高速多重極境界要素法を用いた効率的な防食設計の最適化手法*

天谷 賢治^{*1}, 兼子 徹^{*2}, 青木 繁^{*1}

Effective Optimization of Cathodic Protection Design by Fast Multipole Boundary Element Method

Kenji AMAYA^{*3}, Toru KANEKO and Shigeru AOKI

^{*3} Tokyo Institute of Technology, Dept. of Mechanical and Environmental Informatics,
Ookayama, Meguro-ku, Tokyo, 152-8552 Japan

An effective optimization technique for cathodic protection design is developed. To cope with the large amount of memory and calculation, the fast multipole boundary element method (FMBEM) is applied. To achieve an effective optimization, the initial values of the design variables, i.e., the location and current of each electrode, are determined by solving an inverse problem. In the inverse problem both of the potential and the current density on the metal surfaces to be protected are given as the ideal values, i.e., the protection potential and its corresponding current density. The inverse problem is solved effectively by using the FMBEM. Using thus obtained initial values, the optimization problem is solved by the simplex method. A couple of example problems are solved to demonstrate the effectiveness and usefulness of the present method.

Key Words: Boundary Element Method, Corrosion, Fast Multipole Expansion, Optimization, Cathodic Protection Design

1. 結 言

埋設パイプラインや海底油田のプラットフォームは、土壌や海水を電解液とする電場の中にあり、腐食の被害をうけやすい。腐食によりパイプラインから内容物がもれて災害が起こったり、プラットフォームが崩壊したりする可能性があり危険である。

日本において腐食対策費および腐食損失は、GDP の約 2% と言われており、1996 年度で約 10 兆円にもおよぶ。そのため、十分な防食対策を施し、その保障を与える防食および腐食の解析を行なうことは重要である。

外部電源から電流を流入し、金属の電位を一定電位以下に保つ防食法⁽¹⁾ (カソード防食) は、数多くある防食法の中でも最も安全で信頼のおける方法であり、しばしば用いられている。しかし、電極の位置や加える電流の大きさについては従来の経験則に頼って決定されることが多いため、防食に過不足が生じることがある。このため合理的な決定法が望まれている。

腐食解析問題は金属表面の電位、電流密度を求める

問題に帰着されるので、その解析法としては金属表面の要素分割のみで解析が行える境界要素法が適している。また、腐食解析では解析領域が海水などの媒体の領域となるため、しばしば大規模な問題となる。境界要素法では未知数が N である構造物の解析を行うには、 $O(N^2)$ の記憶量と $O(N^3)$ の計算量が必要となる。そのため、自由度が 1 万をこえる大規模問題の解析は困難であった。

これまでに著者らは、大規模な問題を解くために開発された高速多重極展開法^{(2)~(4)}を、簡単な腐食問題の順解析に適用した⁽⁵⁾。高速多重極展開法を用いることで、記憶量が $O(N)$ 、計算量が $O(N^{1+\alpha})$ に減少する。 α は反復回数により決定する $0 \leq \alpha \leq 1$ の値である。本研究では、高速多重極展開法を用いた境界要素法を、高速多重極境界要素法と呼ぶことにする。

防食を達成する電極を設計する最適化問題では、繰り返し計算が行なわれる。しかし、繰り返し計算は問題の非線形性が強い場合、繰り返し回数が多くなり計算時間が莫大になる可能性があるという問題がある。

本研究では、高速多重極境界要素法を防食設計の最適化問題に適用することを試みる。また、非線形性が強い場合の計算時間を短くするために、高速多重極境界要素法の特徴を利用して効率的な最適化手法を開発

* 原稿受付 2001 年 3 月 16 日。

^{*1} 正員、東京工業大学情報理工学研究所 (〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1)。

^{*2} 東京工業大学大学院。

E-mail: kamaya@a.mei.titech.ac.jp

する。例題により本手法の有効性を確認する。実際の構造物(ポンプのある水路)の防食設計の最適化を行なう。

2. 高速多重極境界要素法による腐食解析

Fig. 1 Boundary condition

2.1 基礎方程式 図1のような電位 ϕ が指定された境界 Γ_d , 電流密度 i が指定された境界 Γ_n , 金属と接する境界 Γ_m を持つ領域 Ω 内部に, 電極 e がある時, 電位 ϕ は電極で湧き出しのあるポアソン方程式を満足する⁽⁶⁾.

