部分加熱を受ける多層体の一般化された熱弾性問題の解析*

古川 俊雄^{*1}, 中西 博^{*1}, 采山 博^{*2}

Generalized Thermoelasticity of Layered Medium Subjected to Partial Heating

Toshio FURUKAWA^{*3}, Hiroshi NAKANISHI and Hiroshi UNEYAMA

^{*3} Department of Mechanical and System Engineering, Kyoto Institute of Technology,
Goshokaido-cho, Matsugasaki, Sakyo-ku, Kyoto-shi, Kyoto, 606-8585 Japan

This paper deals with the two-dimensional generalized thermoelasticity based on the Lord and Shulman's theory and the Green and Lindsay's theory by use of the state space approach. The fundamental equations of generalized thermoelasticity, which include both generalized theories, are used. The generalized thermoelastic problem for a layered medium, which consists of homogeneous and isotropic layers and whose surface is traction free and subjected to a partial heating, is analyzed by means of the Laplace and Fourier transforms. The inversions of the Laplace and Fourier transforms are carried out numerically. The numerical calculations for temperature and stresses based on the Lord-Shulman's theory are carried out.

Key Words: Elasticity, Thermal Stress, Stress Wave, Laminated Construction, Generalized Thermoelasticity, State Space Approach, Partial Heating, Layer

1. 結 言

古典線形熱弾性理論には熱波の無限速度という物理的な矛盾があり, その矛盾を取り除いた理論が一般化された熱弾性理論である。最初に提案された理論は, フーリエの熱伝導方程式に緩和時間を導入することにより熱波の有限速度を考慮した Lord-Shulman の理論⁽¹⁾である。次に提案されたのが, エネルギー式と応力-ひずみ-温度関係式にそれぞれ緩和時間を導入することにより熱波の有限速度を考慮した Green-Lindsay の理論⁽²⁾である。野田ら⁽³⁾は両者の理論に共通した基礎式を提案して, 穴を有する有限体の解析を行っている。著者らはその基礎式を用いて, 平板の一次元問題⁽⁴⁾と二次元問題⁽⁵⁾の解析を行っている。

Bahar-Hetnarski は, 現代制御理論で用いられている状態空間法を, 連成熱応力の一次元問題⁽⁶⁾に適用し, 半無限体のラプラス像空間における解を求め, 多層体の一次元問題⁽⁷⁾に拡張している。Sherief らは状態空間法を一般化された熱弾性問題に適用し, 半無限

体⁽⁸⁾⁽⁹⁾, 無限体⁽⁹⁾の一次元問題, 厚板の二次元問題⁽¹⁰⁾を解析している。また, Misra らはランプ加熱を受ける半無限体⁽¹¹⁾を取扱っている。

この論文では Lord-Shulman 理論と Green-Lindsay 理論を含んだ基礎式を用いて, 多層体の二次元問題を状態空間法により解析し, 単層の場合との相違について検討する。従来の解析では層が増すごとに取扱う連立方程式の元数が増加するのに対して, 行列を用いる状態空間法は, 行列の乗算が増すものの行列の大きさは変わらないため, 多層体に対して有効な解法である。多層体ははじめ一様温度場にあり, 無応力状態であるとする。ラプラス変換とフーリエ変換を用いて像空間における解は解析的に求め, 逆変換は数値的に行う。

2. 解 析

図1のように, 部分加熱を受ける均質等方の n 層から構成される厚さ l の多層体の二次元問題を考える。各層の厚さは $l_i (i=1, 2, \dots, n)$ とし, 上下面の相対熱伝達率をそれぞれ, h_b, h_a とする。

L-S 理論と G-L 理論を含む一般化された熱弾性理論の基礎式は, 熱伝導方程式

* 原稿受付 2000年3月21日。

^{*1} 正員, 京都工芸繊維大学工学部(〒606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町)。

^{*2} (株)豊田自動織機製作所(〒448-8671 刈谷市豊田町2-1)。
E-mail: furukawa@ipc.kit.ac.jp

$$\kappa_i(T_{,xx} + T_{,yy}) - (T - T_0 + t_0 T_{,t})_{,t} \\ = (\lambda_i + 2\mu_i)\delta_i \gamma_i^{-1}(e + \delta_{1k} t_{0i} e_{,t})_{,t} \dots\dots\dots (1)$$

