傾斜組成不均質界面層を有する積層弾性体の表面き裂問題*

上 田 整^{*1}, 向 井 達 哉^{*2}

The Surface Crack Problem for a Layered Elastic Medium With a Functionally Graded Nonhomogeneous Interface

Sei UEDA^{*3} and Tatsuya MUKAI^{*3} Osaka Institute of Technology, 5-16-1, Omiya, Asahi-ku, Osaka, Osaka, 535-8585, Japan

The plane elasticity solution is presented in this paper for the crack problem of a layered medium. A functionally graded interfacial region is assumed to exist as a distinct nonhomogeneous transitionally layer with the exponentially varying elastic property between the dissimilar homogeneous surface layer and the substrate. The surface layer contains a crack perpendicular to the boundaries. Fourier transforms are used to formulate the problem in terms of a singular integral equation. The main results presented are the variations of stress intensity factors as functions of geometric and material parameters of the layered medium.

Key Words: Stress Intensity Factor, Laminated Construction, Elasticity, Fracture Mechanics, Functionally Graded Material, Integral Transform

1. 結 言

傾斜機能材料 (FGM) は, 宇宙往還機の機体・エンジン材料, 化学プラントおよび核融合炉の超耐熱材料などとして注目されており⁽¹⁾, 傾斜機能によるエネルギー変換材料の高効率化にも期待が高まっている. このような傾斜機能材料の最適傾斜プロファイルを決定するためには, その力学的挙動に関する基礎的研究が不可欠である. このため, 傾斜機能材料を対象とした破壊力学的研究が盛んに行われており, 表面き裂を有する傾斜機能材料の特異応力問題⁽²⁾, 縁き裂を有する傾斜機能平板の熱衝撃応答問題⁽³⁾⁽⁴⁾などの理論的研究成果が報告されている. また, 有限要素法を用いた研究も行われ, 多数き裂を有する傾斜機能コーティング材の熱破壊問題⁽⁵⁾や傾斜組成コーティング材に関する熱応力問題⁽⁶⁾などが解析されている. 一方, 表面層, FGM 層および基盤から成る積層弾性体の基盤に存在するき裂先端の特異応力も解明されているが⁽⁷⁾, 傾斜機能材料の熱衝撃破壊実験⁽⁸⁾によると, 加熱・冷却に伴うき裂は表面層中に多数生じることが報告されており, 表面層にき裂を有する積層弾性体の特異応力問題の解明も重要である.

本研究は, 国際熱核融合実験炉 (ITER) のダイバータ板として開発された傾斜組成複合材料⁽⁹⁾を表面層, FGM 層および基盤から成る積層弾性体にモデル化し, 表面層に存在するき裂先端の特異応力を厳密に理論解析したものである. 表面層と基盤は均質等方性材料とし, FGM 層の弾性特性は指数関数的に変化するものとした. 解析には, 積分変換法を用い, 問題の解を特異積分方程式の解に帰着した. 特異積分方程式を数値解析し, 応力拡大係数に及ぼす幾何学的形状および材料特性の影響をグラフに示して詳細に検討した.

2. 問題の呈示と基礎式

図1に示す直角座標系 (x, y, z) において, 厚さ h_1 の表面層, 厚さ $h_2 - h_1$ の FGM 層および $h_2 < x$ の半無限領域を占める基盤を考える. 表面層には, $y = 0$ 面上に長さ $2a_0 = b - a$ ($0 \leq a < b < h_1$) の二次元き裂が表面に垂直に存在するものとし, き裂面 ($a < x < b$) に分布応力 $-\sigma_0^T(x)$ が作用する問題を設定する. 表面層, FGM 層および基盤を下添字 1, 2, 3 で, x, y, z 軸方向を下添字 x, y, z で表すものとする.

FGM 層の縦弾性係数を 2 つのパラメータ E_0 および β を用いて次のように表す⁽¹⁰⁾.

$$E_2(x) = E_0 \exp\{\beta(x - h_1)\} \quad (1)$$

ここに

* 原稿受付 2000 年 5 月 1 日.

^{*1} 正員, 大阪工業大学工学部 (☎ 535-8585 大阪市旭区大宮 5-16 1).^{*2} 学生員, 大阪工業大学大学院.
E-mail: ueda@med.oit.ac.jp

Fig.1 Geometry of the crack problem in a layered medium.

$$E_0 = E_1, \quad \beta = \frac{1}{h_2 - h_1} \log \left(\frac{E_3}{E_1} \right) \quad (2)$$

であり, E_1, E_3 はそれぞれ材料 1, 3 の縦弾性係数である。また, 破壊力学的挙動に及ぼすポアソン比の影響は無視できることが示されており⁽¹⁰⁾, ポアソン比 $\nu = \nu_k$ ($k = 1, 2, 3$) とした。 x 軸および y 軸方向の変位成分を, $u_{xk}(x, y), u_{yk}(x, y)$ ($k = 1, 2, 3$) とすると, 応力成分 $\sigma_{xxk}(x, y), \sigma_{yyk}(x, y), \sigma_{xyk}(x, y)$ ($k = 1, 2, 3$) は次のように得られる。

