延性破壊の塑性力学的予測*
(第2報, 規準の適用性)守 時 一*¹, 佐 藤 裕 久*²Prediction of Ductile Fracture Based on Mechanics of Plasticity
(2nd Report, Applicability of Criterion)Hitoshi MORITOKI*³ and Yasuhisa SATO*³ 4-7 Dojonuma-machi, Yabase, Akita-shi, Akita, 010-0964 Japan

In 1st Report the criterion of load instability was introduced for assessing the onset of ductile fracture. So far the multiplicity of deformation has been considered to occur at plastic instability. The concept of plastic instability is based on the possibility of multiplicity in deformation rate under an identical boundary condition. However, plastic instability does not assure the coexistence of unloading with continuous plastic loading. Therefore, it does not bring the onset of necking. On the other hand, load instability provides the possibility of coexistence with unloading as long as it occurs after plastic instability. Then, we adopt load instability as a tool for examining ductility. It is very interesting whether the prediction based on the mechanics of plasticity has the ability of evaluation for the effect of hydrostatic pressure upon ductility. Other interest is central bursting in extrusion or drawing, surface ductility in upsetting, the difference of formability between cylinder bulging and sheet stretching, and so on. Their ductility is evaluated associating load instability with plastic instability.

Key Words: Ductility, Load Instability, Plastic Instability, Multiplicity, Tensile Test under Pressure, Surface Ductility, Central Bursting, Sheet Formability, Hydrostatic Stress

1. 緒 言

延性破壊の予測に関して第1報で塑性力学的規準を詳述した⁽¹⁾。本報では、これまで古典的に議論されてきた、塑性変形に伴う基本的な延性破壊について、あるいは成形性が問題となる塑性加工における割れの発生について個々の事例をとりあげ、第1報で提案した規準を用いて破壊予測の可能性を検討する。本論文における対象材料は常温における金属材料であり、準静的な変形下にあるものとする。したがって、ひずみ速度依存性を示す熱間塑性、超塑性、ポリマーなどの挙動に関しては対象外としている。さらに、常温金属では体積不変で変形が進行していることから、土質材料、粉末金属で見られる降伏現象への静水圧依存性についても考察の枠外とする。

破壊過程は材料学的には、塑性変形の進展に伴ってボイド(空孔)の核が発生しこれが成長、合体して最

最終的に分離に至るものと考えられ、これに従った解析も種々なされてきた。そこでは、ボイドの成長、合体に及ぼす静水圧応力の影響を概念的な想定で組み込み破壊に至る挙動が論じられた。このため、静水圧応力の影響を定式化するに際してこれに関する影響因子の導入が必要であり、さらにこの因子の数値化には実験観察に基づく整合性が諸られていなければならない。これに対して、塑性力学的な延性予測では、塑性構成式そのものにのみ準拠しそれ以外には新たな因子の導入は必要としていない。塑性力学的な考察にはこのような利点があるにも拘らず、塊材における延性予測については筆者らの考察を除いてこれまでほとんど試みられていないように見受けられる。この理由として、塑性構成式では塑性ひずみ速度が偏差応力に比例し、塑性変形に静水圧応力の影響が直接には関与しない形で定式化されていることから、塑性力学的検討をいかに駆使しても延性への静水圧応力の影響は元来表現し得ない構造になっているのではないかと悲観的な憶測が根底にあったかと推察される。しかしながら、境界条件の設定においては応力、あるいは一般化応力(変形を駆動している外力)などが力境界条件として指定されているため、多価状態などの出現に偏差応力以外

* 原稿受付 2000年12月14日。

*¹ 正員, 自宅(☎010-0964 秋田市八橋鯉沼町4-7)。*² 正員, 東北学院大学工学部(☎985-8537 多賀城市中央1-13-1)。

E-mail: moritoki@ipc.akita-u.ac.jp

の応力成分も係わってくる。例えば、薄板のくびれ問題を考えるとき、拡散くびれ、局所くびれ現象において Swift や Hill により与えられたこれらの限界値には応力比そのものが関係している。したがって、塑性理論は静水圧応力が塑性変形に影響を及ぼさないとする理論構造ではあるが、変形の多価性に静水圧応力が関与しないと先験的に結論付けるのは早計ではないかと考える。そこで、本報ではこれまで関心の高かった個々の事例について塑性力学的な延性予測の検討を試みた。

2. 基礎関係式

第1報⁽¹⁾で詳述し、本報で使用する延性評価の基礎式をここで要約しておく。第1報における解析は有限変形論に立脚し、テンソル成分の表現には直交座標系を採用している。Cauchy 応力 σ_{ij} の応力速度を $\dot{\sigma}_{ij}$ で、Jaumann のそれを $\dot{\sigma}_{ij}^J$ で表している。本論文の適用例では一般的な表現の場合を除き座標系の方向は応力の主方向に採っている。このとき、応力およびひずみ速度の成分は主成分のみであり、これらを一つの添字のみを付して表現した。しかし、応力速度成分に関してはその主方向が応力の主方向と必ずしも一致しているとは限らなく、一般に $\dot{\sigma}_{ij} \neq 0 (i \neq j)$ であるので、応力速度成分は二つの添字を付して表現することが必要である。しかし、応力速度の、応力の主方向成分 $\dot{\sigma}_{ii}$ に関しては添字の煩雑さから演算上必要な場合を除き、添字を一つとし $\dot{\sigma}_i$ で表すことにした。公称応力速度に関しても応力の主方向成分は添字を一つとし $\dot{\sigma}_i$ とした。さらに、このような座標系の下では常に $\dot{\sigma}_i = \dot{\sigma}_i^J$ の関係にあるので、これらについては Jaumann 速度に関する配慮は必要ではなくなる。

変形を駆動している外力を総称して一般化応力 P_{ij} と呼ぶ。比較的単純な変形過程では一般化応力は対象としている要素の応力状態と平衡関係で関連付けられているが、その関係は個々の事例で異なっている。これに対して、一般の複雑な変形考察ではこのような関係付けはできなく、そこでは公称応力 $\dot{\sigma}_{ij}$ が一般化応力に対応している。前者を特別一般化例、後者を公称一般化例と呼ぶことにする。