$$\kappa \nabla^2 \phi = \sum_{e=1}^m I_e \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_e) \quad (1)$$

ここで κ は電気伝導度, $\mathbf{x}_e$ は電極の位置, I_e は電流の大きさ, m は電極の個数, $\delta(\cdot)$ はディラックのデルタ関数である。

本研究においては, 金属に対する溶液の電位 ϕ を解析するので, 通常の腐食問題に用いられる飽和甘こう電位 E の符号を反転させたものを ϕ として用いることにする。

式(1)を変形すると, 境界積分方程式は以下のようになる。

$$\kappa c \phi = \int_{\Gamma} (\phi^* i - i^* \phi) d\Gamma - \sum_{e=1}^m I_e \phi_e^* \quad (2)$$

$$\phi^* = \frac{1}{4\pi r} \quad (3)$$

$$i^* = \kappa \frac{\partial \phi^*}{\partial n} \quad (4)$$

$$c = \begin{cases} 0 & \text{out of } \Omega \\ \frac{1}{2} & \text{on } \Gamma \\ 1 & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (5)$$

ここで, ϕ^* は基本解, $\partial/\partial n$ は外向き法線方向の微分である。

式(2)は解析的に解けないので, N 個の一定要素で近似すると次式のように離散化される。

$$\kappa c \phi = \sum_{j=1}^N \left(i_j \int_{\Gamma_j} \phi^* d\Gamma - \phi_j \int_{\Gamma_j} i^* d\Gamma \right) - \sum_{e=1}^m I_e \phi_e^* \quad (6)$$

ここで, ϕ_e^* は電極の位置における基本解の観測値とする。

2.2 高速多重極展開法 高速多重極展開法のアルゴリズムについては, 既報⁽⁵⁾で詳細が説明されているので, ここでは高速多重極境界要素法に用いる多重極展開係数のみ説明する。

基本解を多重極展開して境界積分方程式を以下のよう表現する。

$$\int_{\Gamma_j} (i_j \phi^* - \phi_j i^*) d\Gamma = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{jn}^m \frac{Y_n^m(\theta, \varphi)}{r^{n+1}} \quad (7)$$

$$E_{jn}^m = i_j I_{jn}^m - \phi_j \Phi_{jn}^m \quad (8)$$

$$I_{jn}^m = \int_{\Gamma_j} \{Y_n^{-m}(\theta', \varphi') R^n\} d\Gamma \quad (9)$$

$$\Phi_{jn}^m = \int_{\Gamma_j} [\nabla \{Y_n^{-m}(\theta', \varphi') R^n\} \cdot \mathbf{n}] d\Gamma \quad (10)$$

ここで, $r, \theta, \varphi, R, \theta', \varphi'$ は極座標値, $Y_n^m(\cdot, \cdot)$ は球面調和関数である。

leaf k での多重極展開係数は, cell の中心を展開中心とする要素の多重極展開係数の和として表現できる。

$$M_{kn}^m \equiv \sum_{j \in \text{leaf } k} E_{jn}^m \quad (11)$$

電極を含む cell の場合は, ϕ_{ie}^* を多重極展開して次のように表現できる。

$$M_{kn}^m \equiv \sum_{j \in \text{leaf } k} E_{jn}^m + \sum_{e \in \text{leaf } k} I_e Y_n^{-m}(\theta_e, \varphi_e) R_e^n \quad (12)$$

以上のように表現し, 反復解法⁽⁷⁾を用いてある条件での電位 ϕ および電流密度 i を求めることができる。

3. 防食設計の最適化問題

金属表面が防食されているためには, 電位がある一定電位(防食電位) E_p 以下に保たれる必要がある。

$$-\phi \leq E_p \quad (13)$$

防食を達成するのに必要な外部電力 P は次式で与えられる。

$$P = \int_{\Gamma_e} \{\phi + f_e(i)\} i d\Gamma \quad (14)$$

ここで、 Γ_e は電極の位置 x_e を中心とした半径 ε (ε は Ω に比べて十分小さい)の球とする。また、 $f_e(i)$ は電極 e の分極曲線を表す。本最適化問題では、電力最小の条件を最適条件と考えて、式(14)を目的関数とする。

