任意曲線法による三次元弾塑性応力解析*

上 西 研^{*1}, 安 藤 竜 馬^{*2}

3D Elasto-plastic Stress Analysis by the Method of Arbitrary Lines

Ken KAMINISHI^{*3} and Ryuma ANDO^{*3} Yamaguchi University, Dept. of Mechanical Engineering,
2-16-1 Tokiwadai, Ube, Yamaguchi, 755-8611

The method of arbitrary lines (MAL) constitutes a general dimensional reduction methodology for elliptic boundary value problems (BVP) in arbitrary two- and three-dimensional domains by solving systems of one-dimensional boundary value ordinary differential equations (ODEs). It has been already applied to two-dimensional problem, and the good results have been reported. In this work, we consider the extension of the MAL to three-dimensional elasto-plastic stress analysis. We first give the MAL formulation of three-dimensional elasto-plastic problems. Although the MAL formulation is derived from the principle of three-dimensional increment virtual work as well as the finite element method (FEM), the MAL is different from FEM in that displacement increment and virtual displacement increment are expressed continuous functions along one direction and shape-functions along other two directions. Substituting displacement increment and virtual displacement increment into the principle of three-dimensional increment virtual work, we have a system of ODEs. The three-dimensional elasto-plastic analysis of BGA model, which was a method of the solder joints of electronic component, was carried out. As results, it was confirmed that to solve 3D elasto-plastic problem at the good accuracy was possible by the MAL.

Key Words: Computational Mechanics, Numerical Analysis, Plasticity, Nonlinear Problem, Three Dimensional Analysis, Method of Arbitrary Lines

1. 緒 言

任意曲線法 (Method of Arbitrary Lines, MAL) は支配方程式を連立常微分方程式の境界値問題に帰着させて解く新しい汎用数値解析法である。本解析法は、ある一方向には離散化しないため、様々な問題に対して効率的に精度の良い解を得ることが期待できる。これまで著者らは、二次元弾性・弾塑性および三次元弾性問題に MAL を適用し、その有効性を示してきた⁽¹⁾⁻⁽⁴⁾。そこで、本研究では MAL の三次元弾塑性問題への適用を試みた。既報⁽³⁾で提案した二次元弾塑性解析法は非線形方程式を区分的に線形化して解く直接法であったため、そのまま三次元問題に拡張すると、多大な計算時間を要することが予想される。そのため、ここでは反復解法を前提とした三次元弾塑性問題に対する任意曲線離散化仮想仕事の原理を導出し、その離散化システムを解くための反復解法を提案した。さら

に MAL 解を FEM 解と比較すること等により、MAL による三次元弾塑性解析の有効性について調べた。

2. 三次元任意曲線離散化仮想仕事の原理

微小変形三次元弾塑性問題に対する増分形仮想仕事の原理は

$$\begin{aligned}
 & \iiint_{\Omega} \left\{ D_{11} \frac{\partial du}{\partial x} \frac{\partial d\delta u}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial dv}{\partial y} \frac{\partial d\delta u}{\partial x} + D_{13} \frac{\partial dw}{\partial z} \frac{\partial d\delta u}{\partial x} \right. \\
 & + D_{21} \frac{\partial du}{\partial x} \frac{\partial d\delta v}{\partial y} + D_{22} \frac{\partial dv}{\partial y} \frac{\partial d\delta v}{\partial y} + D_{23} \frac{\partial dw}{\partial z} \frac{\partial d\delta v}{\partial y} \\
 & + D_{31} \frac{\partial du}{\partial x} \frac{\partial d\delta w}{\partial z} + D_{32} \frac{\partial dv}{\partial y} \frac{\partial d\delta w}{\partial z} + D_{33} \frac{\partial dw}{\partial z} \frac{\partial d\delta w}{\partial z} \\
 & + D_{44} \left(\frac{\partial du}{\partial y} + \frac{\partial dv}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial d\delta u}{\partial y} + \frac{\partial d\delta v}{\partial x} \right) \\
 & + D_{55} \left(\frac{\partial dv}{\partial z} + \frac{\partial dw}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial d\delta v}{\partial z} + \frac{\partial d\delta w}{\partial y} \right) \\
 & \left. + D_{66} \left(\frac{\partial dw}{\partial x} + \frac{\partial du}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial d\delta w}{\partial x} + \frac{\partial d\delta u}{\partial z} \right) \right\} dx dy dz \\
 & = \iiint_{\Omega} (af_x d\delta u + af_y d\delta v + af_z d\delta w) dx dy dz \\
 & + \iint_{\Gamma_N} (dh_x d\delta u + dh_y d\delta v + dh_z d\delta w) ds \\
 & + Res
 \end{aligned} \tag{1}$$