変位成分で表した運動方程式

$$\left. \begin{aligned} &(\lambda_i + 2\mu_i)u_{,xx} + \mu_i u_{,yy} + (\lambda_i + \mu_i)v_{,xy} \\ &- \gamma_i(T - T_0 + \delta_{2k} t_{1i} T_{,t})_{,x} = \rho_i u_{,tt} \\ &(\lambda_i + 2\mu_i)v_{,yy} + \mu_i v_{,xx} + (\lambda_i + \mu_i)u_{,xy} \\ &- \gamma_i(T - T_0 + \delta_{2k} t_{1i} T_{,t})_{,y} = \rho_i v_{,tt} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

応力-ひずみ-温度関係式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= (\lambda_i + 2\mu_i)u_{,x} + \lambda_i v_{,y} - \gamma_i(T - T_0 + \delta_{2k} t_{1i} T_{,t}) \\ \sigma_{yy} &= (\lambda_i + 2\mu_i)v_{,y} + \lambda_i u_{,x} - \gamma_i(T - T_0 + \delta_{2k} t_{1i} T_{,t}) \\ \sigma_{xy} &= \mu_i(u_{,y} + v_{,x}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

である。ここで、

$$e = u_{,x} + v_{,y}, \gamma_i = (3\lambda_i + 2\mu_i)\alpha_i \dots\dots\dots (4)$$

であり、 T は温度、 T_0 は初期温度、 u, v はそれぞれ変位の x 方向成分と y 方向成分、 σ_{ij} は応力成分、 t は時間、 κ は熱拡散率、 α は線膨張係数、 δ は連成係数、 ρ は密度、 λ, μ はラーメの定数、 t_0, t_1 は緩和時間、 δ_{ik} はクロネッカのデルタであり、 $k=1$ は L-S 理論に、 $k=2$ は G-L 理論に対応する。各記号の添字 i は対応する層の番号を表す。また、コンマは次の変数による微分を表す。

次に無次元量

$$\left. \begin{aligned} (\bar{x}, \bar{y}) &= \frac{c_{1n}}{\kappa_n}(x, y), (\tau, t_{0i}, t_{1i}) = \frac{c_{1n}^2}{\kappa_n}(t, t_{0i}, t_{1i}) \\ \theta &= \frac{\gamma_n(T - T_0)}{\lambda_n + 2\mu_n}, (\bar{u}, \bar{v}) = \frac{c_{1n}}{\kappa_n}(u, v), \\ \bar{\sigma}_{ij} &= \frac{\sigma_{ij}}{\mu_n \alpha_n T_0} \\ \bar{\gamma}_i &= \frac{\gamma_i}{\gamma_n}, \bar{\kappa}_i = \frac{\kappa_i}{\kappa_n}, \bar{\rho}_i = \frac{\rho_i}{\rho_n} \\ \bar{\delta}_i &= \frac{\beta_{1i}}{\beta_{1n} \bar{\gamma}_i \bar{\kappa}_i} \delta_i, \beta_{1i} = \frac{\lambda_i + 2\mu_i}{\mu_n}, \beta_{2i} = \frac{\mu_i}{\mu_n} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

を導入する。ここで、 c_1 は縦波の伝ば速度である。

式(5)を式(1)~(4)に代入し、同次初期条件

Fig. 1 Analytical model and Cartesian coordinate system

$\tau=0; \theta=\theta_{,\tau}=0, \bar{u}=\bar{u}_{,\tau}=0, \bar{v}=\bar{v}_{,\tau}=0 \dots\dots (6)$
のもとで時刻 τ に関してラプラス変換を行い、その後変数 $\bar{x}$ に関してフーリエ変換すると

$$\bar{\theta}^*_{,\bar{y}\bar{y}} - \left\{ \frac{1}{\bar{\kappa}_i}(1 + t_{0i}s) + q^2 \right\} \bar{\theta}^* \dots\dots\dots (7)$$

