一次元逆問題の境界要素法による新型解法* (はりの荷重同定問題への適用例)

木須 博行^{*1}, 近藤 睦浩^{*2}, 戎 圭 明^{*1}

A New Analysis Scheme for One-Dimensional Inverse Problem by BEM (Application to Identification of External Loads on the Beam)

Hiroyuki KISU^{*3}, Yoshihiro KONDO and Guiming RONG

^{*3} Faculty of Engineering, Nagasaki University,
1-14 Bunkyo-machi, Nagasaki-shi, Nagasaki, 852-8131 Japan

In the analysis of inverse problems in various fields, it seems that a priori assumptions for the solution is required. This requirement causes many inconveniences on the analysis. We have developed a new analysis scheme for the inverse problems by introducing the discrete integral method utilizing the delta function. In this report, the new scheme is applied to the one dimensional inverse problems. Namely, a scheme for solving the inverse problem on identification of external loads applied on a beam is developed. It is proved through many examples that the present scheme will give accurate solutions without any assumptions.

Key Words: Inverse Problem, Beam, Boundary Element Method, Delta Function, Discrete Integral Method, Computational Mechanics

1. 結 言

逆問題⁽¹⁾⁽²⁾の解析は、近年、さまざまな分野ですで行われていることではあるが、まだ多くの問題点が残されている。その一つに推定に関する問題点がある。それは、これから推定しようとする対象に関する、形や数やそれぞれの大きさ、存在する位置などの仮定情報を推定の補助的な情報として与える必要があるという点である。すなわち、推定対象は当然未知の存在であるため、その先験的な情報に関していくつかの仮定を置かなければ逆問題として解くことが困難な場合が多い。そして、仮定するパラメータの数によっては決定条件式となる方程式の数と合わず、不自然な式を用いたりしなければならぬ。これらのことは逆問題解析の一般的な方法を確立することが困難な原因となっている。このような理由により、推定対象に対してなんら仮定をすることなしに逆問題解析が行える方法を確立することは重要である。

本研究では、逆問題解析における推定を先験的な仮

定なしに行うための一つの手段として、まずデルタ関数を利用した離散積分法^{(3)~(7)}なるものを開発し、それを境界要素法による逆問題の解析に導入することを試みる。この方法によれば推定対象の仮定をすることなしに推定が自然に行えることを示す。本報では、まず一次元逆問題に適用し、均質はりの曲げ問題^{(8)~(10)}における外荷重分布の推定問題を取り上げる。

2. 一次元逆問題の設定

2・1 境界要素法によるはりの積分方程式^{(8)~(10)}

はりの曲げ問題における外荷重分布の推定問題に、本研究による新型解法を適用するには、分布荷重が積分項にそのまま現れる境界要素法による定式化を用いるのが都合がよい。そこで最初に、境界要素法による基礎式をまとめておく。

図1のように外荷重分布 $q(x)$ を受ける均質はりにおいて、はりのたわみ w に関する式は

$$W(s) = [-WQ^* + \theta M^* - M\theta^* + QW^*]_0^L + \int_0^L q(x)W^*(x, s)dx \dots\dots\dots (1)$$

のように書ける。ここで、 L ははりの長さ、 s は観測点、 θ はたわみ角、 M は曲げモーメント、 Q はせん断力である。これらの間には

* 原稿受付 2000 年 10 月 16 日。

^{*1} 正員, 長崎大学工学部(〒852-8131 長崎市文教町1-14)。

^{*2} 准員, 長崎大学大学院。

E-mail: kisu@net.nagasaki-u.ac.jp

Fig. 1 A homogeneous beam applied the external load $q(x)$

$$\frac{dW}{dx} = \theta(x), \quad \frac{d^2W}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}, \quad \frac{d^3W}{dx^3} = -\frac{Q(x)}{EI} \quad \dots\dots\dots (2)$$

の関係がある。ここに、 EI は曲げ剛性である。また、 W, θ, M, Q にアスタリスクを付した量 W^*, θ^*, M^*, Q^* はそれぞれ既知の核関数で、これらは

$$W^*(x, s) = \frac{1}{12EI} |x-s|^3 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\theta^*(x, s) = \frac{1}{4EI} |x-s|^2 \operatorname{sgn}(x-s) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$M^*(x, s) = -\frac{1}{2} |x-s| \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$Q^*(x, s) = -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x-s) \quad \dots\dots\dots (6)$$

で与えられる。ここで、 $\operatorname{sgn}(x-s)$ は符号関数である。本論文における逆問題とは、観測点 s でのはりのたわみ $W(s)$ をモニタし、その情報と、はりの両端における境界条件の情報からはりが受ける外荷重分布