* 原稿受付 2000 年 4 月 11 日。

^{*1} 正員, 山口大学工学部 (〒755-8611 宇部市常盤台 2-16-1)。^{*2} 准員, 山口大学大学院。

E-mail: kaminisi@po.cc.yamaguchi-u.ac.jp

となる. du, dv, dw はそれぞれ x, y, z 方向への変位増分, $d\delta u, d\delta v, d\delta w$ はそれぞれ x, y, z 方向への任意の仮想変位増分, af_x, af_y, af_z は物体力の増分, そして dh_x, dh_y, dh_z は表面力の増分を表している. また, 右辺の Res は残差エネルギーであり,

$$Res = \iiint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial d\delta u}{\partial x} d\sigma_x^I + \frac{\partial d\delta v}{\partial y} d\sigma_y^I + \frac{\partial d\delta w}{\partial z} d\sigma_z^I + \left(\frac{\partial d\delta u}{\partial y} + \frac{\partial d\delta v}{\partial x} \right) d\tau_{xy}^I + \left(\frac{\partial d\delta v}{\partial z} + \frac{\partial d\delta w}{\partial y} \right) d\tau_{yz}^I + \left(\frac{\partial d\delta w}{\partial x} + \frac{\partial d\delta u}{\partial z} \right) d\tau_{zx}^I \right\} dx dy dz \quad (2)$$

で表される. ここで,

$$d\sigma^I = D d\epsilon^p$$

であり, D は弾性応力-ひずみマトリックス, $d\epsilon^p$ は塑性ひずみ増分ベクトルである.

MAL では, 図 1 のように任意曲線によって構成されたエレメント Ω_i があるとき, これをマスターエレメント $\hat{\Omega}$ の Φ_i による像であると考え. ζ 方向へ連続な関数 X と ξ, η で表される形状関数 Q を用いて, Ω_i での x, y および z 方向の変位増分を次のように定義する.

$$du|_{\Omega_i} = du(\Phi_i(\xi, \eta, \zeta)) = \sum_j^p X_{xj}^i(\zeta)^T Q_j(\xi, \eta) = X_x^{iT} Q \quad (3)$$

$$dv|_{\Omega_i} = dv(\Phi_i(\xi, \eta, \zeta)) = \sum_j^p X_{yj}^i(\zeta)^T Q_j(\xi, \eta) = X_y^{iT} Q \quad (4)$$

$$dw|_{\Omega_i} = dw(\Phi_i(\xi, \eta, \zeta)) = \sum_j^p X_{zj}^i(\zeta)^T Q_j(\xi, \eta) = X_z^{iT} Q \quad (5)$$

ここで, p は Ω_i を構成するライン数である. また, 仮想変位増分についても次のように定義する.

$$d\delta u|_{\Omega_i} = d\delta u(\Phi_i(\xi, \eta, \zeta)) = \sum_j^p \Psi_{xj}^i(\zeta)^T Q_j(\xi, \eta) = \Psi_x^{iT} Q \quad (6)$$

$$d\delta v|_{\Omega_i} = d\delta v(\Phi_i(\xi, \eta, \zeta)) = \sum_j^p \Psi_{yj}^i(\zeta)^T Q_j(\xi, \eta) = \Psi_y^{iT} Q \quad (7)$$

$$d\delta w|_{\Omega_i} = d\delta w(\Phi_i(\xi, \eta, \zeta)) = \sum_j^p \Psi_{zj}^i(\zeta)^T Q_j(\xi, \eta) = \Psi_z^{iT} Q \quad (8)$$