$$\left. \begin{aligned} &= \bar{\delta}_i s(1 + \delta_{1k} t_{0i} s)(i q \bar{u}^* + \bar{v}^*_{,\bar{y}}) \\ &- q^2 \beta_{1i} \bar{u}^* + \beta_{2i} \bar{u}^*_{,\bar{y}\bar{y}} + (\beta_{1i} - \beta_{2i}) i q \bar{v}^*_{,\bar{y}} \\ &- \bar{\gamma}_i \beta_{1n}(1 + \delta_{2k} t_{1i} s) i q \bar{\theta}^* = \bar{\rho}_i \beta_{1n} s^2 \bar{u}^* \\ &- q^2 \beta_{2i} \bar{v}^* + \beta_{1i} \bar{v}^*_{,\bar{y}\bar{y}} + (\beta_{1i} - \beta_{2i}) i q \bar{u}^*_{,\bar{y}} \\ &- \bar{\gamma}_i \beta_{1n}(1 + \delta_{2k} t_{1i} s) \bar{\theta}^*_{,\bar{y}} = \bar{\rho}_i \beta_{1n} s^2 \bar{v}^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}^*_{xx} &= \frac{1}{\alpha_n T_0} \{ \beta_{1i} i q \bar{u}^* + (\beta_{1i} - 2\beta_{2i}) \bar{v}^*_{,\bar{y}} \\ &- \bar{\gamma}_i \beta_{1n}(1 + \delta_{2k} t_{1i} s) \bar{\theta}^* \} \\ \bar{\sigma}^*_{yy} &= \frac{1}{\alpha_n T_0} \{ \beta_{1i} \bar{v}^*_{,\bar{y}} + (\beta_{1i} - 2\beta_{2i}) i q \bar{u}^* \\ &- \bar{\gamma}_i \beta_{1n}(1 + \delta_{2k} t_{1i} s) \bar{\theta}^* \} \\ \bar{\sigma}^*_{xy} &= \frac{\beta_{2i}}{\alpha_n T_0} (\bar{u}^*_{,\bar{y}} + i q \bar{v}^*) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

が得られる。ここで、 $*$ を付した量はラプラス変換された量を、 $\wedge$ を付した量はフーリエ変換された量を表し、それぞれの変換パラメータを s と q で表す。また i は虚数単位である。

3. 状態空間法による定式化

変換場における状態変数として

$$\bar{u}^*, \bar{v}^*, \bar{\theta}^*, D\bar{u}^*, D\bar{v}^*, D\bar{\theta}^*$$

をとることにする。ただし、 $D = \partial/\partial \bar{y}$ である。式(7)、(8)は三つの恒等式を含めることにより次式のような行列形で表すことができる。

$$\frac{dV(q, \bar{y}, s)}{d\bar{y}} = A_i(q, s) V(q, \bar{y}, s) \dots\dots\dots (10)$$

ここで、

$$V(q, \bar{y}, s) = \{ \bar{u}^*, \bar{v}^*, \bar{\theta}^*, D\bar{u}^*, D\bar{v}^*, D\bar{\theta}^* \}^T$$

$$A_i(q, s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41i} & 0 & a_{43i} & 0 & a_{45i} & 0 \\ 0 & a_{52i} & 0 & a_{54i} & 0 & a_{56i} \\ a_{61i} & 0 & a_{63i} & 0 & a_{65i} & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_{41i} = \frac{\beta_{1i}}{\beta_{2i}}(a_{52i} + i q a_{54i}), a_{43i} = \frac{\beta_{1i}}{\beta_{2i}} i q a_{56i}$$

$$a_{45i} = \frac{\beta_{1i}}{\beta_{2i}} a_{54i}, a_{52i} = \frac{1}{\beta_{1i}} (\bar{\rho}_i \beta_{1n} s^2 + q^2 \beta_{2i})$$

$$a_{54i} = \frac{1}{\beta_{1i}} i q (\beta_{2i} - \beta_{1i}), a_{56i} = \frac{\beta_{1n}}{\beta_{1i}} \bar{\gamma}_i (1 + \delta_{2k} t_{1i} s)$$

$$a_{61i} = i q a_{65i}, a_{63i} = q^2 + \frac{1}{\bar{\kappa}_i} (1 + t_{0i} s) s$$

$$a_{65i} = s(1 + \delta_{1k} t_{0i} s) \bar{\delta}_i$$

であり、肩添字 T は転置を表す。式(10)を解くことにより次式が得られる。

$$V(q, \bar{y}, s) = \exp\{A_i(q, s)(\bar{y} - \bar{y}_{i-1})\} V(q, \bar{y}_{i-1}, s) \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 $\bar{y}_{i-1}$ は第 i 層下端の $\bar{y}$ 座標であり、 $\bar{y}_0 = 0$ とする。行列 $A_i(q, s)$ の特性方程式は

$$p^6 - b_{1i}p^4 + b_{2i}p^2 - b_{3i} = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} b_{1i} &= a_{41i} + a_{52i} + a_{63i} + a_{45i}a_{54i} + a_{56i}a_{65i} \\ b_{2i} &= a_{41i}(a_{52i} + a_{63i} + a_{56i}a_{65i}) + a_{52i}a_{63i} \\ &\quad - a_{43i}(a_{61i} + a_{54i}a_{65i}) + a_{45i}(a_{54i}a_{63i} - a_{56i}a_{61i}) \\ b_{3i} &= a_{52i}(a_{41i}a_{63i} - a_{43i}a_{61i}) \end{aligned}$$