[式(1)の右辺の積分項に含まれる $q(x)$] を推定することをいう。

2.2 デルタ関数を利用した離散積分法^{(3)~(7)} 逆問題の解析を行う前に、まずデルタ関数を利用した離散積分法を導入する。次のような積分

$$\int_a^b f(x)K(x)dx \quad \dots\dots\dots (7)$$

を考える。ここに、 $K(x)$ は既知の関数、 $f(x)$ は興味の対象として取扱われる関数(例えば今回の場合外荷重分布関数など)で、未知の場合も既知の場合もある。この関数 $f(x)$ は従来ならば、例えば二次要素などを用いて近似されるが、こういう方法に代わり、以下のような Dirac のデルタ関数を用いた近似を導入する。

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \sum_{i=1}^m P_i \delta(x-x_i) \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 n は微分の階数、 P_i はデルタ関数の強度、すなわち、仮想的な集中ソースの強度を表し、 x_i はその作用位置、 m はその個数である。

一方、次式で定義される新しい関数 Z^* を導入する。

$$\frac{d^n Z^*(x)}{dx^n} = K(x) \quad \dots\dots\dots (9)$$

この Z^* は数式的に求めることができるものとする。上式を式(7)に代入し、部分積分を施す。その際に式(8)を考慮すると、式(7)は結局、以下のように書ける。すなわち、 $n=2$ の場合には

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)K(x)dx &= \int_a^b f(x) \frac{d^2 Z^*}{dx^2} dx = \left[\frac{dZ^*}{dx} f - Z^* \frac{df}{dx} \right]_a^b + \int_a^b \frac{d^2 f}{dx^2} Z^* dx = \left[\frac{dZ^*}{dx} f - Z^* \frac{df}{dx} \right]_a^b \\ &+ \sum_{i=1}^m Z^*(x_i) P_i \quad \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

$n=4$ の場合には

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)K(x)dx &= \int_a^b f(x) \frac{d^4 Z^*}{dx^4} dx = \left[\frac{d^3 Z^*}{dx^3} f - \frac{d^2 Z^*}{dx^2} \frac{df}{dx} + \frac{dZ^*}{dx} \frac{d^2 f}{dx^2} - Z^* \frac{d^3 f}{dx^3} \right]_a^b + \int_a^b \frac{d^4 f}{dx^4} Z^* dx \\ &= \left[\frac{d^3 Z^*}{dx^3} f - \frac{d^2 Z^*}{dx^2} \frac{df}{dx} + \frac{dZ^*}{dx} \frac{d^2 f}{dx^2} - Z^* \frac{d^3 f}{dx^3} \right]_a^b + \sum_{i=1}^m Z^*(x_i) P_i \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

式(10)、および式(11)によれば、与えられた積分が、はりの両端の情報とデルタ関数の強度 P_i で表され、積分計算が不要となっている。

この一連の手法を離散積分法^{(3)~(5)} と称し、式(1)のはりの式に導入する。ただし、この方法の見かけは異なるが落合が三重相反境界要素法⁽⁶⁾⁽⁷⁾ に用いた方法と本質的に同等の方法のようである。

2.3 逆問題への適用 さて、上記、式(10)、(11)を式(1)の右辺第2項に $f(x)=q(x)$ 、 $K(x)=W^*(x, s)$ としで代入すれば、次のようになる。

$$W(s) = [-WQ^* + \theta M^* - M\theta^* + QW^*]_0^L + \left[\frac{dZ^*}{dx} q - Z^* \frac{dq}{dx} \right]_0^L + \sum_{i=1}^m Z^*(x_i) P_i \quad (n=2) \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\begin{aligned} W(s) &= [-WQ^* + \theta M^* - M\theta^* + QW^*]_0^L + \left[\frac{d^3 Z^*}{dx^3} q - \frac{d^2 Z^*}{dx^2} \frac{dq}{dx} + \frac{dZ^*}{dx} \frac{d^2 q}{dx^2} - Z^* \frac{d^3 q}{dx^3} \right]_0^L \\ &+ \sum_{i=1}^m Z^*(x_i) P_i \quad (n=4) \quad \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

式(12)または式(13)により、たわみを与える境界要素法の式が、デルタ関数の強度 P_i (未知量)を用いて表されたことになる。本解析法では、これらの式をデルタ関数の作用点におけるたわみをモニタする式として用いる。ただし、式中には強度 P_i のほかに、はり両端における物理量境界値(はり両端においては、それぞれ W, θ, M, Q の4個、合計8個の量が存在し、そのうちの4個は境界条件によって与えられる)、および分布荷重 q とその各次微分が未知量として存在している。しかし、境界条件の情報も使うことができるものとすれば、以下に示すように、これらをすべて未知量として取扱うことができ、境界条件のいかにかわらず正則な連立方程式系を構成することができる。