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xxk} \\ \sigma_{yyk} \\ \sigma_{xyk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mu_k(1+\kappa)}{\kappa-1} & \frac{\mu_k(3-\kappa)}{\kappa-1} & 0 \\ \frac{\mu_k(3-\kappa)}{\kappa-1} & \frac{\mu_k(1+\kappa)}{\kappa-1} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_k \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial u_{xk}}{\partial x} \\ \frac{\partial u_{yk}}{\partial y} \\ \frac{\partial u_{xk}}{\partial y} + \frac{\partial u_{yk}}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, 3) \quad (3)$$

ここに, $\mu_k = E_k/2(1+\nu)$ ($k = 1, 2, 3$) は横弾性係数であり, 平面ひずみの場合 $\kappa = (3-4\nu)$, 平面応力の場合 $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ である。

平衡方程式は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} (\kappa+1) \frac{\partial^2 u_{xk}}{\partial x^2} + (\kappa-1) \frac{\partial^2 u_{xk}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 u_{yk}}{\partial x \partial y} \\ + \beta(\kappa-1) \frac{\partial \mu_{xk}}{\partial y} + \beta(3-\kappa) \frac{\partial \mu_{yk}}{\partial x} = 0 \\ (\kappa+1) \frac{\partial^2 u_{yk}}{\partial y^2} + (\kappa-1) \frac{\partial^2 u_{yk}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_{xk}}{\partial x \partial y} \\ + \beta(\kappa-1) \left(\frac{\partial \mu_{xk}}{\partial y} + \frac{\partial \mu_{yk}}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2, 3) \quad (4)$$

ただし, $k = 1, 3$ の時 $\beta = 0$, $k = 2$ の時 $\beta \neq 0$ である。

問題の対称性を考慮すると, 境界条件式および対称条件式は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{yy1}(x, 0) &= -\sigma_0^T(x) \quad (a < x < b) \\ u_{y1}(x, 0) &= 0 \quad (0 \leq x \leq a, b \leq x \leq h_1) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\sigma_{xy1}(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x \leq h_1) \quad (6)$$

$$u_{y2}(x, 0) = 0 \quad (h_1 \leq x \leq h_2) \quad (7)$$

$$\sigma_{xy2}(x, 0) = 0 \quad (h_1 \leq x \leq h_2) \quad (8)$$

$$u_{y3}(x, 0) = 0 \quad (h_2 \leq x < \infty) \quad (9)$$

$$\sigma_{xy3}(x, 0) = 0 \quad (h_2 \leq x < \infty) \quad (10)$$

$$\sigma_{xx1}(0, y) = 0 \quad (0 \leq y < \infty) \quad (11)$$

$$\sigma_{xy1}(0, y) = 0 \quad (0 \leq y < \infty) \quad (12)$$

$$\sigma_{xx1}(h_1, y) = \sigma_{xx2}(h_1, y) \quad (0 \leq y < \infty) \quad (13)$$

$$\sigma_{xy1}(h_1, y) = \sigma_{xy2}(h_1, y) \quad (0 \leq y < \infty) \quad (14)$$

$$u_{x1}(h_1, y) = u_{x2}(h_1, y) \quad (0 \leq y < \infty) \quad (15)$$

$$u_{y1}(h_1, y) = u_{y2}(h_1, y) \quad (0 \leq y < \infty) \quad (16)$$

$$\sigma_{xx2}(h_2, y) = \sigma_{xx3}(h_2, y) \quad (0 \leq y < \infty) \quad (17)$$

$$\sigma_{xy2}(h_2, y) = \sigma_{xy3}(h_2, y) \quad (0 \leq y < \infty) \quad (18)$$

$$u_{x2}(h_2, y) = u_{x3}(h_2, y) \quad (0 \leq y < \infty) \quad (19)$$

$$u_{y2}(h_2, y) = u_{y3}(h_2, y) \quad (0 \leq y < \infty) \quad (20)$$

3. 解 析

表面層 ($k = 1$) の変位場は, $\beta = 0$ とした式 (4) に Fourier 変換を適用することにより, 次のように得られる⁽⁷⁾。

$$\begin{aligned} u_{x1}(x, y) = & -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\{A_1(s) + sx A_2(s) - \kappa A_3(s)\} \sinh(sx) \right. \\ & + \{A_4(s) + sx A_3(s) - \kappa A_2(s)\} \cosh(sx) \left. \right] \cos(sy) ds \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{1-\kappa}{2} \frac{s}{|s|} + sy \right) \\ & \times A_0(s) \exp(-|s|y - isx) ds \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} u_{y1}(x, y) = & \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\{A_1(s) + sx A_2(s)\} \cosh(sx) \right. \\ & + \{A_4(s) + sx A_3(s)\} \sinh(sx) \left. \right] \sin(sy) ds \\ & - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{s}{|s|} \left(\frac{1+\kappa}{2} \frac{s}{|s|} + sy \right) \\ & \times A_0(s) \exp(-|s|y - isx) ds \end{aligned} \quad (22)$$