である。式(12)を解くことにより

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} \frac{p_{1i}^2}{p_{2i}^2} &= \frac{1}{2} \left\{ b_{1i} - p_{3i} \pm \sqrt{(b_{1i} - p_{3i})^2 - \frac{4b_{3i}}{p_{3i}^2}} \right\} \\ p_{3i} &= \frac{\beta_{1i}}{\beta_{2i}} a_{52i} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

となる。

Cayley-Hamilton の定理により、行列 A_i もその特性方程式(12)を満たすことから

$$A_i^6 - b_{1i}A_i^4 + b_{2i}A_i^2 - b_{3i}I = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

が得られる。ここで I は 6 次の単位行列である。この式より A_i の 6 乗以上の行列は A_i の 5 乗以下の行列で表せることがわかる。したがって指数行列 $\exp\{A_i(q, s)Y\}$ は、近似することなく次式のように A_i の有限べき乗の項の和で表現できる。

$$\exp(A_i Y) = c_{0i}I + c_{1i}A_i + c_{2i}A_i^2 + c_{3i}A_i^3 + c_{4i}A_i^4 + c_{5i}A_i^5 \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここで、未定係数 $c_{ji} (j=0, 1, \dots, 5)$ は、行列 A_i を式(13)の特性根 $\pm p_{1i}, \pm p_{2i}, \pm p_{3i}$ で置換することにより次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} c_{0i} &= -(p_{2i}^2 p_{3i} R_{1i} + p_{3i}^2 p_{1i} R_{2i} + p_{1i}^2 p_{2i} R_{3i}) / \Delta_i \\ c_{1i} &= -(p_{2i}^2 p_{3i} S_{1i} + p_{3i}^2 p_{1i} S_{2i} + p_{1i}^2 p_{2i} S_{3i}) / \Delta_i \\ c_{2i} &= \{(p_{2i}^2 + p_{3i}^2) R_{1i} + (p_{3i}^2 + p_{1i}^2) R_{2i} \\ &\quad + (p_{1i}^2 + p_{2i}^2) R_{3i}\} / \Delta_i \\ c_{3i} &= \{(p_{2i}^2 + p_{3i}^2) S_{1i} + (p_{3i}^2 + p_{1i}^2) S_{2i} \\ &\quad + (p_{1i}^2 + p_{2i}^2) S_{3i}\} / \Delta_i \\ c_{4i} &= -(R_{1i} + R_{2i} + R_{3i}) / \Delta_i \\ c_{5i} &= -(S_{1i} + S_{2i} + S_{3i}) / \Delta_i \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \Delta_i &= (p_{1i}^2 - p_{2i}^2)(p_{2i}^2 - p_{3i}^2)(p_{3i}^2 - p_{1i}^2) \\ R_{1i} &= (p_{2i}^2 - p_{3i}^2) \cosh\{p_{1i}(\bar{y} - \bar{y}_{i-1})\} \\ R_{2i} &= (p_{3i}^2 - p_{1i}^2) \cosh\{p_{2i}(\bar{y} - \bar{y}_{i-1})\} \\ R_{3i} &= (p_{1i}^2 - p_{2i}^2) \cosh\{p_{3i}(\bar{y} - \bar{y}_{i-1})\} \end{aligned}$$

$$S_{1i} = (p_{2i}^2 - p_{3i}^2) \sinh\{p_{1i}(\bar{y} - \bar{y}_{i-1})\} / p_{1i}$$

$$S_{2i} = (p_{3i}^2 - p_{1i}^2) \sinh\{p_{2i}(\bar{y} - \bar{y}_{i-1})\} / p_{2i}$$

$$S_{3i} = (p_{1i}^2 - p_{2i}^2) \sinh\{p_{3i}(\bar{y} - \bar{y}_{i-1})\} / p_{3i}$$

である。

$$F_i(q, \bar{y} - \bar{y}_{i-1}, s) = \exp\{A_i(q, s)(\bar{y} - \bar{y}_{i-1})\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

とおくと、式(10)は次式のように書き直すことができる。

$$V(q, \bar{y}, s) = F_i(q, \bar{y} - \bar{y}_{i-1}, s) V(q, \bar{y}_{i-1}, s) \quad \dots\dots\dots (18)$$