2・1 塑性不安定 設定境界条件の下で多価解の存在可能性を塑性不安定と呼んでいる。

2・1・1 特別一般化例 平衡式は

$$\dot{\sigma}_{ij}^J - C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} = Z_{ijkl}^T \dot{p}_{kl} \quad (1-29) \quad (1)$$

である。式番号の前に1が付されているのは第1報⁽¹⁾における式番号であることを表す。式(1)では、応力 σ_{ij} を一般化応力 P_{kl} でもって線形表現したときの係数を Z_{ijkl}^T とし、さらに、 $Z_{ijkl}^T P_{kl}$ を $\dot{\epsilon}_{rs}$ の線形表現したときの係数を C_{ijrs} としている。式(1)においてひずみ速度を応

力速度に変換し、各項それぞれに多価解に関して差にとりこれに Δ を付すと

$$\Delta \dot{\sigma}_{ij}^J - \frac{1}{h} C_{ijrs} \mu_{rs} \mu_{kl} \Delta \dot{\sigma}_{kl}^J = Z_{ijkl}^T \Delta \dot{p}_{kl} \quad (1-38) \quad (2)$$

となる。ここで、 G を横弾性係数として

$$h = \frac{H \sigma_s^2}{9G^2}, \quad H = \frac{d\sigma_s}{d\epsilon_s} = \frac{n}{\epsilon_s} \sigma_s, \quad \mu_{ij} = \frac{1}{2G} \sigma_{ij}^J \quad (1-31) \quad (3)$$

と置いている。境界条件は設定されているので、式(2)において

$$\Delta \dot{p}_{kl} = 0 \quad (1-37) \quad (4)$$

でなければならない。これより、塑性不安定限界は

$$h = \mu_{ij} C_{ijrs} \mu_{rs} \quad (1-34) \quad (5)$$

で与えられる。

2・1・2 公称一般化例 塑性変形下では相当応力

σ_s に関して常に

$$\frac{2}{3} \sigma_s \dot{\sigma}_s = \dot{\bar{\gamma}} \quad (1-21) \quad (6)$$

の関係がある。応力の主方向に座標系を採るとき、右辺の各項は

$$\dot{\gamma} = 1 - \frac{\epsilon_s}{\epsilon_{s0}}, \quad \dot{\sigma}_i = \sigma_i^J \dot{\epsilon}_i \quad (1-23, 20) \quad (7)$$

で表される。ここで、 ϵ_s は相当ひずみを、 σ_i^J , $\dot{\epsilon}_i$ はそれぞれ偏差応力、公称応力速度である。このとき、塑性不安定限界は

$$\frac{\epsilon_{s0}}{n} = \frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{(2 - \alpha - \beta) (\sqrt{1 + \gamma + \gamma^2})^3}{1 + \alpha\gamma^2 + \beta(1 + \gamma)^2} \quad (1-60) \quad (8)$$

で与えられる。 n は加工硬化指数であり、添字 D は塑性不安定限界であることを表す。ここで、ひずみ速度比、応力比を

$$\gamma \equiv \frac{\dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}_1}, \quad \alpha \equiv \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \quad \beta \equiv \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \quad (1-54) \quad (9)$$

と置いている。

2・2 負荷不安定 変形要素の強度限界を越えて増大する負荷経路が設定されていると、負荷がこの強度限界を越えた時点で経路追従ができなくなり、一般化応力のいずれかの成分が余儀なく停留する。これを負荷不安定と呼ぶ。

2・2・1 特別一般化例 一般化応力に関しての基本条件は

$$\dot{p}_{ij}^L = 0 \quad (1-47) \quad (10)$$

である。この停留する成分はそれぞれの事例で異なる。添字 L は負荷不安定に関連していることを表す。くびれ発生のためには、負荷不安定において除荷過程の共存が必要である。これを附随条件と呼び、

$$\frac{2}{3} \sigma_s \dot{\sigma}_s = \sigma_i^J \dot{\sigma}_i^U \leq 0 \quad (1-49) \quad (11)$$

で与えられる。添字 U は除荷過程であることを表す。

2・2・2 公称応力例 通常、最大の公称応力成分

が考察要素の強度限界から停留していることから、基本条件を

$$\dot{s}_1' = 0 \quad \dots\dots\dots (1-53) \quad (12)$$

と置いている。これによる限界は

$$\frac{\varepsilon_{gl}}{n} = \frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{(2-\alpha-\beta)(\sqrt{1+\gamma+\gamma^2})^3}{1+\gamma\xi-(1+\gamma)\eta} \quad \dots\dots\dots (1-56) \quad (13)$$

で与えられる。応力速度比を

$$\xi \equiv \frac{\dot{\sigma}_2}{\dot{\sigma}_1}, \quad \eta \equiv \frac{\dot{\sigma}_3}{\dot{\sigma}_1} \quad \dots\dots\dots (1-54) \quad (14)$$

と定義している。負荷不安定限界においては

$$y_L = 1 - \frac{\varepsilon_{gl}}{\varepsilon_{gd}} = 1 - \frac{1+\alpha\gamma^2+\beta(1+\gamma)^2}{1+\gamma\xi-(1+\gamma)\eta} \quad \dots\dots\dots (1-61) \quad (15)$$

の関係にある。附随条件は

$$-\varepsilon_L \geq 0 \quad \dots\dots\dots (1-58) \quad (16)$$

で表われ、具体的には

$$-\varepsilon_L = -\gamma\dot{s}_2' + (1+\gamma)\dot{s}_3' \geq 0 \quad \dots\dots\dots (1-65) \quad (17)$$

である。ここで、

$$\bar{\varepsilon} \equiv \frac{\varepsilon}{\sigma_1} \quad \dots\dots\dots (1-66) \quad (18)$$