ここで, $A_j(s)$ ($j = 0 \sim 4$) は, 境界条件および対称条件から決定される未知関数である。式 (21), (22) を式 (3) に代入して応力場を求めると

$$\begin{aligned} \sigma_{xx1}(x, y) = & -\frac{4\mu_1}{\pi} \int_0^\infty \\ & \times s \left[\left\{ A_1(s) + sx A_2(s) - \frac{1+\kappa}{2} A_3(s) \right\} \cosh(sx) \right. \\ & + \left. \left\{ A_4(s) + sx A_3(s) - \frac{1+\kappa}{2} A_2(s) \right\} \sinh(sx) \right] \\ & \times \cos(sy) ds - \frac{\mu_1 i}{\pi} \int_{-\infty}^\infty s \left(sy - \frac{s}{|s|} \right) \\ & \times A_0(s) \exp(-|s|y - isx) ds \quad (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy1}(x, y) = & \frac{4\mu_1}{\pi} \int_0^\infty \\ & \times s \left[\left\{ A_1(s) + sx A_2(s) + \frac{3-\kappa}{2} A_3(s) \right\} \cosh(sx) \right. \\ & + \left. \left\{ A_4(s) + sx A_3(s) + \frac{3-\kappa}{2} A_2(s) \right\} \sinh(sx) \right] \\ & \times \cos(sy) ds + \frac{\mu_1 i}{\pi} \int_{-\infty}^\infty s \left(sy + \frac{s}{|s|} \right) \\ & \times A_0(s) \exp(-|s|y - isx) ds \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy1}(x, y) = & \frac{4\mu_1}{\pi} \int_0^\infty \\ & \times s \left[\left\{ A_4(s) + sx A_3(s) + \frac{1-\kappa}{2} A_2(s) \right\} \cosh(sx) \right. \\ & + \left. \left\{ A_1(s) + sx A_2(s) + \frac{1-\kappa}{2} A_3(s) \right\} \sinh(sx) \right] \\ & \times \sin(sy) ds - \frac{\mu_1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty |s| sy \\ & \times A_0(s) \exp(-|s|y - isx) ds \quad (25) \end{aligned}$$

同様に FGM 層 ($k=2$) の変位場と応力場は⁽²⁾

$$\begin{aligned} u_{x2}(x, y) = & \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 q_j(s) A_{j+4}(s) \\ & \times \exp\{p_j(s)x\} \cos(sy) ds \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{y2}(x, y) = & \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 A_{j+4}(s) \exp\{p_j(s)x\} \sin(sy) ds \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx2}(x, y) = & \frac{2E_0 \exp\{\beta(x - h_1)\}}{\pi(\kappa - 1)} \\ & \times \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 \{(1+\kappa)p_j(s)q_j(s) + s(3-\kappa)\} \\ & \times A_{j+4}(s) \exp\{p_j(s)x\} \cos(sy) ds \quad (28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy2}(x, y) = & \frac{2E_0 \exp\{\beta(x - h_1)\}}{\pi(\kappa - 1)} \\ & \times \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 \{s(1+\kappa) + (3-\kappa)p_j(s)q_j(s)\} \\ & \times A_{j+4}(s) \exp\{p_j(s)x\} \sin(sy) ds \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy2}(x, y) = & \frac{2E_0 \exp\{\beta(x - h_1)\}}{\pi} \\ & \times \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 \{p_j(s) - sq_j(s)\} \\ & \times A_{j+4}(s) \exp\{p_j(s)x\} \sin(sy) ds \quad (30) \end{aligned}$$

ここに, $A_{j+4}(s)$ ($j = 1 \sim 4$) は未知関数であり, $p_j(s), q_j(s)$ ($j = 1 \sim 4$) は次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} p_1(s) &= -\frac{\beta}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\beta^2 + 4s^2 + 4i\gamma s} \\ p_2(s) &= -\frac{\beta}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\beta^2 + 4s^2 - 4i\gamma s} \\ p_3(s) &= -\frac{\beta}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\beta^2 + 4s^2 + 4i\gamma s} \\ p_4(s) &= -\frac{\beta}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\beta^2 + 4s^2 - 4i\gamma s} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

$$q_j(s) = \frac{(\kappa - 1)\{\beta + p_j(s)\}p_j(s) - (\kappa + 1)s^2}{s\{2p_j(s) + \beta(\kappa - 1)\}} \quad (j = 1 \sim 4) \quad (32)$$