界面で連続しなければならない物理量は、温度 T 、熱流束 q_t 、変位 u, v と応力 σ_{yy}, σ_{xy} である。第 i 層と第 $(i-1)$ 層の界面の $\bar{y}$ 座標 $\bar{y}_{i-1}$ に対して、第 i 層側を $\bar{y}_{i-1}^+$ 、第 $(i-1)$ 層側を $\bar{y}_{i-1}^-$ とすれば、

$$\left. \begin{aligned} \hat{\theta}^*(q, \bar{y}_{i-1}^+, s) &= \hat{\theta}^*(q, \bar{y}_{i-1}^-, s), \\ \hat{q}_t^*(q, \bar{y}_{i-1}^+, s) &= \hat{q}_t^*(q, \bar{y}_{i-1}^-, s) \\ \hat{u}^*(q, \bar{y}_{i-1}^+, s) &= \hat{u}^*(q, \bar{y}_{i-1}^-, s), \\ \hat{v}^*(q, \bar{y}_{i-1}^+, s) &= \hat{v}^*(q, \bar{y}_{i-1}^-, s) \\ \hat{\sigma}_{yy}^*(q, \bar{y}_{i-1}^+, s) &= \hat{\sigma}_{yy}^*(q, \bar{y}_{i-1}^-, s) \\ \hat{\sigma}_{xy}^*(q, \bar{y}_{i-1}^+, s) &= \hat{\sigma}_{xy}^*(q, \bar{y}_{i-1}^-, s) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (19)$$

で表される。ただし、 $\bar{q}_t = \kappa_n \gamma_n q_t / \rho_n k_n c_n^2$ である。

修正されたフーリエの熱伝導式は

$$q_t + \delta_{1k} \tau_{0i} q_{t,t} = -k_i T_{,y} \quad \dots\dots\dots (20)$$

で表すことができる。ここで k は熱伝導率である。式(20)を無次元化し、さらにラプラス変換、フーリエ変換を行うと

$$(1 + \delta_{1k} \tau_{0i} s) \hat{q}_t^* = -\bar{k}_i \hat{\theta}^*_{,y} \quad \dots\dots\dots (21)$$

となる。ただし、 $\bar{k}_i = k_i / k_n$ である。式(21)を式(19)の第2式に代入し整理すると

$$D \hat{\theta}^*(q, \bar{y}_{i-1}^+, s) = \frac{\bar{k}_{i-1}(1 + \delta_{1k} \tau_{0i} s)}{\bar{k}_i(1 + \delta_{1k} \tau_{0(i-1)} s)} D \hat{\theta}^*(q, \bar{y}_{i-1}^-, s) \quad \dots\dots\dots (22)$$

となる。また、式(19)の第5式を式(9)の第2式に代入し、式(19)の第3,4式を利用して整理すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} D \hat{v}^*(q, \bar{y}_{i-1}^+, s) &= \frac{1}{\beta_{1i}} [-iq\{\beta_{1i} - 2\beta_{2i} - (\beta_{1(i-1)} - 2\beta_{2(i-1)})\} \\ &\quad \times \hat{u}^*(q, \bar{y}_{i-1}^-, s) + \beta_{1n}\{\bar{\gamma}_i(1 + \delta_{2k} \tau_{1i} s) \\ &\quad - \bar{\gamma}_{i-1}(1 + \delta_{2k} \tau_{1(i-1)} s)\} \hat{\theta}^*(q, \bar{y}_{i-1}^-, s) \\ &\quad + \beta_{1(i-1)} D \hat{v}^*(q, \bar{y}_{i-1}^-, s)] \quad \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

同様に、式(18)の第6式から以下の式が導かれる。

$$\begin{aligned} D \hat{u}^*(q, \bar{y}_{i-1}^+, s) &= \frac{1}{\beta_{2i}} \{-iq(\beta_{2i} - \beta_{2(i-1)}) \hat{v}^*(q, \bar{y}_{i-1}^-, s) \\ &\quad + \beta_{2(i-1)} D \hat{u}^*(q, \bar{y}_{i-1}^-, s)\} \quad \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

これらの関係式を行列形で表すと

$$V(q, \bar{y}_{i-1}, s) = P_{i-1}(q, s) V(q, \bar{y}_{i-1}, s) \cdots \cdots (25)$$