で定義している。負荷不安定において基本条件、式(12)に到達する時点が塑性不安定後であれば、くびれ発生の実現を規制する式(16)の附随条件は常に満足されている。

3. 延性破壊の予測事例

3・1 静水圧下での引張り試験 引張り試験においてくびれの始まりからき裂発生に至るまでの局所化の成長に周辺圧力 p が大きく影響することは周知の事実である。また、くびれ発生発端は周辺圧力の影響を受けないとする考えがこれまで定説となっていた。しかし、負荷不安定に基づいてくびれ発生を予測するときくびれの発生時期が周辺圧力の影響を受ける結果となり、後者の定説について筆者の一人は異論を唱えた⁽²⁾。引張り方向に座標軸 x_1 を、座標軸 x_2, x_3 は座標軸 x_1 に垂直で互いに直交する任意の方向に採る。くびれ発生までは試験片は一様応力場にある。したがって、座標軸 x_2, x_3 に関して応力は周辺圧力 p に等しく、同様にひずみ、ひずみ速度も座標軸 x_2, x_3 に関して同値となり $\gamma = -1/2$ である。公称応力速度は

$$\dot{s}_1 = \dot{\sigma}_1 - \sigma_1 \dot{\varepsilon}_1, \quad \dot{s}_2 = \dot{s}_3 = -\dot{p} - \frac{1}{2}p\dot{\varepsilon}_1 \quad \dots\dots (19)$$

で与えられる。この種の引張り試験では容器内に圧力 p を負荷しその中で試験片を引張っている。その引張り荷重を $\hat{P}$ とし、これによる引張り応力を $\hat{\sigma}_1$ で表す。このとき、実際に軸方向に作用している引張り応力は

$$\sigma_1 = \hat{\sigma}_1 - p \quad \dots\dots\dots (20)$$

である。この関係より式(19)は

$$\dot{s}_1 = \dot{\hat{\sigma}}_1 - \hat{\sigma}_1 \dot{\varepsilon}_1 - (\dot{p} - p\dot{\varepsilon}_1) \quad \dots\dots\dots (21)$$

で表される。負荷不安定の基本条件の下では、式(12)に従って

$$\dot{\hat{\sigma}}_1 = (\hat{\sigma}_1 - p)\dot{\varepsilon}_1 + \dot{p} \quad \dots\dots\dots (22)$$

となる。ここでは、周辺圧力 p は一般化応力でもあり、また側圧でもある。このため、考察にあたっては特別な配慮が必要である。除荷過程に遷移したときには変形が停止するので $\dot{\varepsilon}_i = 0$ である。したがって、そこでは式(19)により

$$\dot{s}_1'' = \dot{\sigma}_1'', \quad \dot{s}_2'' = \dot{s}_3'' = -\dot{p} \quad \dots\dots\dots (23)$$

で表される。負荷不安定の基本条件、式(12)を満足しているので、式(23)の最初の項に関しては $\dot{\sigma}_1'' = 0$ となる。公称一般化例においては第1報で

$$\dot{s}_{ij} = \dot{s}_{ij}'', \quad \dot{\sigma}_{ij}' \neq \dot{\sigma}_{ij}'' \quad \dots\dots\dots (1-44) \quad (24)$$

としたが、ここでは側圧 p が通常の応力であると同時に一般化応力でもあることから座標軸 x_2, x_3 に関して $\dot{s}_i \neq \dot{s}_i''$ ($i=2,3$) となり、式(24)を満たしていない。除荷時には $\dot{\sigma}_i' = \dot{s}_i''$ の関係にあるので、式(11)の附随条件は

$$\dot{p} \leq 0 \quad \dots\dots\dots (25)$$

で与えられる。したがって、式(12)および式(25)を満足するとき負荷不安定となり、くびれの発生が可能となる。これとは逆に、周辺圧力を常に増加しつづけることができればくびれの発生を抑えることも可能である。

ここで、塑性不安定について検討しておく。座標軸 x_2, x_3 方向では応力、ひずみは同じであるので、座標軸 x_1, x_2 に関して考察する。式(19)で任意の多価解に関してこれらの差を採り、これに Δ を付して表すと、式(2)に相当して

$$\Delta\dot{\sigma}_1 - \sigma_1\Delta\dot{\varepsilon}_1 = \Delta\dot{s}_1, \quad -\Delta\dot{p} - \frac{1}{2}p\Delta\dot{\varepsilon}_1 = \Delta\dot{s}_2 \quad \dots\dots\dots (26)$$

を得る。レビー・ミーゼスの構成式に従って

$$\Delta\dot{\varepsilon}_1 = C_T(\Delta\dot{\sigma}_1 + \Delta\dot{p}), \quad C_T \equiv \frac{9\varepsilon_s}{4n} \frac{\sigma_1^2}{\sigma_s^3} \quad \dots\dots (27)$$

であるので、式(26)は

$$\begin{aligned} (1 - C_T\sigma_1)\Delta\dot{\sigma}_1 - C_T\sigma_1\Delta\dot{p} &= \Delta\dot{s}_1 \\ \frac{1}{2}C_T\Delta\dot{\sigma}_1 + \left(1 + \frac{1}{2}C_Tp\right)\Delta\dot{p} &= \Delta\dot{s}_2 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (28)$$

となる。周辺圧力 p は座標軸 x_2, x_3 方向の応力であるが一般化応力として設定されているので、これに関しては多価状態は存在しない。それゆえ、式(4)の設定条件は

$$\Delta\dot{s}_1 = 0, \quad \Delta\dot{p} = 0 \quad \dots\dots\dots (29)$$

である。結局、式(29)の条件下において有意な解

$\Delta\sigma_1 \neq 0$ であるための条件として式 (28)₁より

$$\frac{\varepsilon_{gD}}{n} = \frac{\dot{\sigma}_1}{\dot{\sigma}_1 - p} \quad \dots\dots\dots (30)$$

を得る。式 (28)₂ において $\Delta\sigma_2$ は多価となる $\Delta\sigma_1$ に依存して変化する。

周辺圧力 p を一定に保持している通常の静水圧下引張り試験では式 (25) は常に満足されている。このとき、式 (22) は

$$\dot{\sigma}_1 = (\dot{\sigma}_1 - p)\dot{\varepsilon}_1 \quad \dots\dots\dots (31)$$

