フリーメッシュ法を用いたアダプティブ弾塑性解析*

伊藤 久雄^{*1}, 渡部 修^{*2}

Adaptive Elasto-Plastic Analysis Using Free Mesh Method

Hisao ITO and Osamu WATANABE^{*3}

^{*3} Institute of Engineering Mechanics, University of Tsukuba, Tsukuba-shi, Ibaraki, 305-8573 Japan

The present paper describes the adaptive Free Mesh Method (adaptive-FMM) applied to elasto-plastic large deformation analysis. The adaptive-FMM is a combined technique to incorporating adaptive remeshing technique in Free Mesh Method. The present paper shows the formulation of adaptive-FMM in elasto-plastic analysis to investigate the validity of the present method in 2-Dimensional and 3-Dimensional analysis. The adaptive remeshing technique is based on h-approach, and compared to conventional FEM and FMM numerical results for largely deformed shear problem. The present paper also describes the 3-Dimensional Delaunay method used in making local mesh geometry around the central node.

Key Words: Finite Element Method, Elasto-Plastic Analysis, Adaptive h-Method, Free Mesh Method, Remeshing

1. 緒 言

付加価値の高い工業製品の生産に向け、設計現場での数値解析は複雑形状を扱うため大規模なものになっている。計算機技術の進歩に伴い、領域分割法など並列有限要素解析技術は、従来では扱えなかった大規模問題の解析を可能なものになっている。しかし、大規模解析におけるソルバー部の研究は進んでいるものの、メッシュ生成の研究は現在でも検討が続けられている。要素の自動分割の研究は、三次元複雑形状に向けられているほか、入力情報に要素-節点データを必要としないメッシュレス解析法⁽¹⁾の研究も精力的に行われている。

これまでに著者らはメッシュレス法の一つであるフリーメッシュ法(以下、FMM)を弾塑性大変形問題に適用し、数値解の精度⁽²⁾と分散並列環境への適応性⁽³⁾について検討を行ってきた。Node-by-Node処理を基本とするFMMでは、節点周りに作成する一時的な

要素に基づいて節点の剛性を評価する。このため、節点での情報集約化の過程で解の平均化が起こり精度が若干低下するが、局所変形を追跡できるだけの節点がある場合にはFEMと同等の精度を有することを示した。このとき、この手法では要素分割に依存した局所変形を防止できる安定した数値解が得られる。またFEMの要素分割に相当する部分も並列環境に容易に乗せられるため、分散並列計算を適用することにより解析作業全体の省力化に有効であることを示した。フリーメッシュ法では、変形途中で要素-節点関係を動的に変えることができるため、このリメッシュアルゴリズムが数値解の精度改善に役立つことを示した。

FMMではデータの基本構造単位が節点であり、解析途中での動的な節点移動・生成が容易に行える。本論文ではメッシュレス法の利点のひとつであるアダプティブ法をフリーメッシュ法に適用するための定式化を行い、せん断問題を例に、数値解の精度改善の効果について検証することを目的としている。要素分割を伴うアダプティブh法を局所的あるいは大域的に適用する。また、これまでは二次元FMM弾塑性解析であったが、本研究では三次元に拡張するための検討も示す。

* 原稿受付 2000年4月10日。

^{*1} 准員、新日本製鉄(株)エレクトロニクス・情報通信事業部(元:筑波大院)。

^{*2} 正員、筑波大学機能工学系(☎305-8573 つくば市天王台1-1-1)。

E-mail: watanabe@kz.tsukuba.ac.jp

2. フリーメッシュ法

2・1 基礎概念 FMM では、剛性評価の空間領域単位として従来の FEM と同様に要素という概念を用いているため、FEM の解析手法を比較的容易に FMM に適用することが可能である。FMM では図 1 に示すように、各節点を中心節点としてその近傍に存在する衛星節点と呼ばれる節点群を用いて、一時的に中心節点に関するローカルメッシュと呼ばれる二次元では三角形要素、三次元では四面体要素群を作成する。