$$\gamma = \beta \sqrt{\frac{3-\kappa}{1+\kappa}} \quad (33)$$

また, 基盤 ($k=3$) の変位場と応力場は

$$\begin{aligned} u_{x3}(x, y) = & \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \{A_9(s) + (sx + \kappa)A_{10}(s) \\ & \times \exp(-sx) \cos(sy) ds \quad (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{y3}(x, y) = & \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \{A_9(s) + sx A_{10}(s) \\ & \times \exp(-sx) \sin(sy) ds \quad (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx3}(x, y) = & -\frac{4\mu_3}{\pi} \int_0^\infty s \left\{ A_9(s) + \left(sx + \frac{1+\kappa}{2} \right) \right. \\ & \times A_{10}(s) \left. \right\} \exp(-sx) \cos(sy) ds \quad (36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy3}(x, y) = & \frac{4\mu_3}{\pi} \int_0^\infty s \left\{ A_9(s) + \left(sx - \frac{3-\kappa}{2} \right) \right. \\ & \times A_{10}(s) \left. \right\} \exp(-sx) \cos(sy) ds \quad (37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy3}(x, y) = & -\frac{4\mu_3}{\pi} \int_0^\infty s \left\{ A_9(s) + \left(sx - \frac{1-\kappa}{2} \right) \right. \\ & \times A_{10}(s) \left. \right\} \exp(-sx) \sin(sy) ds \quad (38) \end{aligned}$$

ここに, $A_j(s)$ ($j = 9 \sim 10$) は未知関数である. これらの変位成分および応力成分は, 式 (6) ~ (10) を自動的に満足している.

問題を特異積分方程式に帰着するために, 次の未知関数 $G(x)$ を導入する⁽¹¹⁾.

$$G(x) = \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} u_{y1}(x, 0) \quad (a < x < b) \\ & 0 \quad (0 \leq x \leq a, b \leq x \leq h_1) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

式 (22) を式 (39) に代入し, Fourier 逆変換すると未知関数 $A_0(s)$ が次のように求まる.

$$sA_0(s) = -\frac{2}{1+\kappa} \int_a^b G(t) \exp(ist) dt \quad (40)$$

式 (11) ~ (20) と式 (40) より, 未知関数 $A_n(s)$ ($n = 0 \sim 10$) は, 未知関数 $G(t)$ を用いて次式で表される.

$$DA = R \quad (41)$$

ここに, D は $d_{m,n}(s)$ ($m, n = 0 \sim 10$) を要素とする正方マトリクス, A および R はそれぞれ $A_n(s)$ および $R_n(s)$ ($n = 0 \sim 10$) を要素とする列ベクトルであり, 要素 $d_{m,n}(s)$ ($m, n = 0 \sim 10$) および $R_n(s)$ ($n = 0 \sim 10$) は付録に示す. 式 (41) より, 未知関数 $A_n(s)$ ($n = 0 \sim 10$) は次のように求まる.

$$A_n(s) = \sum_{m=0}^{10} Q_{m,n}(s) R_m(s) \quad (n = 0 \sim 10) \quad (42)$$

ここに, $Q_{m,n}(s)$ ($m, n = 0 \sim 10$) は

$$Q_{m,n}(s) = \frac{D_{m,n}(s)}{|D|} \quad (m, n = 0 \sim 10) \quad (43)$$

上式中, $|D|$ はマトリクス D の行列式, $D_{m,n}(s)$ はマトリクス D の行列式における要素 $d_{m,n}(s)$ ($m, n = 0 \sim 10$) の余因子である.

境界条件式 (5) の第 1 式より, 未知関数 $G(t)$ に関する次の特異積分方程式が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{G(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_a^b G(t) \{M_s(t, x) + M_f(t, x)\} dt \\ = -\frac{1+\kappa}{4\mu_1} \sigma_0^T(x) \end{aligned} \quad (44)$$

ここに, $M_s(t, x), M_f(t, x)$ は積分核であり, 次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} M_s(t, x) &= \frac{2}{t+x} - \frac{3t+x}{(t+x)^2} + \frac{4tx}{(t+x)^3} \\ M_f(t, x) &= \int_0^\infty \{m(t, x, s) - m^\infty(t, x, s)\} ds \\ m(t, x, s) &= (1+\kappa) \sum_{m=0}^{10} sr_m(s) \\ &\times \left\{ \left[Q_{m,1}(s) + sxQ_{m,2}(s) + \frac{3-\kappa}{2} Q_{m,3}(s) \right] \right. \\ &\quad \times \cosh(sx) \\ &\quad \left. + \left[Q_{m,4}(s) + sxQ_{m,3}(s) + \frac{3-\kappa}{2} Q_{m,2}(s) \right] \right. \\ &\quad \left. \times \sinh(sx) \right\} \\ m^\infty(t, x, s) &= \{2txs^2 - (x+3t)s + 2\} \\ &\quad \times \exp\{-s(x+t)\} \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

ここに, $r_m(s)$ ($m = 0 \sim 8$) は付録に示す.

4. 特異積分方程式の数値解析および応力拡大係数

特異積分式 (44) の数値解析に際し, 内部き裂 ($a > 0$) の場合と縁き裂 ($a = 0$) の場合に分けて考える必要がある. 内部き裂 ($a > 0$) の場合は, 次の無次元量を導入する.