となる。これによる限界は式 (30) の塑性不安定による限界と一致している。このように周辺圧力が一定（大気圧下であっても同様）であるときには塑性不安定と負荷不安定は同時に発生することから、その時点でくびれの発生も促されることになる。塑性不安定は単に多価解の存在可能性を示しているだけであるが、 p を一定とする引張り試験では塑性、負荷不安定が同時に発生するため、あたかも塑性不安定でくびれが発生したかの錯覚をこれまで与えてきたと推察される。試験片に作用している引張り力 P は

$$\dot{\sigma}_1 = \sigma_1 \dot{\varepsilon}_1 \quad \dots\dots\dots (32)$$

の状態で停留し、そこでくびれが発生する。これに対して圧力負荷容器内での引張り荷重 $\hat{P}$ は

$$\dot{\hat{\sigma}}_1 = \hat{\sigma}_1 \dot{\varepsilon}_1 \quad \dots\dots\dots (33)$$

において停留する。しかし、このときくびれが発生しなければならないとする必然性は見当たらない。従来の理論的考察では静水圧の有無に関係なく式 (33) の状態でくびれが発生するものと考えられてきた。周辺圧力が変化するときには

$$\frac{\varepsilon_g}{n} = \frac{\dot{\sigma}_1}{\dot{\sigma}_1 - p + \frac{p}{\dot{\varepsilon}_1}} \quad \dots\dots\dots (34)$$

で引張り力 P が停留するが、負荷不安定の附随条件である式 (25) を満たしていなければ、くびれの発生はない。

3・2 延性への静水圧の影響

静水圧の付加により延性が増大すると推察されることから、これを考慮した延性限界規準がこれまで種々提唱されてきた⁽³⁾。

ここでは、負荷不安定規準に基づいて延性への静水圧成分の影響を定量的に評価する。静水圧の影響が問題となるのは鍛造加工におけるように塊材に関してであり、公称一般化例が対応している。ここでは、これに従って論ずる。無次元静水圧応力を相当応力との比として

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3\sigma_s}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad \dots\dots\dots (35)$$

で表す。これを用いて応力比は

$$\alpha = 1 - \frac{1-\gamma}{1+\sqrt{3}\sigma\sqrt{1+\gamma+\gamma^2}} \quad \dots\dots\dots (36)$$

$$\beta = 1 - \frac{2+\gamma}{1+\sqrt{3}\sigma\sqrt{1+\gamma+\gamma^2}}$$

で表される。したがって式 (8) の塑性不安定限界は

$$\frac{\varepsilon_{gD}}{n} = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{(\sqrt{1+\gamma+\gamma^2})^3}{-3\gamma(1+\gamma) + 2\sqrt{3}(\sqrt{1+\gamma+\gamma^2})^3\sigma} \quad \dots\dots\dots (37)$$

と書き換えられる⁽⁴⁾。負荷不安定においてくびれの発生が促されるためには式 (16) を満足していることが必要である。したがって、 $\varepsilon_1 \leq 0$ である。塑性変形の過程では式 (6) の左辺が正值であることから右辺の y と z は同符号でなければならない。負荷不安定の附随条件、式 (16) により式 (15) で $v_1 \leq 0$ が要請される。これは

$$\varepsilon_{gL} \geq \varepsilon_{gD} \quad \dots\dots\dots (38)$$

であることを求めている。したがって、負荷不安定における延性限界は式 (37) の変形を越えていなければならない。式 (38) を満足する状態でいつ最大の公称応力が停留するかは応力速度比 η により影響を受け、当然個々の事例で異なってくる。しかし、式 (37) の値を下回ることはない。図 1 に塑性不安定における限界を示す。加工硬化指数は鋼との比較から、ここでは $n=0.24$ とした。実験点は Arndt ら⁽⁵⁾ により求められたものであり、その多くがこれらの限界値を越えている。このことは本論文における延性考察の概念が有効であることを示す証しでもある。

Fig.1 Ductility dependence upon mean stress

3・3 円柱の据込み変形における表面破壊

工藤ら⁽⁶⁾は非常に丁寧な実験観察を行い、円柱の据込み変形において円柱中央表面の軸方向圧縮ひずみ ε_2 を横軸に円周方向ひずみ ε_1 を縦軸に採るとき、円柱試験片の細長比、端面摩擦の程度に関連してき裂発生点がこの配を 1/2 とする一本の直線上近傍に分布（これを破壊

点の直線分布と呼ぶ) していることを示した。著者の一人はこの実験で求められたひずみ経路に沿って変形を進める数値解析を行い⁽⁷⁾、負荷不安定規準による限界値が実験におけるき裂発生限界と非常によく一致する結果を得た。さらにこの状態において特性曲面論に従って予測したき裂形態は実験観察と完全に一致していた。これらの結果は負荷不安定規準の有用性を検証した一例である。

考察要素の負荷状態は公称一般化例に従っている。表面延性の考察であるので、平面応力場 $\sigma_3=0$ で解析している。このとき、負荷不安定の限界と附随条件は式(13)および式(17)から

$$\frac{\varepsilon_{gl}}{n} = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{(\sqrt{1+\gamma+\gamma^2})^3}{(2+\gamma)(1+\gamma\xi)} \quad \dots\dots\dots (39)$$

$$-\dot{\varepsilon}_1 = -\gamma\dot{s}_2' \geq 0$$

となる。この変形における塑性不安定の限界は式(8)から

$$\frac{\varepsilon_{gl}}{n} = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{(\sqrt{1+\gamma+\gamma^2})^3}{(1-\gamma)(2-\gamma+2\gamma^2)} \quad \dots\dots\dots (40)$$

である。

Fig.2 Strain paths and cracking in upsetting

Fig.3 Loading paths in s_i space

変形経路と負荷不安定発生点(△印)を図2に示す。ここには塑性不安定点(□印)も記入し、実験観察されたき裂発生点(○印)も明示している。変形経路に示された番号は実験番号である。個々の実験ではそれぞれ円柱試験片の細長比 h/d (h : 高さ, d : 直径), 端面摩擦が種々変えられている。工藤らはき裂形態について端面摩擦の大きい実験番号1から4では垂直形態(形態P)の発生を、端面摩擦が小さくなる実験番号4から11では斜め形態(形態O)のそれを観察している。実験番号4では両形態の同時発生が観察されている。公称応力速度空間で表示したこれらの負荷経過を図3に示す。ここでは、時間尺度に相当ひずみを採っている。変形に伴って右から左へと状態点が移動する。塑性不安定は変形経路がこう配1の直線(Z平面)と交差した点で発生する。負荷不安定が塑性不安定後に出現している様子が図2からも理解できる。