となる。ただし、

$$P_{i-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{42i} & 0 & d_{44i} & 0 & 0 \\ d_{51i} & 0 & d_{53i} & 0 & d_{55i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{66i} \end{bmatrix}$$

$$d_{42i} = iq(d_{44i} - 1), d_{44i} = \frac{\beta_{2(i-1)}}{\beta_{2i}}$$

$$d_{51i} = -\frac{iq}{\beta_{1i}} \{ \beta_{1i} - 2\beta_{2i} - (\beta_{1(i-1)} - 2\beta_{2(i-1)}) \}$$

$$d_{53i} = d_{55i} \{ \bar{\gamma}_i (1 + \delta_{2k} \tau_{1i} s) - \bar{\gamma}_{i-1} (1 + \delta_{2k} \tau_{1(i-1)} s) \}$$

$$d_{55i} = \frac{\beta_{1(i-1)}}{\beta_{1i}}, d_{66i} = \frac{\bar{k}_{i-1} (1 + \delta_{1k} \tau_{0(i-1)} s)}{\bar{k}_i (1 + \delta_{1k} \tau_{0(i-1)} s)}$$

式(25)によって第*i*層と第(*i*-1)層の界面における状態ベクトルを関係づけることができる。式(25)を式(18)に代入すると

$$V(q, \bar{y}, s) = F_i(q, \bar{y} - \bar{y}_{i-1}, s) P_{i-1}(q, s) \times V(q, \bar{y}_{i-1}, s) \cdots \cdots (26)$$

となる。この操作を繰返すことにより、多層体内部の任意の位置における状態ベクトルを、 $\bar{y}=0$ の面における状態ベクトル $V(q, 0, s)$ によって次式のように表現することができる。

$$V(q, \bar{y}, s) = G(q, \bar{y}, s) V(q, 0, s) \cdots \cdots (27)$$

ここで、

$$G(q, \bar{y}, s) = F_i(q, \bar{y} - \bar{y}_{i-1}, s) P_{i-1}(q, s) \times F_{i-1}(q, \bar{y}_{i-1} - \bar{y}_{i-2}, s) \cdots P_2(q, s) F_2(q, \bar{y}_2 - \bar{y}_1, s) P_1(q, s) F_1(q, \bar{y}_1, s)$$

である。これより、層が増すと行列の乗算は増すものの、行列の大きさはかわらないことがわかる。

$\bar{y}=0$ の面における状態ベクトル $V(q, 0, s)$ は境界条件から決定することができる。層の表面で外力が作用しない場合を考えると力学的境界条件式は

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}=0; \hat{\sigma}_{yy}^* = \hat{\sigma}_{xy}^* = 0 \\ \bar{y}=\bar{l}; \hat{\sigma}_{yy}^* = \hat{\sigma}_{xy}^* = 0 \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (28)$$

となる。ここで、 $\bar{l} = c_{1n} l / \kappa_n$ である。

$y=l$ の面で局部熱源 $r(x, t)$ が作用する場合を考えることにすると、熱的境界条件式は

$$y=l; q_t + k_n h_b (T - T_0) = r \cdots \cdots (29)$$

となる。無次元量

$$\bar{r}(\bar{x}, \tau) = \frac{\gamma_n \kappa_n}{\rho_n k_n c_n} r(x, t), H_b = \frac{\kappa_n}{c_n} h_b$$

を用いて無次元化し、さらにラプラス変換とフーリエ変換を行った後、式(21)を用いることにより

$$\bar{y} = \bar{l}; \hat{\theta}_{\bar{y}}^* + H_b (1 + \tau_{0n} s) \hat{\theta}^* = (1 + \tau_{0n} s) \bar{r}^* \cdots (30)$$

が得られる。同様にして

$$\bar{y}=0; -\hat{\theta}_{\bar{y}}^* + H_a (1 + \tau_{01} s) \hat{\theta}^* = 0 \cdots \cdots (31)$$

が得られる。ここで、 $H_a = \bar{k}_1 h_a \kappa_n / c_n$ である。 $\bar{y} = \bar{l}$ の面における状態ベクトル $V(q, \bar{l}, s)$ は、式(27)を用いることにより次式のように $V(q, 0, s)$ と関係づけられる。

$$V(q, \bar{l}, s) = G(q, \bar{l}, s) V(q, 0, s) \cdots \cdots (32)$$

したがって、境界条件式(28)、(30)、(31)と式(32)から $\bar{y}=0$ の面における状態ベクトル $V(q, 0, s)$ を決定することができる。これにより、変換場における温度、変位および応力が得られる。

