軸対称圧電材接合構造の応力特異性解析*

李 玉 蘭^{*1}, 佐 藤 裕^{*2}, 渡 辺 勝 彦^{*2}

Stress Singularity Analysis of Axisymmetric Piezoelectric Bonded Structure

Yulan LI, Yutaka SATO^{*3} and Katsuhiko WATANABE^{*3} Institute of Industrial Science, University of Tokyo, 4-6-1 Komaba, Meguro-ku, Tokyo, 153-8505 Japan

Stress singularities at the edge of a piezoelectric bi-material bonded structure with hourglass-shape and straight sides under an axisymmetric deformation are analyzed. The bonded materials are assumed to be transversely isotropic to the symmetric axis of deformation. One of the two materials is piezoelectric and another one is either a dissimilar piezoelectric or a usual elastic material. The analysis assumes perfect bonding and is based on a general solution consisting of three quasi-harmonic functions. The eigenfunction expansion method is used to determine the singularities. The discussions are given for the difference of the stress singularities between the cases where the electro-mechanical coupling effect is considered or not. Moreover, the difference between the axisymmetric deformation and the plane strain deformation are made clear. Finally, the theoretical results are compared with the numerical ones and the good agreement between them are demonstrated.

Key Words: Stress Concentration, Finite Element Method, Piezoelectric Bonded Structure, Stress Singularity. Axisymmetric Deformation

1. 緒 言

圧電セラミックスにおける電氣的・機械的連成作用は、各種センサー、トランスデューサー、アクチュエータとして広く応用されている。これらは電極や他の材料を貼り合わせた構造として用いられる場合が多く、製造過程や使用時には接合面端部や角部の近傍に応力集中が生じ、き裂の発生、はく離、分極消失等、性能の劣化につながる原因となる。これを未然に防ぐような設計を行うためには、この種の接合構造における応力分布特性や破壊挙動を理解することが重要となる。

近年界面き裂問題に対する多くの研究が行われており⁽¹⁾⁻⁽⁶⁾、二次元問題については Chung ら⁽⁷⁾が Stroh 形式を用いて異方性圧電材料の接合面に線状に分布した荷重、電荷および転位が存在する場合の解を求めている。実用的には円盤状の積層構造をはじめとして軸対称接合構造の素子や試験体が広く用いられている。著

者らは砂時計形の異材接合構造が軸対称変形を受ける場合の解を先の研究で導いたが^{(8),(9)}、本研究はこれを圧電材接合構造に拡張したものである。組み合わせられる材料は双方ともに対称軸に対して垂直な面内の等方性を仮定し、そのうち一方は圧電材料として扱っており、もう一方は異なる種類の圧電材料か、または通常の弾性材料としている。この面内等方性を有する接合材料の軸対称変形問題の定式化と接合界面端部における応力特異性を求めるため、文献(10)における方法を拡張した方法を用いた。固有形式で表された解より、圧電材接合構造の軸対称問題と平面ひずみ問題の類似点と相違点を明確にする。また有限要素法を用いた計算結果との比較を行い、導出された解析解の検証もあわせて行った。

2. 基礎方程式と解

z -軸を対称軸とし、これに垂直な面内の等方性を有する圧電材料の構成関係は、円筒座標系 (r, θ, z) を用いて次式で与えられる。

* 原稿受付 2000年1月19日。

^{*1} 東京大学生産技術研究所(〒153-8505 東京都目黒区駒場4-6-1)。^{*2} 正員, 東京大学生産技術研究所。

E-mail: sato@iis.u-tokyo.ac.jp

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{12} \frac{u_r}{r} + c_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} + e_{31} \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ \sigma_{\theta\theta} &= c_{12} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{11} \frac{u_r}{r} + c_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} + e_{31} \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ \sigma_{zz} &= c_{13} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) + c_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} + e_{33} \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ \sigma_{rz} &= c_{44} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + e_{15} \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ D_r &= e_{15} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) - \varepsilon_{11} \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ D_z &= e_{31} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) + e_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \varepsilon_{33} \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで c_{ij} , ε_{ij} および e_{ij} ($i, j=1, 2, \dots, 6$) は、それぞれ弾性定数、誘電率、圧電定数である。また σ_{ij} , u_i および D_i ($i, j=r, z, \theta$) は、応力、変位、電気変位を表し、 ϕ は電気ポテンシャルである。ここでは軸対称変形だけを考えることとし、 $u_\theta = \sigma_{r\theta} = \sigma_{z\theta} = D_\theta = 0$ を仮定している。