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{b-a}{2} \xi + \frac{b+a}{2} \\ x &= \frac{b-a}{2} \eta + \frac{b+a}{2} \\ G(t) &= \phi(\xi) \\ \sigma_0^T(x) &= \sigma_0^*(\eta) \end{aligned} \right\} \quad (a < t, x < b, -1 < \xi, \eta < 1) \quad (46)$$

従って, 特異積分方程式 (44) は次のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\phi(\xi)}{\xi-\eta} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \phi(\xi) \{M_s^*(\xi, \eta) \\ + M_f^*(\xi, \eta)\} d\xi = -\frac{1+\kappa}{4\mu_1} \sigma_0^*(\eta) \end{aligned} \quad (47)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} M_s^*(\xi, \eta) &= \frac{b-a}{2} M_s(t, x) \\ M_f^*(\xi, \eta) &= \frac{b-a}{2} M_f(t, x) \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

式 (47) の解 $\phi(\xi)$ の特異性を考慮して, $\phi(\xi)$ を次のように置く.

$$\phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \sum_{n=0}^{\infty} B_n T_n(\xi) \quad (-1 < \xi < 1) \quad (49)$$

ここに, $T_n(\xi)$ は Tchebycheff の多項式であり, $B_0, B_1, \dots$ は未知定数である. また, 式 (5) の第 2 式より, 次の補足の条件式が得られる.

$$\int_{-1}^1 \phi(\xi) d\xi = 0 \quad (50)$$

式 (49), (50) および Tchebycheff の多項式の直交性より

$$B_0 = 0 \quad (51)$$

式 (49) を式 (47) に代入し, Tchebycheff の多項式の性質

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(\xi) d\xi}{(\xi-\eta)\sqrt{1-\xi^2}} = U_{n-1}(\eta) \quad (|\eta| < 1, n = 1, 2, \dots) \quad (52)$$

を用いると, 式 (47) は

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} B_n U_{n-1}(\eta) + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-1}^1 \{M_s^*(\xi, \eta) \\ + M_f^*(\xi, \eta)\} \frac{B_n T_n(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = -\frac{1+\kappa}{4\mu_1} \sigma_0^*(\eta) \end{aligned} \quad (53)$$

ここに、 $U_n(\eta)$ は第2種 Tchebycheff の関数であり、式 (53) 中の積分は Gauss の数値積分法により容易に評価することができる。分割点 $\eta_n (n = 1, 2, 3 \dots N)$ を次のように決定し、式 (53) を連立方程式に帰着し、定数 $B_1, B_2, \dots, B_N$ を求めた。

$$\left. \begin{aligned} T_N(\eta_n) &= 0 \\ \eta_n &= \cos \left\{ (2n-1) \frac{\pi}{2N} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (54)$$

ここに、 N は級数の打ち切り項数である。得られた定数 $B_1, B_2, \dots, B_N$ を用いると、内部き裂先端 ($x = a, b$) における応力拡大係数は次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} K_{Ia} &= \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{2\pi(a-x)} \sigma_{yy1}(x, 0) \\ &= \frac{4\mu_1}{\kappa+1} \sqrt{\frac{\pi(b-a)}{2}} \sum_{n=1}^N (-1)^n B_n \\ K_{Ib} &= \lim_{x \rightarrow b} \sqrt{2\pi(x-b)} \sigma_{yy1}(x, 0) \\ &= -\frac{4\mu_1}{\kappa+1} \sqrt{\frac{\pi(b-a)}{2}} \sum_{n=1}^N B_n \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

縁き裂 ($a = 0$) の場合は、次の無次元量を導入する。

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{b}{2}(1+\xi) \\ x &= \frac{b}{2}(1+\eta) \\ G(t) &= \phi(\xi) \\ \sigma_0^T(x) &= \sigma_0^*(\eta) \end{aligned} \right\} \quad (0 < t, x < b, -1 < \xi, \eta < 1) \quad (56)$$

式 (56) で導入された ξ と η に対しても、式 (47), (48) は有効であるが、積分核 $M_n^*(\xi, \eta)$ は一般化された Cauchy 特異核となる。また、解 $\phi(\xi)$ は $\xi = 1$ でのみ特異性を有するため、 $\phi(\xi)$ を次のように置く。

$$\phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi}} \sum_{n=0}^{\infty} C_n T_n(\xi) \quad (-1 < \xi < 1) \quad (57)$$

ここに、 $C_1, C_2, \dots$ は未知定数である。特異積分方程式の特異性は、次式を用いることにより除くことができる。

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(\xi) d\xi}{(\xi-\eta)\sqrt{1-\xi}} = T_n(\eta) \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi}(\xi-\eta)} + \int_{-1}^1 \frac{T_n(\xi) - T_n(\eta)}{\sqrt{1-\xi}(\xi-\eta)} d\xi \quad (58)$$

ここで、右側第2項の積分は有限であり、第1項の積

分は次式となる。

$$\int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi}(\xi-\eta)} = \frac{\log |D(\eta)|}{\sqrt{1-\eta}} \quad (\eta < 1) \quad (59)$$

$$D(\eta) = \frac{1 + \sqrt{(1-\eta)/2}}{1 - \sqrt{(1-\eta)/2}} \quad (60)$$

内部き裂の場合と同様に連立方程式に帰着し、定数 $C_1, C_2, \dots, C_N$ を決定すると、応力拡大係数は次のように求まる。

$$\begin{aligned} K_{Ib} &= \lim_{x \rightarrow b} \sqrt{2\pi(x-b)} \sigma_{yy1}(x, 0) \\ &= -\frac{4\mu_1}{\kappa+1} \sqrt{\pi b} \sum_{n=1}^N C_n \end{aligned} \quad (61)$$