従来の FEM ではメッシュ生成部とメインソルバー部は分離したものとなっているが、FMM では局所的なメッシュ生成と要素剛性行列作成が一体化しているため、全体剛性行列の組立作業は各中心節点ごとに一貫してしかも独立に行える。各中心節点ごとの計算では近傍にある衛星節点の情報のみが必要とされ、データ参照の局所性が存在するため、分散並列計算に容易に応用できる。すなわち、従来の FEM のメッシュ生成に相当する処理も並列計算できるため、プレプロセスの負荷を軽減するだけでなく、解析モデル修正が多数回要求されるアダプティブ解析で計算時間を抑制することが期待できる。

2・2 ローカルメッシュ作成法 できるだけゆがみの少ないローカルメッシュを作成するための衛星節点選択手法として、著者は谷口らの Delaunay 分割法⁽⁴⁾⁽⁵⁾を局所的に適用する方法を用い、二次元問題でその有効性を確認している。本研究の三次元 FMM 解析ではこれを三次元空間に拡張した局所的な三次元 Delaunay 分割法を用いる。そのアルゴリズムを以下に示す。

(A) 検索半径内にある候補節点(点 $m, n, o, p, \dots$)を集め、異なる節点密度場を持つ系に対しても同一のアルゴリズムで処理できるように、各 x, y, z 方向における検索球内の節点座標値の差の最大値が 1 となるようにスケーリングを行うと同時に、中心節点が原点

Fig. 1 Temporary elements created around the central node

となるような局所座標系を設定する。以後の操作はすべてこのスケーリング後の局所座標系で行う。

(B) 検索球を内包する仮想四面体(スーパーテトラ)を設定する [図 2(a)]。スーパーテトラの各頂点を表す a, b, c, d はスーパーテトラが検索球を内包しているという条件を満たせば任意に定めることができる。ここではスーパーテトラの外接球半径を 10 とし、その中心を局所座標系の原点に置いている。二次元、三次元とも、検索半径は 10 としている。

(C) (A) で選ばれた候補節点と中心節点を、グローバルな節点番号の小さい順に並び替える。グローバルな節点番号は、ソルバーでバンド幅が最小となるようあらかじめ最適化して番号付けがされている。ここで検索球内の節点番号を並べ替える操作は、スーパーテトラ内の空間に節点を追加する順番を一意付けして、隣り合う節点をそれぞれ中心節点としたときにローカルメッシュの不整合を防ぐという目的を持つ。

(D) 節点番号の最も小さい節点をスーパーテトラ内に設置し、スーパーテトラを四つの小四面体に分割する [図 2(b)]。

(E) 2 番めに番号の小さい節点をスーパーテトラ内の空間に設置し、その節点を包含する四面体を探索する。さらにその節点を包含する外接球を持つ四面体をすべて拾い出す。

(F) (E) で拾い上げた四面体集合において、互いの接続面となっている三角形を取り除き、多面体を作る。さらにその多面体表面の三角形と新しく設置した節点とで、新たな四面体群を作成する。わかりやすくするために二次元に置き換えて (E) と (F) を図示すると、図 2(c) のようになる。灰色の三角形が新しく追

Fig. 2 Delaunay method used for 3-D local mesh subdivision

加された節点を内包する要素で、細線が旧要素分割、太線が新要素分割を表している。

(G) (E)と(F)を同様に残りすべての節点に適用する。

(H) 最後にスーパテトラを取り除き、中心節点を含む四面体要素だけを抽出する [図2(d)]。

2・3 剛性評価法 FMMでは2・2節で作成した局所的な要素-節点情報を基に要素剛性行列を作成し、その要素剛性行列をすべての節点について重ね合わせることで、全体剛性行列を作成する。剛性行列の全体化手法として、二次元解析では従来のFEMと同様に直接剛性法を用いているが、三次元解析ではメモリー節約のため、ICCG法を用いている⁽⁶⁾。局所要素剛性行列の中心節点に関する成分のうち非ゼロ成分だけを記憶・全体行列への足し込みを行っている。

また弾塑性解析では各時間増分ごとに応力と塑性ひずみを保持し、次の時間増分へ引き渡す。各時間増分ごとに中心節点まわりのローカルメッシュが保有する応力、ひずみを節点量に変換する。 N_i は節点*i*回りの局所要素数、 W_i は局所要素*i*の重み、 W は重みの総和として、図3(a)のように中心節点への組込みを行う⁽²⁾。

$$(\sigma_{ij})_{i\text{-node}} = \sum_{i=1}^{N_i} \frac{W_i}{W} (\sigma_{ij})_{i\text{-element}} \quad \dots\dots\dots (1)$$