また物体力を考慮しない場合の応力の釣り合い式および外部からの電荷の流入がない場合の電気変位の釣り合い式はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{\partial D_z}{\partial z} + \frac{D_r}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

で表される。ここで関数 $\Phi(r, z)$ を導入し

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad u_z = m \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \phi = n \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (3)$$

とすれば、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi = 0 \quad (4)$$

のとき式(2)が満たされる。ただしここで

$$\begin{aligned} p^2 &= -\frac{c_{11}}{m(c_{13} + c_{44}) + n(e_{31} + e_{15}) + c_{44}} \\ &= -\frac{mc_{44} + ne_{15} + c_{13} + c_{44}}{mc_{33} + ne_{33}} \\ &= -\frac{me_{15} - n\varepsilon_{11} + e_{31} + e_{15}}{me_{33} - n\varepsilon_{33}} \end{aligned} \quad (5)$$

であり、また式(5)は次の式(6), (7)と等価である。

$$ap^6 + bp^4 + cp^2 + d = 0 \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} m &= -\frac{c_{11}\varepsilon_{11} + \alpha_3 p^2 + c_{44}\varepsilon_{33} p^4}{p^2(\alpha_1 + \alpha_2 p^2)} \\ n &= -\frac{c_{11}e_{15} + \alpha_4 p^2 + c_{44}e_{33} p^4}{p^2(\alpha_1 + \alpha_2 p^2)} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここで全てのパラメータは材料定数に依存し、それぞれ次のようなものである。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \varepsilon_{11}(c_{13} + c_{44}) + e_{15}(e_{31} + e_{15}) \\ \alpha_2 &= \varepsilon_{33}(c_{13} + c_{44}) + e_{33}(e_{31} + e_{15}) \\ \alpha_3 &= c_{11}\varepsilon_{33} + c_{44}\varepsilon_{11} + (e_{31} + e_{15})^2 \\ \alpha_4 &= c_{11}e_{33} + c_{44}e_{15} - (c_{13} + c_{44})(e_{31} + e_{15}) \\ a &= c_{44}(e_{33}^2 + c_{33}\varepsilon_{33}) \\ b &= c_{33}\alpha_3 + e_{33}(2\alpha_4 - c_{11}e_{33}) - \varepsilon_{33}c_{13}(c_{13} + 2c_{44}) \\ c &= c_{44}\alpha_3 + e_{15}(2\alpha_4 - c_{44}e_{15}) + \varepsilon_{11}\{c_{11}c_{33} - (c_{13} + c_{44})^2\} \\ d &= c_{11}(e_{15}^2 + c_{44}\varepsilon_{11}) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ひずみエネルギーが正定値であるとき、 p は実数ではあり得ないことが示されていることから、それは $i\gamma_l$ と $-i\gamma_l$ ($l=1, 2, 3$) あるいは $i\gamma_l$, $-i\gamma_l$ および $\pm\chi \pm i\gamma$ の形となることがわかる。ただしここで、 γ_l , χ および γ は全て材料定数だけに依存する実数を表し、 i は虚数単位である。このことは、もし p が式(6)の解であるならば、 $-p$ および $\bar{p}$ もまた式(6)の解となることを意味している。 p が純虚数、すなわち $\bar{p} = -p$ のとき、式(7)より m は p と $-p$ に対して同じ値となることがわかる。 n についても同様である。従って式(6)の解がわかれば、例えば互いに異なる 6 つの根が存在する場合、一般解は次のように表すことができる。

$$u_r = \sum_{l=1}^3 \frac{\partial \Phi_l}{\partial r}, \quad u_z = \sum_{l=1}^3 m_l \frac{\partial \Phi_l}{\partial z}, \quad \phi = \sum_{l=1}^3 n_l \frac{\partial \Phi_l}{\partial z} \quad (9)$$

ここで m_l および n_l は式(7)から求まるものであり、 Φ_l はそれぞれの p_l^2 ($l=1, 2, 3$) に対する解から式(4)により決定されるものである。式(9)は、文献(11)で示されているこれとは異なった方法を用いて導出されたものと一致することを確認することができる。特に ϕ が u_r および u_z と連成しない場合、すなわち $e_{ij} = 0$ である場合には類似の方法を用いて次のような形の解を得ることができる。

$$u_r = \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial r}, \quad u_z = m_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + m_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}, \quad \phi = \Phi_3 \quad (10)$$

Fig.1 Axisymmetric bonded structure and local coordinate system around the edge of interface.