5. 数値結果および考察

数値計算に際しては、平面ひずみを仮定し、ポアソン比 $\nu = 0.3$ とした。また、き裂面に作用する分布応力は一定、すなわち $\sigma_0^T(x) = \sigma_0$ とし、Tchebycheff の多項式の打ち切り項数は $N = 12$ で精度上十分であることを確認した。

最初に、内部き裂 ($a/h_1 > 0$) の場合について検討する。図2は、 $a/h_1 = 0.2$, $b/h_1 = 0.8$ の場合の無次元化された応力拡大係数 $K_{Ia}/\sigma_0(\pi a_0)^{1/2}$ および $K_{Ib}/\sigma_0(\pi a_0)^{1/2}$ に及ぼす FGM 層と表面層の厚さの比 $(h_2 - h_1)/h_1$ の影響を縦弾性係数比 $E^* = E_3/E_1$ をパラメータとして示したグラフである。 K_{Ia} の値は K_{Ib} の値より大であり、 $E^* = 1.0$ の場合は、 K_{Ia}, K_{Ib} の値は一定となる。表面層の縦弾性係数が基盤の縦弾性係数よりも大 ($E^* = 0.1$) の場合は、層厚比 $(h_2 - h_1)/h_1$ の増大に伴い、応力拡大係数 K_{Ia}, K_{Ib} は減少し、表面層の縦弾性係数が基盤の縦弾性係数より小 ($E^* = 10.0$) の場合は逆の傾向を示す。また、 $(h_2 - h_1)/h_1$ の増大に伴い、 $E^* = 0.1, 10.0$ の場合の K_{Ia}, K_{Ib} の値は、 $E^* = 1.0$ の場合の値に漸近する。

Fig.2 Stress intensity factors for an embedded crack, $a/h_1 = 0.2$, $b/h_1 = 0.8$.

図3は、き裂位置 $(a+b)/2h_1 = 0.5$ 、層厚比 $(h_2 - h_1)/h_1 = 1.0$ とした場合の無次元化された応力拡大係数に及ぼすき裂長さ比 a_0/h_1 の影響を示したもので、 $E^* = 0.1, 1.0, 10.0$ とした。いずれの無次元化された応力拡大係数も $a_0/h_1 \rightarrow 0$ で 1.0 に漸近し、 a_0/h_1 の増大に伴って増大する傾向を示す。 a_0/h_1 の増大による無次元化された応力拡大係数の増大する傾向は、 $K_{Ia}/\sigma_0(\pi a_0)^{1/2}$ の方が $K_{Ib}/\sigma_0(\pi a_0)^{1/2}$ より顕著であり、 E^* の減少に伴って著しくなる。

Fig.3 Stress intensity factors for an embedded crack, $(a+b)/2h_1 = 0.5$, $(h_2 - h_1)/h_1 = 1.0$.

図4は、き裂長さ比 $a_0/h_1 = 0.2$ 、層厚比 $(h_2 - h_1)/h_1 = 1.0$ とした場合の応力拡大係数 K_{Ia} , K_{Ib} に及ぼすき裂位置 $(a+b)/2h_1$ の影響を示したグラフである。 K_{Ia} , K_{Ib} は E^* の減少に伴って増大し、 $E^* = 1.0, 10.0$ の場合の K_{Ia} , K_{Ib} は $(a+b)/2h_1$ の増大に伴って単調に減少する。また、 $E^* = 0.1$ の場合、 K_{Ia} , K_{Ib} は $(a+b)/2h_1$ の増大に伴い、最初は減少し、極小値を取った後増大する傾向を示しており、 $0.665 < (a+b)/2h_1 < 0.8$ では K_{Ib} が K_{Ia} より大となる。

Fig.4 Stress intensity factors for an embedded crack, $a_0/h_1 = 0.2$, $(h_2 - h_1)/h_1 = 1.0$.

次に、縁き裂 ($a/h_1 = 0.0$) の場合を検討する。図5は、 $b/h_1 = 0.8$ とした場合の無次元化された応力拡大係数 $K_{Ib}/\sigma_0(\pi b)^{1/2}$ に及ぼす層厚比 $(h_2 - h_1)/h_1$ の影響を示したグラフである。内部き裂の場合の図2と同様な傾向を示しており、 $(h_2 - h_1)/h_2$ の増大に伴い、 $E^* = 10.0$ の場合の応力拡大係数は増大し、 $E^* = 0.1, 0.5$ の場合は減少するが、 $E^* = 1.0$ の場合は一定 (1.1215) となる。

大係数 $K_{Ib}/\sigma_0(\pi b)^{1/2}$ に及ぼす層厚比 $(h_2 - h_1)/h_1$ の影響を示したグラフである。内部き裂の場合の図2と同様な傾向を示しており、 $(h_2 - h_1)/h_2$ の増大に伴い、 $E^* = 10.0$ の場合の応力拡大係数は増大し、 $E^* = 0.1, 0.5$ の場合は減少するが、 $E^* = 1.0$ の場合は一定 (1.1215) となる。

Fig.5 Stress intensity factor for an edge crack, $a/h_1 = 0.0$, $b/h_1 = 0.8$.