次に、有限要素法による数値解析⁽⁸⁾⁽⁹⁾について要約しておく。図2の数値実験ではひずみ経路は実験におけるそれを用い、これに準拠して限界値を比較した。これに対して、ひずみ経路自身も有限要素法を利用して数値解析で求め、これに従ってき裂発生を予測することも可能である。しかし、摩擦係数を一定とした条件の下で求めたひずみ経路は実験観察のそれとの間でいくぶんの相違が現れ、これが破壊予測に影響を及ぼした⁽⁸⁾。とくに、き裂形態についてはほとんどが垂直形態(形態P)を予測する結果となった。しかし、破壊点の直線分布に関しては実験のそれとのよい一致が得られた。さらに、円柱の変形状試験片においては破壊点の直線分布が円柱のそれとは異なる様相を示すことを表すことができ、これらの相違もまた実験観察とのよい一致を見た⁽⁹⁾。

3・4 押出し、引抜き加工における中心割れ 軸対称加工における素材中心線上の状態を観察した。加工方向に座標軸 x_1 を、円周、半径方向に座標軸 x_2, x_3 を採る。中心線上においては座標軸 x_2, x_3 の応力、ひずみ速度は共にそれぞれ同じであるので

$$\alpha = \beta, \quad \xi = \eta, \quad \gamma = -1/2 \quad \dots\dots\dots (41)$$

である。式(13)および式(17)は

$$\frac{\varepsilon_{gl}}{n} = \frac{1-\alpha}{1-\xi} \quad \dots\dots\dots (42)$$

$$-\dot{\varepsilon}_1 = \dot{s}_2' \geq 0$$

となる。また、塑性不安定限界は式(8)から

$$\frac{\varepsilon_{gl}}{n} = 2 \frac{1-\alpha}{2+\alpha} \quad \dots\dots\dots (43)$$

である。素材が指定されると加工硬化指数 n が決まる。加工性を左右するのは素材の加工硬化指数 n 、ダイス半頂

角 α_D , 減面率 r , 素材ダイス間の摩擦係数 μ である。これらの加工条件の設定が中心割れ発生の有無に影響を及ぼす。素材が指定され、摩擦係数 μ がある一定の値であるとき、残る加工条件はダイス半頂角 α_D と減面率 r である。そこで、これらをそれぞれ横軸と縦軸に採り、この空間 (加工空間) 上の点で加工条件を表すことに

Fig.4 Workability in extrusion

Fig.5 Workability in drawing

Fig.6 Loading paths of extrusion in s_1 space.

する。設定した加工条件のもとで加工過程を数値解析し、負荷不安定の基本条件である式 (42) ₁ を満たす状態に到達したときの $\dot{s}_2^i (= \dot{s}_2^i)$ を調べる。これが式 (42) ₂ の附随条件を満足していると負荷不安定の発生が実現する。素材半径で無次元化した中心軸座標を x で表すとき、加工に伴って素材の x は変化する。定常化した変形状態においてこれを時間尺度に採用した。このようにして算出された値 $\dot{s}_2^i$ の正負が割れ発生の有無と対応しているの、加工空間上の加工点にこの数値を記入している。この数値の大小から割れの起こる危険性の度合いを判別することができる。数値が零である加工点は割れ発生の危険領域と安全領域との境界を表す。このような加工空間を押し出し加工に関して図 4 に、引抜き加工について図 5 に示す。実線は安全領域と危険領域との境界である。これらの加工において中心割れが問題となるのは素材の加工硬化がすでに相当に進んだ状態となっているときである。加工硬化が進んだ状態においてはその後の加工硬化を表す n 値は相対的に小さな値となる。このようなことから、ここでは比較的小さな加工硬化指数を選んだ。き裂の発生する加工と発生しない加工の境界が通常のダイス半角、減面率の範囲で現れるように、押し出し加工と引抜き加工で n 値を変え、それぞれ $n=0.06$, $n=0.10$ とした。押し出し加工に関して公称応力速度空間における負荷経過を二三の加工例について図 6 に示す。ここでは割愛したが、引抜き加工における負荷経過もほぼこれに類似した経過を示した。

3・5 薄肉円筒の張出し変形 軸力と内圧が作用する薄肉円筒は近似的に平面応力場 ($\alpha_s=0$) にあるが、その成形限界は薄板の張出し限界と著しく異なることが報告されている。この違いも本論文で紹介した負荷不安定の概念で説明することができる。ここでは、円筒の張出し変形を平面応力場にあるとして考察する。一般化応力は内圧 p と軸力 L である。円筒中央部の応力状態はこれら一般化応力と平衡関係

$$\frac{\dot{\sigma}_1}{\sigma_1} - 2\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2 = \frac{\dot{p}}{p}, \quad \frac{2\dot{\sigma}_2 - \dot{\sigma}_1}{2\sigma_2 - \sigma_1} - \dot{\epsilon}_2 = \frac{\dot{L}}{L} \quad \cdots (44)$$

で結ばれている⁽¹⁰⁾ ので、特別一般化例で考察する。ここでは、円筒の円周方向に座標軸 x_1 を、軸方向に座標軸 x_2 を採っている。レビー・ミーゼスの構成式

$$\dot{\epsilon}_i = C \sigma'_1 \sigma'_j \dot{\sigma}_j, \quad C \equiv \frac{9}{4} \frac{\epsilon_s}{n} \frac{1}{\sigma_s^3} \quad \cdots (45)$$

を考慮して式 (44) は

$$\left\{ \frac{1}{\sigma_1} - C(2\sigma'_1 + \sigma'_2) \sigma'_1 \right\} \dot{\sigma}_1 - C(2\sigma'_1 + \sigma'_2) \sigma'_2 \dot{\sigma}_2 = \frac{\dot{p}}{p} \quad \cdots (46)$$

$$-\left(\frac{2+\gamma}{3\gamma}\frac{1}{\sigma_1}+C\sigma_1'\sigma_2'\right)\dot{\sigma}_1 \\ +\left\{\frac{2(2+\gamma)}{3\gamma}\frac{1}{\sigma_1}-C\sigma_2'^2\right\}\dot{\sigma}_2=\frac{\dot{L}}{L}$$