さらに、圧電効果のない等方性の材料に対する解は、 ϕ 以外は異なる形となり、式(10)に対応する式は次式のようなものとなる^{(9),(10),(12)}。

$$u_r = \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + z \frac{\partial \Phi_2}{\partial r}, \quad u_z = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + z \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + (4\nu - 3)\Phi_2, \\ \phi = \Phi_3 \quad \text{..... (11)}$$

また $p^2 = -1$ が成り立つ。ただしここで ν はポアソン比である。

$S(r, z) = (R, 0)$ を応力の特異点とし、この S を原点として次のような座標系を定義する(図 1(b)参照)。

$$x = R - r = \rho \cos \varphi, \quad z = \rho \sin \varphi \quad \text{..... (12)}$$

ρ が R に対して十分小さいときに有効であるような式(4)の解を見いだすために、式(4)を次のような形に書き換える。

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{R-x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{R} \right)^{k-1} \quad \text{..... (13)}$$

この式の解は

$$\Phi = \Phi^{(0)} + \frac{1}{R} \Phi^{(1)} + \frac{1}{R^2} \Phi^{(2)} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{R^k} \Phi^{(k)} \quad \text{..... (14)}$$

のように表現できる。 S の近傍において応力が δ 乗の特異性を持つと仮定すると、 $\Phi^{(k)}$ は次式で与えられる。

$$\Phi^{(k)} = \sum_{t=0}^k \left\{ \frac{A^{(k,t)}(x+pz)^{\delta+k-t+2} + B^{(k,t)}(x-pz)^{\delta+k-t+2}}{\delta+k-t+2} \right\} x^t \quad \text{..... (15)}$$

上で述べたような圧電効果のない等方性材料場合では、式(10)-(11)の Φ_3 と式(11)の Φ_2 に対応した $\Phi^{(k)}$ は次式のような形となる。

$$\Phi^{(k)} = \sum_{t=0}^k \left\{ A^{(k,t)}(x+pz)^{\delta+k-t+1} + B^{(k,t)}(x-pz)^{\delta+k-t+1} \right\} x^t \quad \text{..... (16)}$$

式(15)および(16)の係数はお互いに独立ではなく、係数 $A^{(k,t)}$ ($t=0,1,\dots,k$) については

$$\left. \begin{aligned} A^{(k,k)} &= \frac{2k-1}{2k} A^{(k-1,k-1)} \quad (k \geq 1) \\ A^{(k,t)} &= \frac{2t-1}{2t} A^{(k-1,t-1)} + \frac{t A^{(k-1,t)} - (t+1) A^{(k,t+1)}}{2(\delta+k-t+1)} \\ &\quad (t=k-1, k-2, \dots, 1; k \geq 2) \end{aligned} \right\} \quad \text{..... (17)}$$

のような関係が成立する。またこれと同じような関係が係数 $B^{(k,t)}$ ($t=0,1,\dots,k$) についても成立する。従って境界条件より決定されるべき $A^{(k,0)}$ および $B^{(k,0)}$ ($k=0,1,\dots$) だけが未知係数となる。

3. 接合端部の特異性

ここでは図 1(a)で示されるような砂時計形の異材接合構造を取り扱うこととし、それぞれの材料を I および II と記す。材料 I は圧電材料であり、その解は式(9)で表現される。材料 II については、これが材料 I とは異なる圧電材料である場合と、圧電効果をもたない等方性の材料である場合の二つのケースを考える。前者の場合には式(9)で表現される解を適用し、後者の場合には式(11)の解を適用する。材料定数の違いによって応力および電気変位は接合端部で特異性を持つことが予想されることから、べき乗形の特異性のオーダーを見いだすために式(14)から(16)の特性方程式を用いる。

界面は $z=0$ で表される平面上にあり、完全に接合されているものと仮定すると、変位、静電ポテンシャル、表面力および電気変位の法線成分は、界面で連続となり次式のような関係が成立する。