図6は、 $(h_2 - h_1)/h_2 = 1.0$ とした場合の無次元化された応力拡大係数に及ぼすき裂長さ比 b/h_1 の影響を示したものである。き裂長さの増大に伴い、無次元化された応力拡大係数 $K_{Ib}/\sigma_0(\pi b)^{1/2}$ は、 $E^* < 1.0$ の場合は増大、 $E^* = 10.0$ の場合は減少する。

Fig.6 Stress intensity factor for an edge crack, $a/h_1 = 0.0$, $(h_2 - h_1)/h_1 = 1.0$.

6. 結 言

本研究は、傾斜組成不均質界面層を有する積層弾性体を対象に、表面層に界面に垂直なき裂が存在する場合の特異応力を厳密に理論解析したものである。内部き裂および縁き裂の場合について数値計算を行い、層厚比、き裂長さ、き裂位置および材料特性が応力拡大係数に及ぼす影響を定量的に明らかにした。実際問題

で重要な $E^* < 1.0$ の場合に関して、本研究で得られた具体的な知見は、以下の通りである。

(1) 内部き裂および縁き裂の応力拡大係数を低減するためには、FGM 層の厚さを増大させる必要がある。

(2) 内部き裂の場合、き裂長さの増大に伴い、 K_{Ia} が急激に増大するため、発生したき裂は表面まで到達する傾向を示す。また、表面近くに発生したき裂は、表面に向かって進展する可能性が高い。

(3) 縁き裂の場合、応力拡大係数は、き裂長さの増大に伴って増大しており、発生した縁き裂は FGM 層まで到達する可能性が高い。

付 録

マトリックス $\mathbf{D}$ の要素 $d_{m,n}(s)$ ($m, n = 0 \sim 10$) は

$$d_{0,0}(s) = s, \quad d_{0,k}(s) = 0 \quad (k = 1 \sim 10) \quad (62)$$

$$\left. \begin{aligned} d_{1,0}(s) &= 0, \quad d_{1,1}(s) = 2s, \quad d_{1,2}(s) = 0, \\ d_{1,3}(s) &= -s(1 + \kappa), \quad d_{1,k}(s) = 0 \quad (k = 4 \sim 10) \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

$$\left. \begin{aligned} d_{2,k}(s) &= 0, \quad (k = 0, 1) \quad d_{2,2}(s) = s(1 - \kappa), \\ d_{2,3}(s) &= 0, \quad d_{2,4}(s) = 2s, \quad d_{2,k}(s) = 0 \quad (k = 5 \sim 10) \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

$$\left. \begin{aligned} d_{3,0}(s) &= 0, \quad d_{3,1}(s) = 2s \cosh(sh_1), \\ d_{3,2}(s) &= 2s^2 h_1 \cosh(sh_1) - s(1 + \kappa) \sinh(sh_1), \\ d_{3,3}(s) &= -s(1 + \kappa) \cosh(sh_1) + 2s^2 h_1 \sinh(sh_1), \\ d_{3,4}(s) &= 2s \sinh(sh_1), \\ d_{3,k}(s) &= \frac{\exp\{p_{k-4}(s)h_1\}}{\kappa - 1} \{(1 + \kappa)p_{k-4}(s) \\ &\quad \times q_{k-4}(s) + s(3 - \kappa)\} \quad (k = 5 \sim 8) \\ d_{3,k}(s) &= 0 \quad (k = 9, 10) \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

$$\left. \begin{aligned} d_{4,0}(s) &= 0, \quad d_{4,1}(s) = 2s \sinh(sh_1), \\ d_{4,2}(s) &= s(1 - \kappa) \cosh(sh_1) + 2s^2 h_1 \sinh(sh_1), \\ d_{4,3}(s) &= 2s^2 h_1 \cosh(sh_1) + s(1 - \kappa) \sinh(sh_1), \\ d_{4,4}(s) &= 2s \cosh(sh_1), \\ d_{4,k}(s) &= -\{(p_{k-4}(s) - sq_{k-4}(s)) \\ &\quad \times \exp\{p_{k-4}(s)h_1\} \quad (k = 5 \sim 8), \\ d_{4,k}(s) &= 0 \quad (k = 9, 10) \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

$$\left. \begin{aligned} d_{5,0}(s) &= 0, \quad d_{5,1}(s) = s \sinh(sh_1), \\ d_{5,2}(s) &= -s\kappa \cosh(sh_1) + s^2 h_1 \sinh(sh_1), \\ d_{5,3}(s) &= -s\kappa \sinh(sh_1) + s^2 h_1 \cosh(sh_1), \\ d_{5,4}(s) &= s \cosh(sh_1), \\ d_{5,k}(s) &= sq_{k-4}(s) \exp\{p_{k-4}(s)h_1\} \quad (k = 5 \sim 8), \\ d_{5,k}(s) &= 0 \quad (k = 9, 10) \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