となる。式 (46) に多価解の差をとり、式 (3) に相当する関係

$$\left\{\frac{1}{\sigma_1}-C(2\sigma_1'+\sigma_2')\sigma_1'\right\}\Delta\sigma_1 \\ -C(2\sigma_1'+\sigma_2')\sigma_2'\Delta\sigma_2=\frac{\Delta\dot{p}}{\dot{p}} \quad \dots (47) \\ -\left(\frac{2+\gamma}{3\gamma}\frac{1}{\sigma_1}+C\sigma_1'\sigma_2'\right)\Delta\sigma_1 \\ +\left\{\frac{2(2+\gamma)}{3\gamma}\frac{1}{\sigma_1}-C\sigma_2'^2\right\}\Delta\sigma_2=\frac{\Delta\dot{L}}{\dot{L}}$$

を得る。塑性不安定の条件、式 (4) は

$$\Delta\dot{p}=0, \Delta\dot{L}=0 \quad \dots (48)$$

である。式 (47) で有意な $\Delta\dot{\sigma}$ を持つ条件は

$$\frac{2(2+\gamma)}{3\gamma}-C\sigma_1'^2\left\{\gamma^2+\frac{(2+\gamma)^2}{3\gamma}\right\}=0 \quad \dots (49)$$

で与えられる。これより塑性不安定の限界は

$$\frac{\varepsilon_{gU}}{\dot{n}}=\frac{8}{\sqrt{3}}\frac{(\sqrt{1+\gamma+\gamma^2})^3}{3\gamma^3+(2+\gamma)^3} \quad \dots (50)$$

となる。

負荷不安定に関する基礎式を導く。式 (45) の構成式に基づいて応力速度を求め、さらに相当ひずみ速度の定義からひずみ速度を求めると

$$\frac{\dot{\sigma}_1}{\sigma_1}=\frac{n}{\varepsilon_s}\dot{\varepsilon}_s-\frac{1}{2+\gamma}\frac{3\gamma}{2(1+\gamma+\gamma^2)}\dot{\gamma} \\ \frac{\dot{\sigma}_2}{\sigma_2}=\frac{n}{\varepsilon_s}\dot{\varepsilon}_s+\frac{1}{1+2\gamma}\frac{3}{2(1+\gamma+\gamma^2)}\dot{\gamma} \quad \dots (51) \\ \dot{\varepsilon}_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\gamma+\gamma^2}}\dot{\varepsilon}_s \\ \dot{\varepsilon}_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma+\gamma^2}}\dot{\varepsilon}_s$$

の関係にあるので、式 (44) は

$$\frac{\dot{p}}{\dot{p}}=\left(\frac{n}{\varepsilon_s}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2+\gamma}{\sqrt{1+\gamma+\gamma^2}}\right)\dot{\varepsilon}_s \\ -\frac{1}{2+\gamma}\frac{3\gamma}{2(1+\gamma+\gamma^2)}\dot{\gamma} \quad \dots (52) \\ \frac{\dot{L}}{\dot{L}}=\left(\frac{n}{\varepsilon_s}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma+\gamma^2}}\right)\dot{\varepsilon}_s \\ +\frac{2+\gamma}{\gamma}\frac{1}{2(1+\gamma+\gamma^2)}\dot{\gamma}$$

となる。

多くの成形性判定の実験では、 γ を一定にする変形経路がとられているので、以下の考察では $\dot{\gamma}=0$ の条件下で検討する。主となる変形を駆動する負荷が内圧である場合には、負荷不安定の条件、式 (10) は $\dot{p}=0$ で

あるので、負荷不安定限界は式 (52) ₁ より

$$\frac{\varepsilon_{gLP}}{\dot{n}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{1+\gamma+\gamma^2}}{2+\gamma} \quad \dots (53)$$

となる。これを内圧不安定と呼ぶ。同様に、主となる変形を駆動する負荷が軸力である場合には、式 (10) の条件は $\dot{L}=0$ であり、その限界は式 (52) ₂ より

$$\frac{\varepsilon_{gLL}}{\dot{n}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{1+\gamma+\gamma^2}}{\gamma} \quad \dots (54)$$

となる。これを軸力不安定と呼ぶ。式 (53) および式 (54) で与えられる限界の内、最初に停留する一般化応力によって内圧あるいは軸力不安定の発生可能性が判定される。式 (51) ₃ および式 (51) ₄ のひずみ速度に関する関係は γ を一定にしているので、ひずみに関しても成り立ち

$$\varepsilon_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\gamma+\gamma^2}}\varepsilon_s \quad \dots (55)$$

$$\varepsilon_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma+\gamma^2}}\varepsilon_s$$

である。これより内圧不安定では

$$\frac{\varepsilon_{2I}}{\dot{n}}=1-2\frac{\varepsilon_{1I}}{\dot{n}} \quad \dots (56)$$

軸力不安定では

$$\frac{\varepsilon_{2I}}{\dot{n}}=1 \quad \dots (57)$$

の関係にある。これを図7に太い実線で示す。同図において●印で示した実験点は Stout ら⁽¹¹⁾により拡散くびれ限界として観察されたものである。第1報⁽¹⁾でも述べたように、これまでは拡散くびれにおいて負荷の同時停留が実現するものと考えられていた。拡散くびれの発生を変形そのものの観察から検知することは非常に難しく不可能に近いことである。このような背景からこれらの実験点はいずれかの負荷が停留し始めたときを検出したのではないかと推察される。したがって、これらは内圧あるいは軸力不安定に相当する状態にあり、式 (56) および式 (57) の2直線と比較することができる。図7においてこれらの限界状態は実験点の分布とほぼ同じ傾向を表していることが分かる。

ここで、除荷が発生したと仮定した場合の応力状態を算定し、附随条件について検討する。まず、一般化

Fig.7 Instabilities in cylinder bulging

応力速度を求める。内圧不安定では限界は式 (53) で与えられている。これを式 (52) に代入して

$$\frac{\dot{p}}{p} = 0, \quad \frac{\dot{L}}{L} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+\gamma+\gamma^2}} \dot{\epsilon}_s \quad \dots\dots\dots (58)$$