$z=0$:

$$u_r^I = u_r^{II}, \quad u_z^I = u_z^{II}, \quad \sigma_{zz}^I = \sigma_{zz}^{II}, \quad \sigma_{zr}^I = \sigma_{zr}^{II} \quad \text{..... (18)}$$

$$\phi^I = \phi^{II}, \quad D_z^I = D_z^{II} \quad \text{..... (19)}$$

また $\varphi = \varphi_1$ および $\varphi = \varphi_2$ で表されるそれぞれの材料の側面は、表面力が作用せず電気的にも開放されているものとする。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr}^I \sin \varphi_1 + \sigma_{zr}^I \cos \varphi_1 &= 0 \\ \sigma_{zr}^I \sin \varphi_1 + \sigma_{zz}^I \cos \varphi_1 &= 0 \\ D_r^I \sin \varphi_1 + D_z^I \cos \varphi_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{..... (20)}$$

および

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr}^{II} \sin \varphi_2 + \sigma_{zr}^{II} \cos \varphi_2 &= 0 \\ \sigma_{zr}^{II} \sin \varphi_2 + \sigma_{zz}^{II} \cos \varphi_2 &= 0 \\ D_r^{II} \sin \varphi_2 + D_z^{II} \cos \varphi_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{..... (21)}$$

が成立する場合を考える。上付き添え字の I および II はそれらがそれぞれ材料 I および材料 II に対するものであることを示している。材料 II が等方性材料の場合、式(19)で表される界面の条件は誘電定数が 0 の場合では $D_z^I = 0$ に、また完全な導電体の場合では $\phi^I = C$ (C は定数)にそれぞれ置き換えることができる。

式(9)から(16)を式(1)に代入することによって、応力と電気変位が導かれる。境界条件を表す式(18)から(21)を用い、 $\rho^{\delta+k}$ ($k=0,1,\dots$) の係数を等置することに

Table 1 Elastic, piezoelectric and dielectric constants of major piezoelectric materials.

Material	Stiffness [GPa]					Piezoelectric constants [C/m ²]			Dielectric constants $\times 10^{-10}$ [F/m]	
	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{33}	c_{44}	e_{15}	e_{31}	e_{33}	ϵ_{11}	ϵ_{33}
CdSe	74.1	45.2	39.3	83.6	13.2	-0.138	-0.159	0.347	0.844	0.903
PZT-5H	126.	55.0	53.0	117.	35.3	17.0	-6.50	23.3	151.	130.
PZT-6B	168.	60.0	60.0	163.	27.1	4.60	-0.90	7.10	36.0	34.0
PZT-4	139.	77.8	74.3	115.	25.6	-5.2	15.1	12.7	64.6	56.2
BaTiO ₃	275.	179.	152.	165.	54.3	21.3	-2.69	3.65	175.	9.88

よって $A_{l,j}^{(k,0)}$ と $B_{l,j}^{(k,0)}$ ($l=1,2,3$; $J=I,II$; $k=0,1,2,\dots$) を決定する方程式が得られ、さらに $A_{l,j}^{(0,0)}$, $B_{l,j}^{(0,0)}$ が自明ではない解を持つための条件式として特異性 δ を決定するための方程式が導かれる。

もし δ が $-1 < \text{Re}(\delta) < 0$ の範囲に存在すれば、応力は接合端部で特異性を有することとなる。表 1 に示したようないくつかの材料の組み合わせについて考えてみる。 $\phi_1 = -\phi_2 = 90^\circ$ である場合に対する特異性のオーダーをまとめたものが表 2 から 4 である。ただし表 2 における Case 1 および表 3 における Case 3 は圧電効果を考慮した場合のものであり、Case 2 および Case 4 は、これを無視した場合の結果である。ここに示した材料の組み合わせでは、 $-1 < \text{Re}(\delta) < 0$ にただ一つの実数の特異性が存在することがわかっている。これらより圧電効果を考慮した場合と考慮しない場合の特異性の違いが明らかである。この違いはいくつかの組み合わせ、例えば CdSe/PZT-4, PZT-4/BaTiO₃, PZT-4/PZT-5H などにおいて特に顕著である。圧電材料が圧電効果のない等方性材料と接合されている場合に対して、界面の境界条件の違いによる結果の差異も

Table 2 Singularity orders of cylindrically bonded structure.

Material combinations	$-\delta$	
	Case 1	Case 2
CdSe/PZT-5H	0.0619	0.04085
CdSe/PZT-6B	0.0719	0.07178
CdSe/BaTiO ₃	0.0571	0.02501
CdSe/PZT-4	0.00204	0.01046
PZT-4/BaTiO ₃	0.1149	0.002628
PZT-4/PZT-5H	0.06912	0.009207
PZT-4/PZT-6B	0.05041	0.02288

Piezoelectric effects are considered for the Case 1 and are neglected for the Case 2.