また、時間増分の要素剛性行列の計算では、図3(b)のように m を1要素当たりの節点数として、節点での量を再びローカルメッシュでの量に戻す操作を行う。

$$(\sigma_{ij})_{i\text{-element}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\sigma_{ij})_{i\text{-node}} \quad \dots\dots\dots (2)$$

3. アダプティブ法

アダプティブ法とは事前の有限要素解析結果に基づいて解析モデル内の誤差を計算し、誤差を減少させるように要素代表寸法をコントロールする技術の総称である。解析モデルの改善方法によりr法(節点移動法)、h法(要素再分割法)、p法(補間関数高次化法)などに分類される⁽⁷⁾。FMM用の高次要素はまだ研究段階であるため、FMMにp法を適用することは現時点では難しい。またr法は計算効率では優れているが、

(a)

(b)

Fig.3 Data conversion between nodes and elements

弾塑性大変形問題のように解析形状が複雑な曲線形状となる場合は境界誤差の取扱いが複雑になるため、本研究ではh法を扱うことにする。

3・1 フリーメッシュ法の誤差評価 本研究ではANSYSで用いられているZienkiewicz-Zhu⁽⁸⁾の簡略化された誤差評価手法をベースにする。

通常、有限要素モデルの誤差は厳密解と近似解の差で表され、弾性解析では L_2 ノルムと呼ばれる次の式がよく用いられている。

$$\|e\|_e = \left[\int_{\Omega} (\{\epsilon\} - \{\bar{\epsilon}\})(\{\sigma\} - \{\bar{\sigma}\}) d\Omega \right]^{1/2} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 $\{\sigma\}$ 、 $\{\epsilon\}$ は応力・ひずみの厳密解、 $\{\bar{\sigma}\}$ 、 $\{\bar{\epsilon}\}$ はその近似解である。Zienkiewiczら⁽⁸⁾や大坪ら⁽⁹⁾は厳密解を推定しているが、いずれも弾性解析が中心である。本研究では弾塑性大変形解析の精度改善を目的としており、解析初期にやや節点数を多めにとることで、弾性領域内である程度の精度を確保しておき、塑性変形が進行し誤差が目標値を超えた時点でアダプティブ手法を適用し、解析モデルを修正する。

本研究では、図1に示すようにFMMが応力・ひずみをローカルメッシュベースと節点ベースで保持している点に着目し、ローカルメッシュベースで出力される物理量を厳密解の推定値としての正確解とすることで誤差測度を計算する。ここでは相当塑性ひずみを誤差評価対象とする。

$$\|e\|_e = \left\{ \int_{\Omega} (\epsilon - \bar{\epsilon})^2 d\Omega \right\}^{1/2} = \left\{ \int_{\Omega} \{\Delta\epsilon_n\}^2 d\Omega \right\}^{1/2} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで $\|e\|_e$ はローカルメッシュ*e*の誤差ノルム、 ϵ と $\bar{\epsilon}$ は相当塑性ひずみの正確解と近似解、 Ω はメッシュの面積または体積、 $\{\Delta\epsilon_n\}$ はメッシュを構成する各節点上における局所誤差ベクトルである。すなわち、局所誤差ベクトルとは、具体的には中心節点の相当塑性ひずみと中心節点を構成する衛星節点の相当塑性ひずみの差を表す。要素を三つの局所誤差ベクトルが減少すれば $\{\bar{\epsilon}\}$ は正確解に近づくため、結果として解の精度が向上する。