を得る。同様に、軸力不安定では式 (54) を用いて

$$\frac{\dot{p}}{p} = -\frac{\sqrt{3}\gamma'}{\sqrt{1+\gamma'+\gamma'^2}} \dot{\epsilon}_s, \quad \frac{\dot{L}}{L} = 0 \quad \dots\dots\dots (59)$$

である。ここで、 γ' は γ の逆数 $\gamma' \equiv 1/\gamma$ を表す。除荷発生時には $\dot{\epsilon}_i = 0$ であるので、式 (44) より

$$\frac{\dot{\sigma}_1^U}{\sigma_1} = \frac{\dot{p}}{p}, \quad \frac{\dot{\sigma}_2^U}{\sigma_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{p}}{p} + \frac{3\gamma}{2+\gamma} \frac{\dot{L}}{L} \right) \quad \dots\dots\dots (60)$$

の関係にある。これに式 (58) および式 (59) をそれぞれ代入して内圧不安定では

$$\frac{\dot{\sigma}_1^U}{\sigma_1} = 0, \quad \frac{\dot{\sigma}_2^U}{\sigma_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{3\gamma}{2+\gamma} \frac{1}{\sqrt{1+\gamma+\gamma^2}} \dot{\epsilon}_s \quad (61)$$

軸力不安定では

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\sigma}_1^U}{\sigma_1} &= -\frac{\sqrt{3}\gamma'}{\sqrt{1+\gamma'+\gamma'^2}} \dot{\epsilon}_s \\ \frac{\dot{\sigma}_2^U}{\sigma_1} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\gamma'}{\sqrt{1+\gamma'+\gamma'^2}} \dot{\epsilon}_s \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (62)$$

となる。式 (61) および式 (62) を式 (11) に代入し、内圧不安定では

$$\frac{2}{3} \sigma_s \dot{\sigma}_s = \sigma_1 \sigma_1' \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{3\gamma^2}{2+\gamma} \frac{1}{\sqrt{1+\gamma+\gamma^2}} \dot{\epsilon}_s \quad \dots\dots\dots (63)$$

軸力不安定では

$$\frac{2}{3} \sigma_s \dot{\sigma}_s = -\frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_1 \sigma_2' \frac{\gamma(1+2\gamma')}{\sqrt{1+\gamma'+\gamma'^2}} \dot{\epsilon}_s \quad \dots\dots\dots (64)$$

を得る。内圧不安定では $\sigma_1 \geq 0$, $\sigma_1' \geq 0$, $\gamma \geq -1/2$ ゆえ、式 (63) の右辺は正值であり、 $\gamma=0$ を除いて式 (11) の附随条件を満足していない。軸力不安定においては $\sigma_1 \geq 0$, $\sigma_2' \geq 0$, $-1/2 \leq \gamma' \leq 0$ ゆえ、 $\gamma' = 0$ を除いて式 (64) も同様に式 (11) を満足していない。したがって、これらの不安定は、式 (53), (54) のそれぞれの限界において共に $\gamma=0$, $\gamma'=0$ の場合のみ実現し、これ以外の場合にはくびれの発生を促すことはできない。

内圧不安定に関しては式 (53) の限界において内圧は停留値を迎え、それ以降設定した (γ を一定に保持する) 負荷経路を実現するための負荷制御は非常に難しくなる。軸力不安定では式 (54) の限界で同様に軸力制御が困難になる。停留後のこれらの制御精度に依存して変形経路は大きく影響を受け、設定経路を必ずしも実現できるとは限らない。ここで、この偏りの一例を検討する。 γ を一定に保持するにはこれらの限界後内圧あるいは軸力を減少させなければならない。しかし、限界まではこれらを増加させる過程にあったことから、限界における事態の急変を察知し即座に対応することは現実には難しいことである。このため、内圧

不安定では内圧一定の下で軸力増加により変形が進む状況が起こると推察される。同様に、軸力不安定では軸力一定の下で内圧増加がもたらされることになる。このような推移を想定すると、内圧不安定では式 (53) の限界を迎えてからは、式 (52)₁ で $\dot{p}/p=0$ の条件からひずみ速度比の時間変化 $\dot{\gamma}$ が与えられ、これを式 (52)₂ に代入することで $\dot{L}/L$ が求められる。軸力不安定では式 (54) の限界後、式 (52)₂ で $\dot{L}/L=0$ の条件からひずみ速度比の時間変化 $\dot{\gamma}$ が与えられ、式 (52)₁ から $\dot{p}/p$ を得る。このようにして変形を追跡し停留していない他の一般化応力速度も増加から減少に転ずると除荷発生が可能となり、このとき初めてくびれの発生が促されることになる。この限界を図 7 に細い実線で示した。破線は塑性不安定限界である。

3・6 板材の成形性 本課題は板面内負荷による変形考察であり、その外力は公称応力に相当している。したがって、ここでは公称一般化例に基づいて検討する。平衡条件は

$$\dot{\sigma}_i = \sigma_i \dot{\epsilon}_i = \dot{s}_i \quad \dots\dots\dots (65)$$

である。レビー・ミーゼスの構成式を用いてこれは

$$\begin{aligned} \left(\frac{n}{\dot{\epsilon}_s} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{1+\gamma+\gamma^2}} \right) \dot{\epsilon}_s \\ - \frac{1}{2+\gamma} \frac{3\gamma}{2(1+\gamma+\gamma^2)} \dot{\gamma} = \frac{\dot{s}_1}{\sigma_1} \\ \frac{1+2\gamma}{2+\gamma} \left(\frac{n}{\dot{\epsilon}_s} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma+\gamma^2}} \right) \dot{\epsilon}_s \\ + \frac{1}{2+\gamma} \frac{3}{2(1+\gamma+\gamma^2)} \dot{\gamma} = \frac{\dot{s}_2}{\sigma_1} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (66)$$

となる。ここでも、 γ を一定とする変形を目標に変形経路を進める。座標軸 ϵ_1 の方向を最大変形の主方向とし、負荷不安定では座標軸 ϵ_1 に関してのみ考える。式 (66)₁ より負荷不安定の限界値は

$$\frac{\epsilon_{sD}}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1+\gamma+\gamma^2}} \quad \dots\dots\dots (67)$$