Table 3 Singularities of cylindrically bonded structure consisted of piezoelectric and usual isotropic ($\epsilon_0 = 1 \times 10^{-8}$ [F/m]) materials.

$\frac{\mu}{c_{44}}$	$-\delta$ (PZT-5H; $\nu = 0.3$)		$-\delta$ (PZT-4; $\nu = 0.33$)	
	Case 3	Case 4	Case 3	Case 4
0.001	0.2879	0.2877	0.3070	0.3069
0.01	0.2792	0.2778	0.2988	0.2975
0.0316	0.2597	0.2555	0.2804	0.2761
0.0631	0.2341	0.2264	0.2563	0.2479
0.1	0.2077	0.1967	0.2316	0.2183
0.316	0.1046	0.08296	0.1397	0.09847
0.631	0.03895	0.01554	0.09456	0.01966
1.	-0.01711	0.	0.09603	0.

Piezoelectric effects are considered for the Case 3 and are neglected for the Case 4.

Table 4 Difference of singularities between several interface boundary conditions.

Interface conditions	μ/c_{44} (PZT-5H; $\nu = 0.3$)			
	0.01	0.0631	0.10	0.316
	$-\delta$			
Eq.(18) and $\phi' = C$	0.2788	0.2320	0.2048	0.1011
Eqs.(18) and (19) ($\epsilon_0 = 1 \times 10^{-8}$ [F/m])	0.2792	0.2341	0.2077	0.1046
Eq.(18) and $D_z' = 0$	0.2793	0.2350	0.2089	0.1062

表 4 に示されている。ここで c_{44} は対応する圧電材料の弾性定数である。

4. 考 察

4.1 平面ひずみ問題との相違点 接合する材料が等方性を有する場合には、軸対称問題における応力特異性は平面ひずみ問題におけるそれと同じとなることが知られている。そこでまず同様の結論が圧電材料の場合に対しても成立するかについての検討を行う。

2 章および 3 章で ρ が R に比べて十分小さい領域における応力分布は式(14)の無限級数解によって与えられ、応力特異性はその第 1 項だけに関係している。 $R \rightarrow \infty$ とするとき式(13)の右辺を 0 とした同次方程式の解 $\Phi^{(0)}$ だけで式(14)は代表されることになり、この同次方程式は平面ひずみ問題に対する支配方程式に一致するものとなっているので、平面ひずみ問題の固有解は軸対称問題における無限級数解の第 1 項から導くことができることになる。すなわち平面ひずみ問題の応力特異性は対応する境界条件下では軸対称問題のそれと同様であるということが言える。しかしながら軸対称問題における点 S 周りの応力分布そのものは、平面ひずみ問題のそれとは異なるものとなる。この違いは平面ひずみ状態に対応する $R \rightarrow 0$ においては消失する曲率 $1/R$ が関係する第 2 項目以下によるものととらえることができる。

次に $\delta = -1$ となる特別な固有値を持つ場合に関連した第 2 項に注目する。与えられた材料の組み合わせとその幾何学的形状に対して、一般には無限個の δ が存在し得る。しかし、特異点を含んだ微小体積のひずみエネルギーと電界による電気ポテンシャルエネルギー

一が有限値となるために、取り得る δ は $-1 < \text{Re}(\delta) < 0$ の範囲に限られる。また $\delta = -1$ は、任意の角度 φ_1 と φ_2 に対して、またどのような材料の組み合わせであっても常に固有値となることが容易にわかる。さらに軸対称変形においては、 $\delta = -1$ に対応した応力と電気変位は点 S で無限大とはならない。それらは一般には 0 ではない有限の値を持ち、特異点における変位と関係づけられる。式(1)から軸対称変形問題では半径方向変位 u_r 、それ自体とその微分値が応力と電気変位を生じさせることがわかる。 $\delta = -1$ に対応した応力と電気変位はこのことを反映したものであり、これがまさに平面ひずみ問題と異なる点である。式(14)および(15)の固有解を式(9)の半径方向変位の表示式に代入し、 $\delta = -1$ とすることにより次式を得る。

$$u_{r,0} = -\sum_{i=1}^3 [A_i^{(0,0)} + B_i^{(0,0)}] \quad (22)$$

ここで $u_{r,0}$ は特異点 S における半径方向変位を表す。これに対応した特異点 S での応力および電気変位は、式(9)、(14)、(15)を式(1)に代入し、 $x=0$ 、 $z=0$ (あるいは $\rho=0$) とすることにより