$$\left. \begin{aligned} d_{6,0}(s) &= 0, \quad d_{6,1}(s) = s \cosh(sh_1), \\ d_{6,2}(s) &= s^2 h_1 \cosh(sh_1), \\ d_{6,3}(s) &= s^2 h_1 \sinh(sh_1), \quad d_{6,4}(s) = s \sinh(sh_1), \\ d_{6,k}(s) &= -s \exp\{p_{k-4}(s)h_1\} \quad (k = 5 \sim 8), \\ d_{6,k}(s) &= 0 \quad (k = 9, 10) \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

$$\left. \begin{aligned} d_{7,k}(s) &= 0 \quad (k = 0 \sim 4) \\ d_{7,k}(s) &= \frac{\exp\{p_{k-4}(s)h_2\}}{\kappa - 1} \{(1 + \kappa)p_{k-4}(s) \\ &\quad \times q_{k-4}(s) + s(3 - \kappa)\} \quad (k = 5 \sim 8), \\ d_{7,9}(s) &= 2s \exp(-sh_2), \\ d_{7,10}(s) &= \{2s^2 h_2 + s(1 + \kappa)\} \exp(-sh_2) \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

$$\left. \begin{aligned} d_{8,k}(s) &= 0 \quad (k = 0 \sim 4), \\ d_{8,k}(s) &= \{p_{k-4}(s) - sq_{k-4}(s)\} \\ &\quad \times \exp\{p_{k-4}(s)h_2\} \quad (k = 5 \sim 8), \\ d_{8,9}(s) &= 2s \exp(-sh_2), \\ d_{8,10}(s) &= \{2s^2 h_2 - s(1 - \kappa)\} \exp(-sh_2) \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

$$\left. \begin{aligned} d_{9,k}(s) &= 0 \quad (k = 0 \sim 4), \\ d_{9,k}(s) &= q_{k-4}(s) \exp\{p_{k-4}(s)h_2\} \quad (k = 5 \sim 8), \\ d_{9,9}(s) &= -\exp(-sh_2), \\ d_{9,10}(s) &= -(sh_2 + \kappa) \exp(-sh_2) \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

$$\left. \begin{aligned} d_{10,k}(s) &= 0 \quad (k = 0 \sim 4), \\ d_{10,k}(s) &= \exp\{p_{k-4}(s)h_2\} \quad (k = 5 \sim 8), \\ d_{10,9}(s) &= -\exp(-sh_2), \\ d_{10,10}(s) &= -sh_2 \exp(-sh_2) \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

列ベクトル $\mathbf{R}$ の要素 $R_n(s)$ ($n = 0 \sim 10$) は

$$R_n(s) = \frac{2}{1 + \kappa} \int_a^b r_n G(t) dt \quad (n = 0 \sim 8) \quad (73)$$

$$\left. \begin{aligned} r_0(s) &= -\exp(ist) dt \\ r_1(s) &= st \exp(-st) dt \\ r_2(s) &= (st - 1) \exp(-st) dt \\ r_3(s) &= -s(h_1 - t) \exp\{-s(h_1 - t)\} dt \\ r_4(s) &= \{s(h_1 - t) - 1\} \exp\{-s(h_1 - t)\} dt \\ r_5(s) &= \left\{ \frac{s(h_1 - t)}{2} - \frac{1 - \kappa}{4} \right\} \exp\{-s(h_1 - t)\} dt \\ r_6(s) &= \left\{ \frac{1 + \kappa}{4} - \frac{s(h_1 - t)}{2} \right\} \exp\{-s(h_1 - t)\} dt \\ r_k(s) &= 0 \quad (k = 7 \sim 10) \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

文 献

- (1) 未踏科学技術協会傾斜機能材料研究会編、傾斜機能材料、(1993)、工業調査会。
- (2) Erdogan, F. and Wu, B.H., *ASME, J. Appl. Mech.*, **64** (1997), 499-456.
- (3) Jin, Z.-H. and Batra, R.C., *J. Thermal Stresses*, **19** (1996), 317-339.
- (4) Noda, N., *J. Thermal Stresses*, **20** (1997), 373-387.
- (5) Bao, G and Wang, L., *Int. J. Solids Struct.*, **32** (1995), 2853-2871.
- (6) Lee, Y.-D. and Erdogan, F., *Int. J. Frac.*, **69** (1995), 145-165.
- (7) Choi, H.J., *ASME, J. Appl. Mech.*, **63**(1996), 479-486.
- (8) Kawasaki, A. and Watanabe, R., *Pro. 3rd. Int. Symp. Struct. FGM*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, (1994), 397-404.
- (9) Itoh, Y., Takahashi, M. and Takano, H., *FGM News*, **5** (1996), 3-8.
- (10) Delale, F. and Erdogan, F., *ASME, J. Appl. Mech.*, **50** (1983), 609-614.
- (11) Gupta, G.D., *Int. J. Solids Struct.*, **9** (1973), 1141-1154.