となる。式 (55)₁ より限界値は

$$\frac{\epsilon_{sD}}{n} = 1 \quad \dots\dots\dots (68)$$

の直線で表される。これは図示する必要もないが、図 8 に実線で示した。塑性不安定限界を表す式 (8) は平面応力場で

$$\frac{\epsilon_{sD}}{n} = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{(\sqrt{1+\gamma+\gamma^2})^3}{(1+\gamma)(2-\gamma+2\gamma^2)} \quad \dots\dots\dots (69)$$

となる。これを式 (55) に代入し、このときの各ひずみ成分を図 8 に破線で示した。負荷不安定と塑性不安定の発生前後関係は式 (67) および式 (69) を比較して

$$\begin{aligned} -1/2 \leq \gamma \leq 0: \quad \frac{\epsilon_{sD}}{n} \leq \frac{\epsilon_{sL}}{n} \\ 0 < \gamma < 1: \quad \frac{\epsilon_{sD}}{n} > \frac{\epsilon_{sL}}{n} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (70)$$

である。したがって、前者のひずみ速度比の範囲では式(67)による変形で負荷不安定が実現するが、後者の範囲ではこの変形段階でくびれの発生は促せない。そこで、後者に関して円筒の張出しにおけると同様に、式(67)による限界後 s_1 を一定に保持し、 s_2 の増加で変形が進行する場合を想定する。このとき、式(66)からひずみ速度比の時間変化が

$$\dot{\gamma} = \frac{2+\gamma}{3\gamma} \left\{ 2(1+\gamma+\gamma^2) \frac{n}{\epsilon_s} - \sqrt{3} \sqrt{1+\gamma+\gamma^2} \right\} \dot{\epsilon}_s \quad (71)$$

で与えられる。これを式(66) $_2$ に代入することで $\dot{s}_2$ を知ることができる。式(67)の限界後は $\dot{s}_1=0$ であるので、 $\dot{s}_2=0$ を実現したとき除荷発生が可能となる。このとき初めてくびれの発生が促されることになる。このくびれ発生の発端を図8に細い実線で示した。

板の張出し成形における限界は図8で予測された負荷不安定による限界とはかけ離れている。通常の成形性試験における限界はくびれ発生が視覚的に認識されたときであり、くびれ発生の発端ではない。張出し成形($-1/2 \leq \gamma \leq 1$)においてくびれがとり得る形態は式(1-67)から垂直形態(形態P)であり、このときひずみ速度は $\gamma=0$ でなければならない。したがって、くびれ領域が縮小し、板表面から見て線状に局所化する段階ではこの形態に到達していなければならない。そこで、くびれ発生が可能になる状態から $\dot{s}_1=0$ を維持してさらに変形を進め、最終的に $\gamma=0$ の状態に到達したときの変形を求めた。これを局所限界と呼ぶことにし、図8に点線で表示した。局所限界からはこの形態を維持して線状の局所化を進展させながら変形が進み、き裂へと成長するものと推測される。したがって、局所限界は成形性判定試験における成形限界値と比較できる状態にある。図8に●印で示した実験点はHeckerによるものである⁽¹²⁾。局所化の認識の相違、試験片の個性などにより実験値そのものも大きくばらついてはいるが、局所限界はこれらをよく表している。

板の成形性判定は塑性加工上の重要性和平面応力間

Fig.8 Instabilities in sheet stretching

題として取り扱うことのできる簡便さからこれまで多くの考察がなされてきた。また、そこでは局所くびれがき裂状態に近いことから多くはこれにより限界を予測しようとする試みであった。しかし、局所くびれそのものが不安定現象ではないことからこれにより成形性を合理的に予測することはできなかった。このため、実験値と比較できる限界値を直接得ることはできなく、さらに、くびれ発生を可能にする限界から局所限界まで少なからぬ変形が見込まれるため、合理的に評価できる結果を得ることは容易ではなかった。

4. 結 言

延性予測において関心の高い事例に負荷不安定規準を適用し、その適用可能性を検討した。

負荷不安定の実現にはその基本条件和附随条件の両立が必要である。これらの条件は一般に同時に成立するのではなく、どちらかが先行している。附随条件の成立が基本条件のそれより先行しているときには基本条件の成立時点まで設定した変形経路を維持するように負荷を制御することは可能である。これとは逆に、後者が前者より先行している場合には、基本条件を満足した時点以降は設定した変形経路を維持する負荷制御が困難となり、経路維持が損なわれることが推察される。このような例は平面応力場における成形性判定で見られ、そこでは限界算出にいくぶん煩雑な取り扱いが求められた。

塊材ではくびれ発生を可能にする限界から局所限界に至るまでの変形過程はくびれ発生領域を取り囲む周辺領域が大きく拘束しているため、負荷不安定限界はき裂発生限界を比較的よい近似で予測することができた。このため塊材の成形性は板問題に比べかえって統一的な処理で判定が可能であった。

検討した個々の事例において負荷不安定規準は合理的な延性予測の可能性を示した。

文 献

- (1) 守時 一, 機論, 67-659, A (2001), 延性破壊の塑性力学的予測 (第1報, 本質的規準)
- (2) 守時 一, 機論, 65-639, A (1999), 2340-2347.
- (3) Wafi, A. S., El-Abbsasi, N. and Abdel-Hamid, A., *Materials Processing Defects*, (1995), 333-357.
- (4) 守時 一, 機論, 64-622, A (1998), 1617-1624.
- (5) Arndt, J., Sprock, A., Dahl, W., Pesek, L., and Kumar, A. N., *Proc. Int. Conf. 9th Symp. on Metallography* (1995), 101-105.
- (6) 工藤英昭・青井一喜, 塑性と加工, 8-72 (1967), 17-27.
- (7) 守時 一・奥山栄樹, 機論, 59-559, A (1993), 769-776.
- (8) 守時 一・奥山栄樹, 機論, 65-637, A (1999), 2008-2015.
- (9) 守時 一, 機論, 66-646, A (2000), 1218-1225.
- (10) 守時 一, 機論, 64-628, A (1998), 2990-2997.
- (11) Stout, M. G., and Hecker, S. S., *Mech. Mater.*, 2 (1983), 23-31.
- (12) Hecker, S. S., *Trans. ASME, J. Eng. Mater. Technol.*, 97 (1975), 66-73.