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr}^0 &= -\frac{1}{R} \sum_{i=1}^3 p_i^2 \mu_i [A_i^{(1,0)} + B_i^{(1,0)}] - (c_{11} - c_{12}) \frac{u_{r,0}}{R} \\ \sigma_{\theta\theta}^0 &= -\frac{1}{R} \sum_{i=1}^3 (c_{11} - c_{12} + p_i^2 \mu_i [A_i^{(1,0)} + B_i^{(1,0)}] + (c_{11} - c_{12}) \frac{u_{r,0}}{R} \\ \sigma_{zz}^0 &= -\frac{1}{R} \sum_{i=1}^3 \mu_i [A_i^{(1,0)} + B_i^{(1,0)}] \\ \sigma_{rz}^0 &= -\frac{1}{R} \sum_{i=1}^3 p_i \mu_i \left[(A_i^{(1,0)} - B_i^{(1,0)}) + \frac{1}{2} (A_i^{(0,0)} - B_i^{(0,0)}) \right] \\ D_r^0 &= -\frac{1}{R} \sum_{i=1}^3 p_i \lambda_i \left[(A_i^{(1,0)} - B_i^{(1,0)}) + \frac{1}{2} (A_i^{(0,0)} - B_i^{(0,0)}) \right] \\ D_z^0 &= -\frac{1}{R} \sum_{i=1}^3 \lambda_i [A_i^{(1,0)} + B_i^{(1,0)}] \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

と表される。ただしここで σ_{rr}^0 などはそれが $x=0$ 、 $z=0$ における値であることを表す。式(23)の応力と電気変位は式(22)を用い、 $\delta = -1$ とした $\Phi^{(1)}$ より求めた。 $\delta = -1$ とした $\Phi^{(1)}$ より求めた応力と電気変位は、 (ρ, φ) あるいは (x, z) に対しては独立であり、定数となることがわかる。しかしながら応力と電気変位が定数では、任意の φ_1 、 φ_2 、材料の組み合わせに対して式(18)から(21)の境界条件を一般には満足しない。そのような場合には $\Phi^{(1)}$ として、修正された解を用いるべきであろう。それは一般的な形で表した修正解

$$\Phi^{*(k)} = (\delta + k + 2) \frac{d}{d\delta} \left\{ A^{(k,0)} (x + pz)^{\delta+k+2} + B^{(k,0)} (x - pz)^{\delta+k+2} \right\} + \sum_{i=1}^k \frac{A^{(k,i)} (x + pz)^{\delta+k-i+2} + B^{(k,i)} (x - pz)^{\delta+k-i+2}}{\delta + k - i + 2} x^i \quad (24)$$

において、 $\delta = -1$ 、 $k=1$ とすることにより得ることができる。この場合、式(24)の係数 $A^{(k,0)}$ 、 $B^{(k,0)}$ は δ に依

Fig.2 Object of analysis and boundary conditions.

Fig.3 Distributions of stresses and electric displacements ($\varphi = 30^\circ$).

存するものと仮定される。 $\delta = -1$ であるときの $\Phi^{(1)}$ から ρ に対しては独立であるが φ によって変化する特異応力、電気変位場を得ることができる。

応力と電気変位特異場の漸近解を表す場合には、これらの応力項と電気変位項(ρ に対しては独立)を無視することができない。このことは次節で明らかとなる。

4.2 数値解析結果との比較 ここまで述べてきた理論解析結果の妥当性を確認するために、文献(13)の定式化に基づき、独自に開発した軸対称圧電材有限要素解析コードによる数値解析結果との比較検討を行った。材料 I が PZT-5H、材料 II が $\mu = 0.1 \times 35.3$ [GPa]、 $\nu = 0.3$ 、誘電率 $\epsilon_0 = 1 \times 10^{-8}$ [F/m] の等方性非圧電材料とした円筒形接合構造の上下面に対して電位差を与えるという条件を想定し、図 2 に示すような形状と境界条件のもとでの解析を行った。理論解析結果より応力と電気変位は接合界面端部 S で特異性を持つので、接合界面端部近傍の要素分割は十分に細かい(点 S 近傍の最小要素寸法 $\approx R \times 10^{-7}$)ものとした。