以上より、防食設計の最適化問題は式(13)を満足し、式(14)を最小とする I_e および x_e を求める問題に帰着される。そこで、式(13)を式(14)の最小化に対する制約条件と考え、ペナルティ係数 k を用いて次式のように定義する。

$$P^* = P(I_e, x_e) + k \|b(I_e, x_e)\|^2 \quad (15)$$

ここで、 $\|\cdot\|$ はユークリッドノルムを表し、 b は次式で定義される成分からなるベクトルである。

$$b_j = (\phi_j + E_p)u(-\phi_j - E_p) \quad (16)$$

ただし、 $u(\cdot)$ は単位ステップ関数である。式(15)は式(13)の制約条件が破られると、非常に大きな値(ペナルティ)が電力値 P に加えられるようになっている。式(15)を最小とする I_e および x_e をシンプレックス法⁽⁸⁾で探索する。

4. 最適化計算の効率化

4.1 方針 シンプレックス法などで最適解を探索する場合、非線形性が強い問題では計算時間が多くなる。本最適化問題では、目的関数式(15)が非線形性を持っている。したがって、初期値が最適解と大幅に異なると最適解が求まるまでの計算時間が多くなる。そこで、高速多重境界要素法の特徴を利用して、初期値を効率的に決定する手法を開発した。

本最適化問題において理想的な防食状態は、与える電流に過不足ない状態で、表面全ての電位および電流密度が、防食電位および電流密度となっている時である。表面全ての電位および電流密度を、防食電位および電流密度とした時、それを実現する電極を設計する。すなわち、境界積分方程式に理想的な状態の境界条件を二重境界条件として与え、逆に電極の設計変数 I_e および x_e を求める逆問題を解くことを考える。

境界積分方程式から電流 I_e および電極の位置 x_e を求める時、通常の境界要素法は電極と要素は個々に影響があるため、大規模問題では記憶量および計算量が莫大となる。そこで、高速多重境界要素法を用いる。高速多重境界要素法は電極と要素の影響を多重極展開係数としてまとめて扱うため、通常の境界要素法より効率的に計算できる。

高速多重境界要素法は、cellに分割している。cellは分割の深さによって図2のようにレベルに分かれて

いる。境界積分方程式は、分割の各レベルにおいて考えられる。本節では、まず、最も簡単な分割のレベル0(root cell)で考えた場合について述べる。次に、長細い部分を持つ構造物で、分割のレベル0では高速多重境界要素法を用いた時の誤差が大きくなる場合についての考え方を述べる。

Fig. 2 Level for cell division

Fig. 3 Field to which M_{en}^m for level 0 is applicable

4.2 単純な構造物の場合 単純な構造物の内部を防食する場合、電極の多重極展開係数 M_{en}^m を適用できる範囲は、cell中心から電極の位置までを半径とする球の外部である。図3のように構造物は電極の多重極展開係数 M_{en}^m を適用できる範囲にあるので、分割のレベル0で考えれば十分である。

分割のレベル0の場合、境界積分方程式は次式である。

$$\kappa c_i \phi_i - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n M_{0n}^m(I_e, x_e) \frac{Y_n^m(\theta_i, \varphi_i)}{R_i^{n+1}} = 0 \quad (17)$$

ここで $M_{0n}^m(I_e, x_e)$ はroot cellにおける多重極展開係数である。高速多重境界要素法では直交基底で級数表示しているので、次式のように変形し、多重極展

開係数を比較して電流 I_e および電極の位置 x_e を求める。

$$\int \left\{ \kappa c_i \phi_i - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n M_{0n}^m(I_e, x_e) \frac{Y_n^m(\theta_i, \varphi_i)}{R_i^{n+1}} \right\} \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} Y_{n'}^{m'}(\theta_i, \varphi_i) d\Gamma = 0 \quad (18)$$