このローカルメッシュベースで計算した誤差の平均値を中心節点における誤差とする。

$$\|e\|_i^2 = \frac{1}{N_e} \sum_{e=1}^{N_e} \|e\|_e^2 \quad \dots\dots\dots (5)$$

i は中心節点番号、 N_e は中心節点*i*まわりのローカルメッシュの総数である。次に有限要素モデルの誤差指標として、相対誤差 η を計算する。

$$\eta = \frac{\|e\|}{\|u\|} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\|e\| = \left(\frac{1}{m} \cdot \sum_{e=1}^M \|e\|_e^2 \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{m} \cdot \sum_{e=1}^M N_e \cdot \|e\|_e^2 \right)^{1/2} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} P^2 d\Omega \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{m} \cdot \sum_{e=1}^M A_e \cdot P_e^2 \right)^{1/2} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで $\|e\|$ はモデル全体の誤差ノルム, $\|u\|$ はエネルギーノルムを表し, N は全節点数, m は要素を構成する節点数であり二次元三角形要素では3, 三次元四面体要素では4である。また A_e は要素 e の面積または体積, P_e は要素 e の物理量(ここでは相当塑性ひずみ)の代表値である。 M はすべての節点のローカルメッシュを多重にカウントした全要素数であり, 適合要素分割においては表示された全要素数は M/m になる。 η の値が小さいほど解析モデルはより良い要素分割がなされているとみなすことができる。

3・2 解析モデル修正 3・1節で求めた誤差測度を基に, 節点配置の最適化を行う。本研究では次の2種類を扱う。

3・2・1 局所的なアダプティブh法 この方法は誤差の高いメッシュをいくつかの細かいメッシュに細分割するように新節点を追加する方法で, ロジックは単純でプログラミングも容易である。まず相対誤差 η が, 解析者より与えられた目標値 $\bar{\eta}$ より小さくなるモデルを作成することを考える。式(8)よりエネルギーノルム $\|u\|$ を計算する。このとき, 全領域の許容誤差ノルムは次式により定められる。

$$\|e\| = \bar{\eta} \cdot \|u\| \quad \dots\dots\dots (9)$$

最も効率の良いリメッシングではすべてのメッシュの誤差エネルギーノルムが均一な値 e^m になるため, 全領域の誤差エネルギーノルムは

$$\|e\| = \left(\frac{1}{m} \sum_{e=1}^M \|e\|_e^2 \right)^{1/2} = \left(\frac{M}{m} \right)^{1/2} \cdot e^m \quad \dots\dots\dots (10)$$

となる。式(9), (10)より, e^m が求められる。

(a) 2 D analysis

(b) 3 D analysis

Fig. 4 Created nodes in adaptive h method in FMM

$$e^m = \frac{\bar{\eta} \cdot \|u\|}{(M/m)^{1/2}} \quad \dots\dots\dots (11)$$

誤差を目標値以下に押さえるためには, 次の条件が要求される。

$$\|e\|_e \leq e^m \quad \dots\dots\dots (12)$$

この条件を満たさないローカルメッシュを細分割の対象とし, 図4に示すようにメッシュを構成する各辺の midpoint に節点を追加する。追加された節点群を含めたすべての節点に対し, 改めて Delaunay 法を用いてローカルメッシュを生成する。

3・2・2 大域的なアダプティブh法 前述の方法は比較的容易に実行できるが, 新節点の座標は前段階の節点配置に依存するため, 大変形を伴う解析ではもともと潰れたメッシュをさらに細分割しても, 精度の向上には限界が存在する場合も考えられる。そこで解析モデル全体の節点分布を新たに作り直す大域的なアダプティブh法を用いるを試みる。

(a) 節点生成法 本研究ではまずモデル境界上に逐次的に節点を発生させ, モデル内部の境界と干渉しない領域では格子状に節点を生成する逐次格子法⁽¹⁰⁾を採用する。図5に示すように, モデル全体を内包する座標空間を矩形領域(セル)で覆い, 各セル内に格子状に発生させる節点間隔を制御することで, 誤差測度に応じた非均質節点分布を実現する。この手法では, 境界上での節点数を増加させるため, 境界形状は大きく変化しないが, r法では節点数を一定に保持するため, 境界形状が大きく変化することがある。

(b) 節点密度の計算 事後誤差評価から新節点密度を求める方法⁽⁷⁾を述べる。まず, 次の量

$$A = \sum_{i=1}^N \|e\|_i^{(2n)/(n+2)} \quad \dots\dots\dots (13)$$

を計算する。 N は総節点数, $\|e\|_i$ は節点 i の誤差エネルギーノルム, n は解析領域の次元数である。この A から, 新節点が有すべき誤差エネルギーノルム e^m を求める。

$$e^m = \frac{(\bar{\eta} \cdot \|u\|)^{(n+2)/2}}{A^{(n+2)/4}} \quad \dots\dots\dots (14)$$