式 (3)~式 (8) を式 (1) に代入すると

Fig. 1 Three dimensional mapping for the MAL

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \left(\{\Psi_{x\zeta}^{iT}, \Psi_{y\zeta}^{iT}, \Psi_{z\zeta}^{iT}\} \begin{bmatrix} A_{11}^i & A_{12}^i & A_{13}^i \\ A_{21}^i & A_{22}^i & A_{23}^i \\ A_{31}^i & A_{32}^i & A_{33}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{x\zeta}^i \\ X_{y\zeta}^i \\ X_{z\zeta}^i \end{Bmatrix} + \{\Psi_x^{iT}, \Psi_y^{iT}, \Psi_z^{iT}\} \begin{bmatrix} B_{11}^i & B_{12}^i & B_{13}^i \\ B_{21}^i & B_{22}^i & B_{23}^i \\ B_{31}^i & B_{32}^i & B_{33}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_x^i \\ X_y^i \\ X_z^i \end{Bmatrix} \right. \\
& + \left. \{\Psi_x^{iT}, \Psi_y^{iT}, \Psi_z^{iT}\} \begin{bmatrix} C_{11}^i & C_{12}^i & C_{13}^i \\ C_{21}^i & C_{22}^i & C_{23}^i \\ C_{31}^i & C_{32}^i & C_{33}^i \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} X_{x\zeta}^i \\ X_{y\zeta}^i \\ X_{z\zeta}^i \end{Bmatrix} + \{\Psi_{x\zeta}^{iT}, \Psi_{y\zeta}^{iT}, \Psi_{z\zeta}^{iT}\} \begin{bmatrix} C_{11}^i & C_{12}^i & C_{13}^i \\ C_{21}^i & C_{22}^i & C_{23}^i \\ C_{31}^i & C_{32}^i & C_{33}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_x^i \\ X_y^i \\ X_z^i \end{Bmatrix} \right) d\zeta \\
& = \int_{-1}^1 \left(\{\Psi_x^{iT}, \Psi_y^{iT}, \Psi_z^{iT}\} \begin{bmatrix} F_1^i \\ F_2^i \\ F_3^i \end{bmatrix} \right) d\zeta + \{\Psi_x^{iT}, \Psi_y^{iT}, \Psi_z^{iT}\} \begin{bmatrix} q_1^i \\ q_2^i \\ q_3^i \end{bmatrix} + Res \quad (9)
\end{aligned}$$

となる. A , B , C , F および q については三次元弾性問題の場合と同じであるため文献(4)を参照されたい. Res は

$$\begin{aligned}
Res = & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{|J|} \left\{ \Psi_x^{iT} (\Delta_{11} d\sigma_x^I + \Delta_{12} d\tau_{xy}^I + \Delta_{13} d\tau_{zx}^I) Q_\xi + \Psi_x^{iT} (\Delta_{21} d\sigma_x^I + \Delta_{22} d\tau_{xy}^I + \Delta_{23} d\tau_{zx}^I) Q_\eta \right. \\
& + \Psi_y^{iT} (\Delta_{11} d\tau_{xy}^I + \Delta_{12} d\sigma_y^I + \Delta_{13} d\tau_{yz}^I) Q_\xi + \Psi_y^{iT} (\Delta_{21} d\tau_{xy}^I + \Delta_{22} d\sigma_y^I + \Delta_{23} d\tau_{yz}^I) Q_\eta \\
& + \Psi_z^{iT} (\Delta_{11} d\tau_{zx}^I + \Delta_{12} d\tau_{yz}^I + \Delta_{13} d\sigma_z^I) Q_\xi + \Psi_z^{iT} (\Delta_{21} d\tau_{zx}^I + \Delta_{22} d\tau_{yz}^I + \Delta_{23} d\sigma_z^I) Q_\eta \\
& + \Psi_{x\zeta}^{iT} (\Delta_{31} d\sigma_x^I + \Delta_{32} d\tau_{xy}^I + \Delta_{33} d\tau_{zx}^I) Q + \Psi_{y\zeta}^{iT} (\Delta_{31} d\tau_{xy}^I + \Delta_{32} d\sigma_y^I + \Delta_{33} d\tau_{yz}^I) Q \\
& \left. + \Psi_{z\zeta}^{iT} (\Delta_{31} d\tau_{zx}^I + \Delta_{32} d\tau_{yz}^I + \Delta_{33} d\sigma_z^I) Q \right\} |J| d\xi d\eta d\zeta \quad (10)
\end{aligned}$$