4. 数値計算と考察

多層にすることによる温度と熱応力の影響を調べるため、数値計算は、単層、二層および三層から構成される場合に対して行う。単層板の材料は部分安定化ジルコニウム(PSZ)、二層板の材料は第一層がステンレス鋼(SUS 304)、第二層がPSZ、三層板の材料は第一層がSUS 304、第二層が銅、第三層がPSZとし、各材料の機械的性質と熱的性質を表1に示す。無次元厚さ $\bar{l}$ は1とし、二層板に対しては、 $\bar{l}_1 = \bar{l}_2 = 0.5$ 、三層板に対しては $\bar{l}_1 = \bar{l}_3 = 0.4$ 、 $\bar{l}_2 = 0.2$ を用いる。数値計算には、二つの理論のうち、いくつかの緩和時間に対して数値が与えられており、物理的意味も明確であるLord-Shulman理論を用いる。銅⁽¹⁰⁾以外の緩和時間のデータは不明であるため、傾斜機能材料⁽¹²⁾に対する取扱いと同様に、いずれの材料に対しても同一の無次元緩和時間0.02を用いることにする。ピオ数は以下のようにする。

単層板に対しては、 $H_a = H_b = 1$

二層板と三層板に対しては、 $H_b = 1$, $H_a = H_b / \bar{k}_1$

局部熱源は

$$\bar{r}(\bar{x}, \tau) = \exp(-10|\bar{x}|) H(\tau) \exp(-\tau)$$

とする。ここで、 $H(\)$ はヘビサイドの階段関数である。

ラプラス逆変換とフーリエ逆変換は数値的に行い、前者には細野の方法⁽¹³⁾を、後者に対してはFillonの

Table 1 Mechanical and thermal properties

	PSZ	SUS304	Cu
ν	0.30	0.30	0.33
E (GPa)	211	193	130
α (1/K)	2.93×10^{-6}	14.9×10^{-6}	16.8×10^{-6}
c_p (J/kg·K)	467	361	383
k (W/m·K)	1.67	16.0	386
ρ (kg/m ³)	5730	7930	8960
δ	0.0006	0.013	0.018

(a) Single layer

(b) Double layers

(c) Triple layers

Fig. 2 Temperature distributions ($\tau=0.6$)

Fig. 3 Temperature distribution based on the coupled theory and L-S theory (single layer)

方法⁽¹⁴⁾を用いる。

図2は単層板、二層板および三層板の時刻 $\tau=0.6$ における温度分布を示したものである。この時刻では応力波の波頭は二層板および三層板において第二層にきている。単層板では熱がなめらかに分布しているが、 $\bar{x}=0$ の面をみると、二層板では界面の $\bar{y}=0.5$ で、三層板では界面の $\bar{y}=0.6$ で温度こう配が急激に変化しており、金属部での温度上昇が抑制されていることがわかる。

図3は単層板の $\bar{x}=0$ の面における連成理論と L-S 理論の温度分布を示したものである。加熱初期の $\tau=0.2$ では二つの理論に若干の差がみられるものの、 $\tau=0.6$ ではほとんど差異はみられない。円柱穴を有す

(a) Single layer

(b) Double layers

(c) Triple layers

Fig. 4 Stress distributions $\bar{\sigma}_{xx}(\tau=0.6)$

る無限体⁽³⁾のように明確な差異が現れない理由として、加熱幅が狭いことと加熱時間が短いことが考えられる。また、熱波は応力波の約7倍の速度であるため、熱波の波頭位置における温度分布の乱れもみられない。

図4, 5は、それぞれ、単層板、二層板および三層板の時刻 $\tau=0.6$ における応力 $\bar{\sigma}_{xx}$ と $\bar{\sigma}_{yy}$ の分布を示したものである。全体的に応力分布は加熱面から遠ざかるにつれて大きさが減少しており、 $\bar{\sigma}_{yy}$ は特に加熱の影響が限られていることがわかる。 $\bar{y}=0.4$ 近傍に応力波の波頭がきており、大きな圧縮応力が生じている。波頭の前後における応力の乱れも大きく、それらをわかりやすくするために、加熱中心($\bar{x}=0$)断面上の応力分布を図6, 7に示した。応力波の波頭位置にお