Fig. 5 Adaptive global h method

得られた e^m から新しい節点密度を、次式を用いて計算する。

$$h_i = \bar{h}_i \cdot \left(\frac{e^m}{\|e\|_i} \right)^{2/(n+2)} \dots\dots\dots (15)$$

ここで、 i は節点番号、 h_i 、 $\bar{h}_i$ はそれぞれ新節点密度と旧節点間隔である。さらに各セル内に所属する節点の節点間隔 h_i から、そのセル内の平均節点間隔を算出する。

$$h_L = \frac{1}{N_c} \sum_{i=1}^{N_c} h_i \dots\dots\dots (16)$$

ここで、 h_L は番号 L のセル内の平均節点間隔であり、 N_c はそのセル内に含まれる節点数となる。

3.3 リゾーニング 応力・ひずみなど履歴に依存

Fig. 6 Data interpolation in nodes

Fig. 7 Flow chart of adaptive elasto-plastic FMM analysis

する値は、アダプティブ適用前の節点・要素から適用後の節点・要素へ、精度よく受け渡さなければならない。FMM では物理量は節点が保有しているため、このリゾーニング作業⁽¹¹⁾は節点単位で行われる。まず新節点を内部に含む旧ローカルメッシュをサーチし、そのメッシュを構成する旧節点の物理量より一次の内挿関数を用いて図6に示すように新節点に補間する。

3.4 アダプティブ弾塑性解析の流れ 弾塑性問題をはじめとする非線形解析は時間ループによる繰返し計算で構成される。しかし各タイムステップごとに誤差評価・解析モデル修正を行っていたのでは非常に効率が悪いため、本研究では図7に示すように20ステップごとに相対誤差 η を計算し、これが解析者の設定した目標相対誤差 $\bar{\eta}$ を超えていれば前述の方法により解析モデル修正を行い、物理量の内挿、荷重・境界条件の調整後、次のタイムステップへ移行する。

4. 解析結果

4.1 二次元弾塑性大変形解析

4.1.1 解析モデル 前報⁽²⁾⁽³⁾と同様に平面ひずみ状態の長方形平面ブロックにせん断変形を与える。 $a=200$ mm, $b=100$ mm であり、荷重は水平方向に強制変位 e に相当する変位速度 $\dot{e}=200$ mm/s を与える。拘束条件としては上辺の x 方向、底辺の x , y 方向を固定し、上辺が x 方向にのみ移動できる。時間増分は0.001 s, 増分回数は1000回である。材料定数

Fig. 8 Boundary condition and geometry of 2-dimensional shear deformation model

Fig. 9 Plastic strain contour by FEM analysis

Number of Node =821

4141

16212

Fig. 10 Plastic strain contour by FMM analysis at $e/a=0.4$

(a) FEM

(b) FMM

Fig. 11 Mesh division in FEM and FMM analysis at $e/a=0.6$

(a) Plastic strain contour by FMM Local-h

(b) Mesh division by FMM-Local-h

(c) Plastic strain contour by FMM Global-h

(d) Mesh division by FMM-Global-h

Fig. 12 Plastic strain contour and mesh division in adaptive h-Method

はヤング率 $E_0=150$ GPa, ポアソン比 $\nu_0=0.3$, 初期降伏応力 $\sigma_0=150$ MPa とする。弾塑性構成式は Peirce らのひずみ速度依存形の構成式を用いている。

次の四つの解析アルゴリズムを比較する。

(1) 通常の有限要素解析(FEM と呼ぶことにす

る)

(2) 通常の FMM(FMM)

(3) 局所的なアダプティブ h 法を用いた FMM ($\eta=0.10$) (FMM-Local-h)

(4) 大域的なアダプティブ h 法を用いた FMM ($\eta=0.05$) (FMM-Global-h)

