) &= -s(h_1 - t) \exp\{-s(h_1 - t)\} \\ r_4(t, s) &= -\{1 - s(h_1 - t)\} \exp\{-s(h_1 - t)\} \\ r_5(t, s) &= -\left\{ \frac{1-\kappa}{4} - \frac{s(h_1 - t)}{2} \right\} \\ &\quad \times \exp\{-s(h_1 - t)\} \\ r_6(t, s) &= -\left\{ \frac{s(h_1 - t)}{2} - \frac{1+\kappa}{4} \right\} \\ &\quad \times \exp\{-s(h_1 - t)\} \\ r_7(t, s) &= r_8(t, s) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

文 献

- (1) Kasen, M.B., MacDonald, G.R., Beekman, D.H. and Schramm, R.E., *Adv. Cryog. Eng.*, **26** (1980), 235-244.
- (2) Kriz, R.D., *J. Compos. Tech. Res.*, **7** (1985), 55-58.
- (3) Ueda, S. and Shindo, Y., *Theor. Appl. Mech.*, **40** (1991), 249-257.
- (4) Ueda, S. and Shindo, Y., *Mater. Sci. Eng.*, **A176** (1994), 471-482.
- (5) Ueda, S. and Shindo, Y., *Theor. Appl. Mech.*, **41** (1992), 169-179.
- (6) Sanada, K., Shindo, Y. and Ueda, S., *Theor. Appl. Frac. Mech.*, **28** (1998), 183-196.
- (7) Ueda, S. and Shindo, Y., *JSME Int. J., A*, **36** (1993), 367-373.
- (8) Ueda, S., *Int. J. Fract.*, (2000), 印刷中.
- (9) Kriz, R.D., *Compos. Mater.*, **2** (1989), 150-161.
- (10) Gupta, G.D., *Int. J. Solids Struct.*, **9** (1973), 1141-1154.
- (11) Hashin, Z., *Theory of Fiber Reinforced Materials*, NASA-CR-1974, (1972), 1-194.