のようになり, $|J|$ はヤコビアン, 添え字の ξ, η, ζ はそれぞれでの微分を表している. また,

$$\Delta = \begin{bmatrix} y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta & -x_\eta z_\zeta + x_\zeta z_\eta & x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta \\ -y_\xi z_\zeta + y_\zeta z_\xi & x_\xi z_\zeta - x_\zeta z_\xi & -x_\xi y_\zeta + x_\zeta y_\xi \\ y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi & -x_\xi z_\eta + x_\eta z_\xi & x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \end{bmatrix}$$

である. 式(10)を式(9)のようにまとめると

$$Res = \int_{-1}^1 \left[\{\Psi_x^{iT}, \Psi_y^{iT}, \Psi_z^{iT}\} \begin{bmatrix} D_1^i \\ D_2^i \\ D_3^i \end{bmatrix} + \{\Psi_{x\zeta}^{iT}, \Psi_{y\zeta}^{iT}, \Psi_{z\zeta}^{iT}\} \begin{bmatrix} E_1^i \\ E_2^i \\ E_3^i \end{bmatrix} \right] d\zeta$$

のように表され, D および E は

$$\begin{aligned}
D_1^i &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{ (\Delta_{11} d\sigma_x^I + \Delta_{12} d\tau_{xy}^I + \Delta_{13} d\tau_{zx}^I) Q_\xi + (\Delta_{21} d\sigma_x^I + \Delta_{22} d\tau_{xy}^I + \Delta_{23} d\tau_{zx}^I) Q_\eta \} d\xi d\eta \\
D_2^i &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{ (\Delta_{11} d\tau_{xy}^I + \Delta_{12} d\sigma_y^I + \Delta_{13} d\tau_{yz}^I) Q_\xi + (\Delta_{21} d\tau_{xy}^I + \Delta_{22} d\sigma_y^I + \Delta_{23} d\tau_{yz}^I) Q_\eta \} d\xi d\eta \\
D_3^i &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{ (\Delta_{11} d\tau_{zx}^I + \Delta_{12} d\tau_{yz}^I + \Delta_{13} d\sigma_z^I) Q_\xi + (\Delta_{21} d\tau_{zx}^I + \Delta_{22} d\tau_{yz}^I + \Delta_{23} d\sigma_z^I) Q_\eta \} d\xi d\eta \\
E_1^i &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\Delta_{31} d\sigma_x^I + \Delta_{32} d\tau_{xy}^I + \Delta_{33} d\tau_{zx}^I) Q d\xi d\eta \\
E_2^i &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\Delta_{31} d\tau_{xy}^I + \Delta_{32} d\sigma_y^I + \Delta_{33} d\tau_{yz}^I) Q d\xi d\eta \\
E_3^i &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\Delta_{31} d\tau_{zx}^I + \Delta_{32} d\tau_{yz}^I + \Delta_{33} d\sigma_z^I) Q d\xi d\eta
\end{aligned}$$