まず特異性のオーダーについて理論解と数値解の比較を行うため、 ρ/R に対して応力 σ_{ij} と電気変位 D_i を

両対数で示したのが図3である。図中プロットで示されたものが有限要素法によって求められた特異点近傍の $\varphi=30^\circ$ 上の分布である。実線は特異性オーダーの理論値 $\delta=-0.2077$ の傾きを持った直線であり、比較のために示されている。 ρ/R が小さいとき $\log \sigma_{rr}$, $\log \sigma_{zz}$ および $\log D_z$ は $\log(\rho/R)$ に対して直線的でしかも $\delta=-0.2077$ の傾きを持つ直線に平行となっており、これらの成分が $\delta=-0.2077$ の応力特異性を有していることがわかる。一方、 $\log \sigma_{\theta\theta}$ および $\log \sigma_{zz}$ は $\log(\rho/R)$ に対して直線的な分布とはならず、また $\log D_z$ も直線的な分布に見えるが、それは δ の傾きとは異なったものとなっている。しかしこのことは、 $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz} および D_z が $\delta=-0.2077$ の特異性を有していないということを示すものではなく、これらの成分については ρ が小さい領域であっても特異項だけで応力分布を代表できないという事実によるものである。これと同様のこと

Table 5 C_i and E_i used in numerical analysis

C_z	$C_{\theta 1}$	$C_{\theta 11}$	E_z	$E_{\theta 1}$	$E_{\theta 11}$
10^9 [Pa]			10^8 [V/m]		
2.5002	99.843	9.9281	2.0251	6.1098	0.60754

Fig.4 Angular functions f_{ij} and g_i

は、軸対称変形を受ける等方性の異材接合問題でも生じることが示されている^{(8),(9)}。前節で述べたように、平面ひずみ問題とは異なり、軸対称問題の場合では特異点近傍の応力および電気変位場を表すためには、特異項の他に ρ には依存しない付加的な項も考慮することが必要となる。この付加的項は、式(23)あるいは式(24)の修正解 $\Phi^{(1)}$ で $\delta=-1$ とすることによって求められるものと、 $\delta=0$ とした場合の式(14)の第1項の二つの部分から構成されている。 $\varphi_1=-\varphi_2=90^\circ$ のときこれらの項は定数となり、各成分はそれぞれ次式によって与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr}^0 &= \sigma_{zz}^0 = 0, \quad \sigma_{zz}^0 = \frac{1}{R}(C_z u_{r0} + E_z d_0), \\ \sigma_{\theta\theta 1}^0 &= \frac{1}{R}(C_{\theta 1} u_{r0} + E_{\theta 1} d_0), \quad \sigma_{\theta\theta 11}^0 = \frac{1}{R}(C_{\theta 11} u_{r0} + E_{\theta 11} d_0), \\ D_r^0 &= 0, \quad D_z^0 = \frac{d_0}{R} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

ただしここで C_i および E_i ($i=z, \theta$)は双方の材料定数に依存した定数であり、また u_{r0} は特異点の半径方向変位、 d_0 は未知定数である。数値解析に用いた材料の組み合わせに対して求められたこれらの値を表5に示す。

特異点近傍の応力および電気変位場の漸近解は

$$\sigma_{ij} = K \left(\frac{\rho}{R} \right)^\delta f_{ij}(\varphi) + \sigma_{ij}^0, \quad D_i = K \left(\frac{\rho}{R} \right)^\delta g_i(\varphi) + D_i^0 \quad (26)$$

によって表される。ここで K は未知定数であり、 f_{ij} ($ij=rr, \theta\theta, zz, zr$)および g_i ($i=r, z$)はそれぞれ応力と電気変位の φ に関する分布を表す関数である。上記の材料の組み合わせに対して、 $f_{ij}(\varphi)$ および $g_i(\varphi)$ をプロットしたのがそれぞれ図4(a)および(b)である。ただし図4(a)において $f_{rr}(0)=1$ としている。式(26)によって応力変位場を決定するためには、未知定数である K および d_0 を求める必要があるが、 K については数値解析結果のうち界面に沿った σ_{rr} の $-4.5 \leq \log(\rho/R) \leq -2.5$ に

Fig.5 Distributions of stresses and electric displacement ($\varphi=30^\circ$).

Fig. 6 Distribution of stresses and electric displacements ($\varphi = 10^\circ$). Fig. 7 Distribution of stresses and electric displacements ($\varphi = -10^\circ$).