本研究では解析モデル全体を覆う $300\text{ mm} \times 300\text{ mm}$ の空間を, 一辺 5 mm のセルで覆っている。

4.1.2 有限要素法との比較 図 9 に FEM を用いたときの相当塑性ひずみ分布を示す。これはクロストライアングル要素を用いたもので, 節点数は 3 221 節点である。ひずみ分布は右上部と左下部に集中しており, 図 9 を基準に比較検討する。相当塑性ひずみが 100%以上を黒とし, その間を 10 等分割にして示している。

図 10 にアダプティブを適用しない通常の FMM 解析による $e/a=0.4$ におけるひずみ分布図である。節点数は 821, 4 141, 16 212 である。節点はクロストライアングル分割と同一配置であり, これに二次元 Delaunay 分割を適用して FMM 解析を行った。節点数が 16 212 のときひずみ分布は図 9 の分布に近づく。

図 11 に, $e/a=0.6$ のときの FEM と FMM のメッシュ分割図を示す。FEM では節点数が 3 221, FMM では節点数が 4 141 のときである。同程度の節点数に

Fig. 13 Comparison of shear and axial stress curves

Fig. 14 Plastic strain contour for 3-D FEM analysis at $e/a=0.3$ and 0.5

Fig. 15 Plastic strain contour for 3-D FMM analysis at $e/a=0.3$ and 0.5

対する分割であるが、Delaunay 分割を行う FMM のほうが、要素形状は正三角形に近い。

4・1・3 アダプティブ法の適用 3章で説明した2種類のアダプティブ法の効果を図12に示す。節点は図5に示すように、変形前では正方形の中心に節点を有するもので、三角分割するとクロストライアングル形となる。変形後の節点配置に対して、二次元 Delaunay 分割を適用する。相当塑性ひずみ分布とメッシュ分割図を併せて、 $e/a=0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ のときの値を示す。初期節点数は4141である。FMM-Local-h 法では目標相対誤差 η を小さくしすぎると自由度数が計算機の容量を越えてしまうので、やや大きく設定している。

アダプティブを適用しない(2)の FMM の解析結果と比較して、アダプティブを適用した(3)の FMM-Local-h、(4)の FMM-Global-h の塑性ひずみ分布はかなり正解に近い結果を出している。

またメッシュ分割については、Local-h 法では上下端により細かい節点配置となり、変形が進行するとその領域は拡大する。どちらも塑性ひずみが集中する箇所で節点密度が高くなっている。変形 $e/a=0.2$ のとき節点数は6281であり、 $e/a=1.0$ のときは6852となった。一方、Global-h 法では $e/a=0.2$ のとき7983節点であり、 $e/a=1.0$ のときも7983節点であった。すなわち Global-h 法ではアダプティブ法を初期に適用した節点配置で相対誤差を目標値以下に押さえることができることを示している。(3)の FMM-Local-h では細分割されたメッシュとそうでないメッシュの境界でメッシュサイズが急変しているが、(4)の FMM-Global-h ではメッシュサイズが滑らかに変化している。

解析モデル上辺に生じる軸応力とせん断応力を図13に示す。せん断力はいずれの解析アルゴリズムでもほぼ同じであるが、FEM の結果が最も低い値を示した。軸力は多少ばらつきがあり、アダプティブを適用しない4161節点の FMM が最も高く、FEM が最も低い。アダプティブを適用しない16212節点は他のアダプティブを適用した解析とほぼ同一の結果を示した。

Local-h 法は前段階の節点配置を基に、局所的に節点を追加生成するだけなのでアルゴリズムは単純であるが、かなり良い結果が得られている。

4・2 三次元弾塑性大変形解析 FEM による解析結果、通常の四面体要素による FMM とアダプティブを適用した FMM-Local-h の比較を行う。二次元モデルに対し、厚さ方向に100 mm とっている。

4・2・1 有限要素法の比較 FEM には四面体要素と六面体要素を用いる。節点数は両者とも1900節点である。六面体要素には選択積分法⁽¹²⁾を適用している。図14に変形 $e/a=0.3, 0.5$ での相当塑性ひずみ分布図を示す。厚さ方向には、ほぼ一定であるが、六面体要素による縦・横方向は二次元モデルと同様な分布である。四面体では変形状況は同様であるが、角部のひずみ集中を正確に表していない。また50%以上のひずみを黒とし、その間を10等分割している。