となる. 解析領域全体では,

$$\mathbf{X} = \sum_i \begin{Bmatrix} X_x^i \\ X_y^i \\ X_z^i \end{Bmatrix}, \mathbf{\Psi} = \sum_i \begin{Bmatrix} \Psi_x^i \\ \Psi_y^i \\ \Psi_z^i \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \sum_i \begin{bmatrix} A_{11}^i & A_{12}^i & A_{13}^i \\ A_{21}^i & A_{22}^i & A_{23}^i \\ A_{31}^i & A_{32}^i & A_{33}^i \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \sum_i \begin{bmatrix} B_{11}^i & B_{12}^i & B_{13}^i \\ B_{21}^i & B_{22}^i & B_{23}^i \\ B_{31}^i & B_{32}^i & B_{33}^i \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \sum_i \begin{bmatrix} C_{11}^i & C_{12}^i & C_{13}^i \\ C_{21}^i & C_{22}^i & C_{23}^i \\ C_{31}^i & C_{32}^i & C_{33}^i \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \sum_i \begin{Bmatrix} D_1^i \\ D_2^i \\ D_3^i \end{Bmatrix}, \mathbf{E} = \sum_i \begin{Bmatrix} E_1^i \\ E_2^i \\ E_3^i \end{Bmatrix}, \mathbf{F} = \sum_i \begin{Bmatrix} F_1^i \\ F_2^i \\ F_3^i \end{Bmatrix}, \mathbf{q} = \sum_i \begin{Bmatrix} q_1^i \\ q_2^i \\ q_3^i \end{Bmatrix}$$

である。したがって、三次元任意曲線法離散化仮想仕事の原理は以下のようになる。

$$\int_{-1}^1 [\Psi_\zeta^T \mathbf{A} \mathbf{X}_\zeta + \Psi^T \mathbf{C}^T \mathbf{X}_\zeta + \Psi_\zeta^T \mathbf{C} \mathbf{X} + d \Psi^T \mathbf{B} \mathbf{X} - \Psi^T \mathbf{D} - \Psi_\zeta^T \mathbf{E}] d\zeta = \int_{-1}^1 \Psi^T(\zeta) \mathbf{F} d\zeta + \Psi^T(\zeta) \mathbf{q} \quad (11)$$

ここで、式(11)の左辺を部分積分すると

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \Psi^T \{ [-\mathbf{A} \mathbf{X}_\zeta]' + \mathbf{C}^T \mathbf{X}_\zeta - [\mathbf{C} \mathbf{X}]' + \mathbf{B} \mathbf{X} \} - \mathbf{D} + \mathbf{E}_\zeta \} d\zeta + [\Psi^T \mathbf{A} \mathbf{X}_\zeta + \Psi^T \mathbf{C} - \Psi^T \mathbf{E} \mathbf{X}]|_{-1}^1 \\ = \int_{-1}^1 \Psi^T \mathbf{F} d\zeta + \Psi^T \mathbf{q}|_{\zeta=\pm 1} \end{aligned} \quad (12)$$

となる。仮想変位増分 Ψ は任意であるから、式(12)において、特に両端 ($\zeta = \pm 1$) において Ψ がゼロとなるものをとれば式(12)は次のようになる。

$$\int_{-1}^1 \Psi^T \{ [-\mathbf{A} \mathbf{X}_\zeta]' + \mathbf{C}^T \mathbf{A}_\zeta - [\mathbf{C} \mathbf{X}]' + \mathbf{B} \mathbf{X} \} - \mathbf{D} + \mathbf{E}_\zeta \} d\zeta = \int_{-1}^1 \Psi^T \mathbf{F} d\zeta$$

上式はすべての Ψ (ただし両端は除く) について成立するので

$$-\mathbf{A} \mathbf{X}_\zeta - (\mathbf{A}_\zeta - \mathbf{C}^T + \mathbf{C}) \mathbf{X}_\zeta + (\mathbf{B} - \mathbf{C}_\zeta) \mathbf{X} = \mathbf{F} + \mathbf{D} - \mathbf{E}_\zeta \quad (13)$$

が得られる。式(13)を式(12)に代入すると

$$\mathbf{A} \mathbf{X}_\zeta + \mathbf{C} \mathbf{X} = \mathbf{E} \pm \mathbf{q}|_{\zeta=\pm 1} \quad (14)$$

という境界条件式が得られる。式(13)を式(14)の境界条件式のもとで解くことにより、曲線上の任意の点における変位増分およびひずみ増分を求めることができ、式(3)～式(5)に代入することにより、領域内の任意の点における変位増分およびひずみ増分を求めることができる。