ける $\bar{\sigma}_{xx}$ についてみると、二層板では単層板よりも応力が大きくなるが、三層板では、中間層の効果で応力が小さくなり、単層板と同程度になっている。 $\bar{\sigma}_{yy}$ については波頭以外についての挙動は異なるものの波頭位置における応力の大きさはいずれの場合も同程度である。図4における $\bar{x}$ 方向の分布について詳しくみるために、図8に加熱面($\bar{y}=1$)上の $\bar{\sigma}_{xx}$ 分布を示した。波頭の位置である $\bar{x}=0.6$ において大きな応力が生じているが、その影響は $\bar{x}$ が増加するにつれて急激に減少していくことがわかる。波頭の位置における応力の大きさは、加熱断面上の応力とは異なり、層が増すにつれて減少している。

(a) Single layer

(b) Double layers

(c) Triple layers

Fig. 5 Stress distributions $\bar{\sigma}_{yy}(\tau=0.6)$ Fig. 6 Stress distributions $\bar{\sigma}_{xx}$ at the cross-section $\bar{x}=0(\tau=0.6)$ Fig. 7 Stress distributions $\bar{\sigma}_{yy}$ at the cross-section $\bar{x}=0(\tau=0.6)$ Fig. 8 Stress distributions $\bar{\sigma}_{xx}$ at the heating surface $\bar{y}=1(\tau=0.6)$

5. 結 言

本研究では、部分加熱を受ける多層体の二次元熱応力解析を、状態空間法を用いて、二つの一般化された熱弾性理論に基づいて行った。状態空間法は層が増えても取扱う行列の大きさは変わらないため、多層体に適した解法である。数値計算は単層板、二層板および三層板について行い、層を増すことによる熱応力緩和効果について調べた。本数値計算に用いた加熱条件と材料の組み合わせにおいては、熱波の有限速度の影響はあまりみられず、また多層にすることによる熱応力緩和も加熱面上の応力分布を除いてそれほどみられなかった。加熱条件などを変えることによって熱波の有限速度の影響と多層にすることによる熱応力緩和についてさらに検討を行う必要がある。

文 献

- (1) Lord, H. W. and Shulman, Y., A Generalized Dynamical Theory of Thermoelasticity, *J. Mech. Phys. Solids*, **15**(1967), 299-307.
- (2) Green, A. E. and Lindsay, K. A., Thermoelasticity, *J. Elasticity*, **2**-1(1972), 1-7.
- (3) Noda, N., Furukawa, T. and Ashida, F., Generalized Thermoelasticity in an Infinite Solid with a Hole, *J. Thermal Stresses*, **12**(1989), 385-402.
- (4) Furukawa, T., Konishi, M., Ding, X. F. and Nakanishi, H., Generalized Thermoelasticity in One Dimensional Plate under Some Support Conditions, *1st Int. Symp. Thermal Stresses and Related Topics*, (1995), 283-286.
- (5) Furukawa, T., Konishi, M., Ding, X. F. and Nakanishi, H., Generalized Thermoelasticity in a Plate Subjected to Partial Heating under Some Constraint Conditions, *2nd Int. Symp. Thermal Stresses and Related Topics*, (1997), 63-66.
- (6) Bahar, L. Y. and Hetnarski, R. B., State Space Approach to Thermoelasticity, *J. Thermal Stresses*, **1**-1(1978), 135-145.
- (7) Bahar, L. Y. and Hetnarski, R. B., Coupled Thermoelasticity of a Layered Medium, *J. Thermal Stresses*, **3**-1(1980), 141-152.
- (8) Anwar, M. N. and Sherief, H. H., State Space Approach to Generalized Thermoelasticity, *J. Thermal Stresses*, **11**-4(1988), 353-365.
- (9) Sherief, H. H., State Space Formulation for Generalized Thermoelasticity with One Relaxation Time including Heat Sources, *J. Thermal Stresses*, **16**-2(1993), 163-180.
- (10) Sherief, H. H. and Anwar, M. N., State-Space Approach to Two-Dimensional Generalized Thermoelasticity Problems, *J. Thermal Stresses*, **17**-4(1994), 567-590.
- (11) Misra, J. C., Chattopadhyay, N. C. and Samanta, S. C., Study of the Thermoelastic Interactions in an Elastic Half-space subjected to a Ramp-type Heating-a State-Space Approach, *Int. J. Eng. Sci.*, **34**-5(1996), 579-596.
- (12) 須見尚文, 特性曲線法による傾斜機能材料の熱波および熱応力波の伝ば挙動, *機論*, **65**-638, A(1999), 2169-2176.
- (13) 細野敏夫, BASIC による高速ラプラス変換, (1984), 15-66, 164-165, 共立出版.
- (14) 雨宮綾夫・田口武夫(編), 数値解析と FORTRAN 増補 2 版, (1971), 185-193, 504-505, 丸善.