式(18)は、理想的な状態では成立しない場合があるので、次式のように変形し最小2乗解を求める。

$$\begin{aligned} J &= \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[\int \kappa c_i \phi_i Y_{n'}^{m'}(\theta_i, \varphi_i) d\Gamma \right. \\ &\quad \left. - M_{0n}^m(I_e, x_e) \int \frac{Y_n^m(\theta_i, \varphi_i) Y_{n'}^{m'}(\theta_i, \varphi_i)}{R_i^{n+1}} d\Gamma \right] \\ &= \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[\sum_{i=1}^N \kappa c_i \phi_i Y_{n'}^{m'}(\theta_i, \varphi_i) \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \sum_{j \in \text{leaf } 0} E_{jn}^m + \sum_{e \in \text{leaf } 0} I_e Y_n^{-m}(\theta_e, \varphi_e) R_e^n \right\} \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=1}^N \frac{Y_n^m(\theta_i, \varphi_i) Y_{n'}^{m'}(\theta_i, \varphi_i)}{R_i^{n+1}} \right] \quad (19) \end{aligned}$$

式(19)において、繰り返し計算による再計算は、 $\sum_{e \in \text{leaf } 0} I_e Y_n^{-m}(\theta_e, \varphi_e) R_e^n$ の部分のみである。したがって、大規模問題であっても計算量が莫大になることがなく、効率的に解を求めることができる。これに対し通常のBEMでは、繰り返し計算の度に ϕ_e^* を全ての要素に対して再計算する必要がある。

ここで求めた解は、3節の最適化問題の解とはならないが、最適解の近傍にあることが期待される。また、最適化問題が多峰性を持つ場合には、式(19)を複数の初期値から最小点を探索することにより簡便に複数の局所最適解の近傍を得ることができる。

Fig. 4 Field to which M_{en}^m for level 0 is applicable

4.3 細長い部分のある構造物の問題 細長い部分のある構造物の内部を防食する場合、電極が root cell の中心から遠く離れることが考えられる。これま

Fig. 5 Field to which M_{en}^m for level n is applicable

でのように分割のレベル0で考えると、図4のように構造物の大部分が電極の多重極展開係数 M_{en}^m を適用できる範囲にない。したがって、電極の多重極展開係数 M_{en}^m を適用できる範囲に領域を分割する、すなわち分割のレベルを上げなくてはならないと考えられる。

分割のレベルを上げると、図5のように複数の cell がある。電極を含む cell に注目すると、構造物は電極の多重極展開係数 M_{en}^m の適用できる範囲にある。そこで、この cell 内で探索を行なう。他の cell の影響は、注目している cell に M2L することで考慮する。ここで、M2L とは多重極展開したポテンシャル関数を局所的にテイラー展開して評価する手順を表す⁽²⁾。探索の過程で、探索点が始めに注目した cell から移動する場合がある。その場合、移動した先の cell を新しく注目する cell として探索を行なえば良い。以上を繰り返すことにより、解は求められる。

5. 解析例

Fig. 6 Cubic tank to be protected with one electrode

Fig. 7 Polarization curve

Fig. 8 Potential distribution along x

5.1 大規模構造物の最適化 図6に示す一辺が1mの立方体内部を、1つの電極(半径5[cm])で最適化した。立方体は $x=0.0\text{m}$ の面が絶縁、他の面が金属である。一般に金属の分極曲線は非線形であるが、本節で対象とする図7の斜線の範囲では線形とみなせるので、図7を線形化して用いた。

解析で与えた条件は、防食電位 E_p が -1.0V 、ペナルティ係数 k が 10000、セル内の最大要素数が 20 である。初期値は、電流 I_e が 5.0A 、電極の位置 x_e が $(0.1, 0.1, 0.1)\text{m}$ とした。大規模構造物として、三角形一定要素 10800 個に分割した。

図8は、電位の x 方向分布を表示した結果である。表面すべての計算点における電位を表示しているのと同じ x に対して多数のプロットが表示されている。これより表面全てが防食されていることが確認される。最適解は、電流 I_e が 8.64A 、電極の位置 x_e が $(0.66, 0.50, 0.50)\text{m}$ で、その時の電力 P は 594W であった。

高速多重極境界要素法を適用することで、通常の境界要素法では解析できない大規模構造物の最適化が可能になった。なお、複数の電極による最適化も行なえることを確認した。

5.2 要素数と計算時間の関係 5.1 節と同じ条件で、要素数を変えた時の要素数と計算時間の関係を、通常の境界要素法 (BEM)、高速多重極境界要素法 (FMBEM)、本手法 (Present optim.) の3つについて比較した。