3. 計 算 方 法

本研究では、前節で導いた連立常微分方程式の境界値問題(式(13)、式(14))を解くために、B-スプライン選点法を用いた。さらに、弾性域と塑性域の判定を行う点として評価点という概念を導入した。局所座標系において、 ξ と η 方向についてはガウス積分点と両端の座標を選び、 ζ 方向には選点の座標を選び、評価点はこれらの座標の組み合わせによって得られる点に

配置した。図2にガウス積分の数が2、選点数が5の時の評価点の配置を示す。上面のみに実際の評価点の配置が示してあるが、ある ζ での点線で囲まれた面と底面にも上面と同様に評価点を配置した。次に、本研究で開発したプログラムのフローチャートを図3に示す。式(13)および式(14)をBVP-ODEソルバーで解くと、塑性域において残差エネルギーが生じる。残差エネルギーが生じると、式(13)および式(14)の $\mathbf{D}$ 、

Fig. 2 Configuration of estimation point in the master element

Fig. 3 Program flowchart

E および E_c が計算前の値と変化する。したがって、 D 、 E および E_c を更新して、再び式 (13) および式 (14) を解く。この反復によって、応力誤差が要求する許容誤差以下になったらその計算は収束したとみなす。収束した場合、新たに荷重増分もしくは変位増分を与え、収束するまで反復計算を繰り返す。荷重もしくは変位が要求した値になれば、計算結果を出力して終了する。なお、本研究ではひずみ増分から応力増分を求める方法は三好らの方法を用いた⁽⁵⁾。

4. 計算結果及び考察

三次元弾塑性問題における MAL の計算精度および効率を検証するため、図 4(a) に示したはんだ接合の一手法である BGA モデルの解析を行った。境界条件は、底面を x 、 y そして z 方向に拘束し、前面を y 方向に拘束、上面を y 、 z 方向に拘束し、上面に x 軸方向正の向きに強制変位 $\delta = 0.002\text{mm}$ を与えた。物性値はヤング率 35GPa 、ポアソン比 0.3 、降伏応力 26.4MPa 、そして加工硬化率を 2.77GPa とした。MAL は z 方向には離散化しないため、応力やひずみの変化の大きい方向を z 方向にすると、より精度の良い解析を行うことができる。また、形状の長手方向に沿って曲線を配置すると、より少ない曲線数で領域分割を行うことができる。これらを考慮した MAL の要素分割の一例を図 4(b) に示す。また、図 4(c) に FEM での要素分割の一例を示す。反復計算における収束判定には応力の変化率を用い、 n 回目の反復での $i(1 \leq i \leq m)$ 番目の評価点におけるミーゼスの相当応力を $\bar{\sigma}_n^i$ とするとき、解析領域全体での誤差 e を

$$e = \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{|\bar{\sigma}_n^i - \bar{\sigma}_{n-1}^i|}{\bar{\sigma}_n^i} \right\}$$

とした。図 5 に収束過程の一例を示す。反復するにつれて誤差は減少し 10^{-9} 付近までは滑らかに減少していくが、 10^{-9} より小さくなると次第に振動し始め、 10^{-11} 付近で大きく振動している。よって、本解析では収束の現実性を考慮して、許容誤差は 10^{-8} とした。そして、誤差 e が許容誤差以下になったら収束したとみなした。

強制変位量の増加に伴う相当応力分布の変化と塑性域の広がり方を図 6 に示す。上側は BGA モデル全体の相当応力分布を示しており、下側はその時の塑性域のみを示している。図 6(a) から図 6(c) へと強制変位量の増加と共に塑性域がしだいに広がっていることがわかる。このことより、本研究で提案した手法により弾塑性解析が行えることがわかる。