4・2・2 アダプティブ法の適用 一方、FMM に用いた初期節点数は $9 \times 18 \times 9 = 1458$ である。これらの分布する節点に対し、3章で説明した三次元 Delaunay 法を局所的に適用し、三次元ローカルメッシュを作成している。アダプティブを適用すると $e/a=0.5$ の時点で節点数は3708に増加した。目標相対誤差は $\eta=0.40$ としている。二次元モデルと比べてかなり大きくとっているが、これは二次元モデルよりさらに厳しく節点が急増するためである。図15に相当塑性ひずみ分布を示す。ひずみ集中が生じる右上部と左下部において、メッシュが細くなり、アダプティブを適用した FMM のほうがひずみ集中のようすをより詳しく近似できている。変形 $e/a=0.5$ のとき六面体要素による FEM 解析では最大相当塑性ひずみ値は0.712であり、四面体要素による通常の FMM 解析では0.367であったものが、アダプティブ解析を適用すると0.487までに改善される。側面部のひずみ分布は中心に対して点対称になっており、計算が正確に行われていることがわかる。また、アダプティブ解析は全ステップごとに適用するものではないので、計算時間に及ぼす影響は少ない。

5. 結 言

従来の FEM で用いられているアダプティブ h 法を FMM に適用するため、その定式化とともに数値解析例を示した。せん断変形問題を例に、局所のおよび大域のアダプティブ h 法による精度改善の効果を、弾塑性大変形問題を例に検討した。本研究では、Delaunay 法を用いて四面体要素のローカルメッシュを作成し、三次元解析に拡張した。二次元解析の局所的な h 法は節点数が変形とともに増加し、大域的 h 法では節点数がほぼ一定であったが、この手法を組み込まない従来の FMM に比べて精度改善の効果が確認された。三次元解析では、単一計算機での検討であったため、比較的少ない節点数であったが、従来の四面体による FEM や FMM に比べて精度は改善されていることを示した。

本研究の一部は情報処理振興事業協会「領域分割フリーメッシュ法による高度設計支援基盤ソフトウェアの開発」(代表: 矢川元基東京大学教授)より援助を得た。貴重なご意見をいただいた委員各位に対し、謝意を表する。

文 献

- (1) Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M. and Klysl, P., Meshless Methods: An Overview and Recent Developments, *Comp. Meth. App. Mech. Eng.*, **139** (1996), 3-47.
- (2) 渡部修・瀬川冬樹, フリーメッシュ法の弾塑性大変形問題への適用, *機論*, **65**-630, A (1999), 268-276.
- (3) 渡部修・伊藤久雄, フリーメッシュ法を用いた弾塑性大変形解析の分散並列処理とリメッシュアルゴリズム, *機論*, **66**-646, A (2000), 1103-1110.
- (4) 谷口健男, FEM のための要素自動分割(デローニー三角分割の利用), (1992), 森北出版.
- (5) 谷口健男・太田親, 三次元凸体の四面体有限要素自動分割, *土木学会論文集*, No. 432/I-16 (1991), 137-144.
- (6) 矢川元基・細川孝之, フリーメッシュ法の三次元問題への適用, *機論*, **63**-614, A (1997), 2251-2256.
- (7) 日本機学会編, 計算力学ハンドブック(I 有限要素法構造編), (1998), 351-364, 丸善.
- (8) Zienkiewicz, O. C. and Zhu, J. Z., Error Estimation and Adaptive Refinement for Plate Bending Problems, *Int. J. Num. Methods Eng.*, **28** (1989), 2839-2853.
- (9) Ohtsubo, H. and Kitamura, M., Element by Element A Posteriori Error Estimation of the Finite Element Analysis for Three-Dimensional Elastic Problems, *Int. J. Num. Methods Eng.*, **33** (1992), 1775-1769.
- (10) 手塚明, アダプティブ・リメッシングのための二次元有限要素自動生成法, *機論*, **60**-576, A (1994), 1863-1870.
- (11) 湯川伸樹, 剛塑性有限要素解析に対するアダプティブリメッシング法, *Computrol*, **42** (1993), 23-29.
- (12) 田中宏幸・渡部修, 塑性硬化則とひずみ速度の影響を考慮したせん断帯の三次元有限要素解析, *機論*, **63**-611, A (1997), 1552-1560.