における解を用いて式(26)により決定した。また d_0 についてもこれと同様に界面に沿った D_z の分布を用いて決定した。求められた値はそれぞれ、 $K = 0.4767[\text{Pa}]$ および $d_0 = -4.01 \times 10^{-9}[\text{C/m}]$ であった。これらの値とやはり数値解析結果より求められた $u_{r,0} (= 2.0 \times 10^{-11}[\text{m}])$ を式(26)に代入することにより応力および電気変位場を計算することができる。応力成分 $\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}$ 、電気変位成分 D_z の特異性を再検討するために $\varphi = 30^\circ$ 上の $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\theta\theta}^0$ 、 $\sigma_{zz} - \sigma_{zz}^0$ および $D_z - D_z^0$ を ρ/R に対して両対数で表したものが図 5 である。図中の直線は $\delta = -0.2077$ の傾きを表したものであり、この図から少なくとも $-5 \leq \log(\rho/R) \leq -3$ の範囲ではこの直線に平行な分布を示していることがわかる。従って図 5 と図 3 から応力および電気変位の全ての成分が $\delta = -0.2077$ の特異性を有していると結論づけることができると同時に、特異点近傍の応力および電気変位場が式(26)の形によって記述でき、 σ_y^0 、 D_y^0 が無視できないものであることが確認された。また図 5 で $\log(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\theta\theta}^0)$ が $\log(\rho/R)$ に対して直線的な範囲が他の成分と比較して小さいのは、 $\sigma_{\theta\theta}$ に対する高次項 $(\rho/R)^{\delta+1}$ および

$(\rho/R)^{\delta+2}$ の影響が他の成分より大きいことによるものである。

さらに数値解析結果と式(26)を用いて求められた実際の応力分布を比較したものが図 6, 7 である。図 6 は PZT-5H 側 $\varphi = 10^\circ$ 上の応力および電気変位の分布を、図 7 は同じく等方性材料側 $\varphi = -10^\circ$ 上の分布を表したもので、図中の実線が式(26)から求められた分布を示している。いずれの結果からも広範囲で数値解析結果と良い一致が見られる。

5. 結 論

軸対称変形を受ける圧電材接合構造における応力特異性の解析を行い以下のような結果を得た。

- ・三つの準調和関数により構成される軸対称圧電材接合問題の一般解が示された。
- ・材料定数および接合構造の不連続性のため接合端部に生じる応力特異性を、無限級数の形で表した固有解を用いて求めた。
- ・圧電接合構造における界面端部の特異性のオーダーは、非圧電材料におけるそれと異なることが数値的に確かめられた。
- ・二次元問題の場合とは異なり、特異点近傍の応力場と電気変位場は、一般には特異項だけでは表すことができず、 ρ に依存しない付加項の効果を考慮しなければならない。

文 献

- (1) Z. Suo, C. M. Kuo, D. M. Barnett and J. R. Willis, *J. Mech. Phys. Solids* 40, 739-765(1992).
- (2) H. Sosa and Y. E. Pak, *Int. J. Solids Structures* 26, 1-15 (1990).
- (3) Y. E. Pak, *Int. J. Fracture* 54, 79-100(1992).
- (4) H. Sosa and N. Khutoryansky, *Int. J. Solids Structures* 33, 3399-3414(1996).
- (5) C. M. Kuo and D. M. Barnett, *Modern Theory of Anisotropic Elasticity and Applications*, ed. J. J. Wu, T. C. T. Ting, D. M. Barnett, 33-51, *SIAM* (1991).
- (6) S. P. Shen and Z. B. Kuang, *Int. J. Solids Structures* 35, 3899-3915 (1998).
- (7) M. Y. Chung and T. C. T. Ting, *J. Appl. Mech.* 62, 423-428(1995).
- (8) Y. L. Li, S. Y. Hu, D. Munz and Y. Y. Yang, *Archive of Applied Mechanics* 68, 552-565(1998).
- (9) Y. L. Li, S. Y. Hu and Y. Y. Yang, *Engng Fracture Mech.* (1999), accepted to publish.
- (10) T. C. T. Ting, Y. Jin and S. C. Chou, *J. Appl. Mech.* 52, 565-569 (1985).
- (11) H. J. Ding, B. Chen and J. Liang, *Int. J. Solids Structures* 33, 2283-2298(1996).
- (12) S. P. Timoshenko and J. N. Goodier, *Theory of elasticity*, 3rd edition, 1970, Ch.12, 428-429 (McGraw-Hill, Kogakusha).
- (13) S. K. Ha, C. Keilers and F. K. Chang, *AIAA J.* 30, 772-780 (1992).