次に、MAL(曲線数が 27 本、41 本、55 本の場合)による相当応力分布の計算結果(図 4(b)中の曲線 AB 上)を図 7 に、同じく曲線 AB 上での σ_z 分布の計算結果を図 8 に示す。横軸は BGA モデルの高さ Z_0 で割ることにより無次元化してある。相当応力は、曲線数によらずほぼ同様な分布が得られているが、 σ_z については $z/Z_0 = 0.0$ と $z/Z_0 = 1.0$ において、曲線数 27 本の場合の計算結果が 41 本、55 本に比べて低くなっている。これは、MAL が局所座標系における ξ 、 η 方向には FEM と同等の離散化を行っているため、この二方向にはある程度の分割が必要であることを示して

Fig. 4 The three-dimensional elasto-plastic analysis of BGA model

Fig. 5 The change of the error e in an iterative process

Fig. 6 Transition of the stress distribution with the change of the enforcement displacement

いる。しかし、全体的には同じような応力分布が得られており、このモデルについては曲線数が41本程度であれば十分な精度で解析が行えることがわかる。

次にMALとFEMの計算結果を比較する。MALの曲線数が55本、FEMの節点数が2332、4525、11413

の場合の曲線AB上での σ_z を図9に示す。FEMの解析には、汎用有限要素解析プログラムNASTRAN Ver.70.7を用いた。MALとFEMの計算結果は、全体として同様な結果が得られている。しかし、特に両端に注目するとFEMの結果はMALの結果に比べて

Fig. 7 Equivalent stress distributions by the MAL analysis

Fig. 9 Comparison of MAL results with FEM ones

Fig. 8 Distributions of σ_z by the MAL analysis

低く、この値はMALの曲線数27本の時の値よりもさらに低い。また、FEMの結果は節点数の増加と共にMALの解析結果に次第に近づいていっている。このことより、FEMの節点数をより多くするとMALの結果にさらに近づくと思われる。

そこで、 $z/Z_0 = 1.0$ におけるMALとFEMの相当応力の相対誤差を図10に示す。基準値として、MALの曲線数55本の解析結果を用いた。横軸に関しては、MALはBVP-ODEソルバーが解く連立一次方程式の数であり、FEMは全体剛性マトリックスの元数である。MAL、FEM両手法ともすべての計算の中でメモリおよび時間を最も要するのは連立一次方程式を解く部分であり、連立一次方程式の数が少ないほど、より少ないメモリでかつ短時間に計算を行うことができる。計算効率を正確に比較するためには、同一の計算機で両者を実行させなければならない。しかし、NASTRAN (FEM) は山口大学情報処理センターのベクトルプロセッサSX-4上で実行したが、同計算機にはMALプログラムで使ったC++言語のコンパイラがないため、MALはパーソナルコンピュータ

Fig. 10 Relationship between the number of simultaneous linear equations and relative error

(Intel Celeron 500MHz, 2CPU) 上で実行した。したがって、連立一次方程式の元数をパラメータとして計算効率の比較を行った。図10を見てわかるように、MAL、FEMともに連立一次方程式数の増加と共に相対誤差が減少している。MALの相対誤差はFEMのそれより、図10の中でより左下に位置しており、少ない方程式数で精度の良い解析が行えていることがわかる。したがって、MALは三次元弾塑性問題を解く上で効率の良い解法であると考えられる。

5. 結 言

変位増分と仮想変位増分をある一方向に連続な関数として表現することにより、三次元増分仮想仕事の原理より反復解法での任意曲線離散化仮想仕事の原理を導出し、最終的に連立常微分方程式の境界値問題に帰着させた。さらに、その理論をもとにプログラムを開発し、BGAモデルの三次元弾塑性解析を行った。その結果、精度の良い解が安定して得られることがわかり、任意曲線法でも十分に三次元弾塑性解析が行える

ことが確認できた。

文 献

- (1) Kaminishi, K., *et al. Proc. HERMIS'94*, (1994), 236-245.
  - (2) Kaminishi, K., *et al. Proc. ICES'95*, (1995), 1298-1303.
  - (3) 上西, 機論, **61**, A(1995), 2677-2683.
  - (4) 上西・安藤, 機論, **66**-644, A(2000), 685-691.
  - (5) Miyoshi, T., Kaminishi, K. and Kawano, S., *Comp. Mech.*, (1988) 3, 371-379.
-