要素分割は三角形一定要素を用いて行なった。

図9は、要素数と計算時間の関係を対数で表示した結果である。メモリー 2Gbyte の計算環境において通常の境界要素法は、要素数約 5000 付近でメモリーが不足したが、高速多重極境界要素法は、それを越えても十分計算可能であった。また、要素数約 4000 を越えると、高速多重極境界要素法を適用した方が計算時間が短くなると考えられる。

つぎに 4 章で提案した簡易最適化法で得られた電極電流 ($I_e=5.78\text{A}$) および電極位置 ($x_e=(0.59, 0.50, 0.50)\text{m}$) を初期値として通常の最適化計算を行った。なお、最適解は $I_e=8.64\text{A}$ 、 $x_e=(0.66, 0.50, 0.50)\text{m}$ であった。この場合の計算時間を図9中の◇で示す。この方法が、高速多重極境界要素法のみを適用した場合より計算時間を 1/2 程度に短縮できていることがわかる。

Fig. 9 Time of calculation for number of elements

5.3 実際の構造物の最適化 図10に示すポンプのある水路の実際の構造物を1つの電極で最適化した。構造物は黒の部分がコンクリート、灰色の部分がスチールである。一般に金属の分極曲線は非線形であるが、本節では線形とした。三角形一定要素 4668 個に分割した。

解析で与えた条件は、防食電位 E_p が -0.77V 、ペナルティ係数 k が 1.0×10^{20} 、セル内の最大要素数が 20 である。本手法により初期値は、電流 I_e が 90.8A 、電極の位置 x_e が $(24.5, 7.2, 8.2)\text{m}$ に決定した。

図11は、表面全ての電位の値を表示した結果である。表面全てが防食されていることが確認された。最適解は、電流 I_e が 6326A 、電極の位置 x_e が

Fig. 10 Model for real structure

Fig. 11 Potential distribution along x

(24.9, 5.6, 7.9)m で、その時の電力 P は $3.17 \times 10^8 W$ であった。最適解の位置を図 10 に示した。

実際の構造物においても効率的に最適化できることが確認された。なお、電流 I_e が異常に高いのは、1つの電極で防食しているためである。本例では、複雑な形状の大規模構造物に本手法が有効であることを示すために電極の数については重視せず1つとしたが、複数の電極による防食の最適化を行なうことも可能である。

6. 結 言

- 防食設計の最適化問題に高速多重極境界要素法を適用することで、通常の境界要素法では解くことができなかった大規模問題を解くことが可能となった。
- 高速多重極境界要素法の特徴を利用した効率的な初期値の決定法を開発した。高速多重極境界要素法のみを適用した場合より計算時間が短縮されることを、例題により確認した。
- 実際の構造物 (ポンプのある水路) の防食設計の最適化を行なった。本手法の有効性を示した。

謝 辞

本研究の一部は科研費基盤 B(2) によって行なった。また、ポンプのある水路の構造物については、荏原総研の宮坂氏および荏原製作所 (株) の高山氏にご教示頂いた。ここに謝意を表する。

References

- (1) 腐食防食協会編, 防食技術便覧, 日刊工業新聞社, (1986).
- (2) Rokhlin V., Rapid solution of integral equations of classical potential theory, Journal of Computational Physics, vol.60, pp.187-207(1987).
- (3) Greengard L., The Rapid Evaluation of Potential Fields in Particle Systems, MIT Press, Cambridge, (1988).
- (4) Greengard L. and Rokhlin V., A Fast Algorithm for Particle Simulations, Journal of Computational Physics, vol.73, pp.325-348(1987).
- (5) 中山 淳, 浦郷正隆, 天谷賢治, 青木 繁, 高速多重極境界要素法による腐食問題の解析, 材料, 48, [11], pp.1244-1248(1999).
- (6) 青木 繁, 天谷賢治, 宮坂松甫, 境界要素法による腐食問題の解析, 裳華房, (1998).
- (7) 藤野清次, 張紹良, 反復解法の数理, 朝倉書店, pp.48 (1996).
- (8) 渡部 力, 名取 亮, 小国 力, Fortran77 により数値計算ソフトウェア, 丸善, pp.240-243(1998)