すなわち、式(12)において、未知数は m 個の P_i (両端を含めず)、はり両端における境界未知量4個、およびはり両端における q の値とその微分値の4個、総計 $m+8$ 個となる。一方、方程式の数は、たわみ情報を m 個のデルタ関数の作用点でモニタして m 個の式が得られる。さらに、はりの曲げ問題を順問題として解く際の4個の基礎方程式を用いる。著者らは先に、はりの曲げ問題を境界要素法で解く場合、次のような基礎式を用いることを提案した^{(8)~(10)}。

$$Q(s) = [-QQ^*]_0^L - \int_0^L q(x)Q^*(x, s)dx \quad \cdots (14)$$

$$M(s) = [-MQ^* + QM^*]_0^L + \int_0^L q(x)M^*(x, s)dx \quad \cdots (15)$$

$$\theta(s) = \left[-\theta Q^* - M \frac{M^*}{EI} - Q\theta^* \right]_0^L - \int_0^L q(x)\theta^*(x, s)dx \quad \cdots (16)$$

$$W(s) = [-WQ^* + \theta M^* - M\theta^* + QW^*]_0^L + \int_0^L q(x)W^*(x, s)dx \quad \cdots (17)$$

本研究では、上式においてそれぞれ $s \rightarrow 0$ とした4個の式を用いた。さらに残りの4個の式は、2・4節で示

Fig. 2 Identified distribution of a concentrated load

す q 自身の内挿式[後述の式(23)], およびその微分の式を用いればよい。このように、必要な数の連立一次方程式は自然な方程式を用いて構成できる。この連立方程式を解けば、 P_i と両端での各未知量を求めることができ、これらを用いて以下に示すように外荷重分布を推定できるようになる。全く同様に、 $n=4$ の場合も連立一次方程式を構成できることは明らかであろう。

2・4 外荷重分布の推定式 まず、次式のような性質をもつ関数 Y^* を導入する。

$$\frac{d^n Y^*}{dx^n} = \delta(x-s) \quad \cdots (18)$$

この Y^* も実際に求めることができ、

$$Y^*(x, s) = \frac{1}{2}|x-s| \quad (n=2) \quad \cdots (19)$$

$$Y^*(x, s) = \frac{1}{12}|x-s|^3 \quad (n=4) \quad \cdots (20)$$

である。この Y^* を式(8)において $f(x)=q(x)$ とした次式、

$$\frac{d^n q(x)}{dx^n} = \sum_{i=1}^m P_i \delta(x-x_i) \quad \cdots (21)$$

の両辺に掛けて重み付き残差表示すると、

$$\int_0^L \frac{d^n q}{dx^n} Y^* dx = \int_0^L \sum_{i=1}^m P_i \delta(x-x_i) Y^* dx \quad \cdots (22)$$

のようになる。上式を部分積分やデルタ関数の性質を用いて変形し、整理すると

$$q(s) = - \left[\frac{dq}{dx} Y^* - q \frac{dY^*}{dx} \right]_0^L + \sum_{i=1}^m P_i Y^*(x_i, s) \quad (n=2) \quad \cdots (23)$$

$$q(s) = - \left[\frac{d^3 q}{dx^3} Y^* - \frac{d^2 q}{dx^2} \frac{dY^*}{dx} + \frac{dq}{dx} \frac{d^2 Y^*}{dx^2} - q \frac{d^3 Y^*}{dx^3} \right]_0^L + \sum_{i=1}^m P_i Y^*(x_i, s) \quad (n=4) \quad \cdots (24)$$

が導かれる。式(23)または式(24)により、任意点 s の荷重分布値 $q(s)$ が計算でき、全体をスキャンすることにより、解の形や個数などを仮定することなく全体の荷重分布を推定することができる。なお、2・3節で述べたように、 $s \rightarrow 0$ および $s \rightarrow L$ とすればわかるように、 q の両端点での値、 $q(0)$ と $q(L)$ 、および上式を微分した各次の微分は P_i のみで与えられており、連立方程式として用いることができる。

3. 解析例

3章では、モデル計算のための解析例を設定し、以上示した外荷重分布の推定法を検証した。実際の問題ではなんらかの観測によりたわみの情報が与えられることを想定しているが、ここでの解析例では、推定す

べき荷重に対して式(14)～(17)によりあらかじめ厳密解を求めておき、観測値の代わりとした。単位についてはモデル計算であり、統一的な単位系を用いられなくてもよいので無次元量とした。ほとんどの場合、境界条件として単純支持のはりを採り上げ、境界条件の違いは最後に検討する。また、式(8)における微分の階数 n は断らない限り $n=2$ としたが、 $n=4$ の場合もあとで検討する(いずれの解析例もはりの全長 $L=10$ 、曲げ剛性 $EI=100$ としている)。

3.1 集中荷重の例 まず、1個の集中荷重が作用している問題の採り上げる。集中荷重の大きさは1、作用位置は $x=2$ の点である。デルタ関数を作用させる点の数 m は両端以外の49とし、等間隔に配置した。推定結果を図2に示す。図2(以降の図もすべて)において、横軸ははりの長手方向にとった座標値(x 軸)を、縦軸は荷重値を表している。また、“Exact”は厳密な分布、“Present”は今回の推定結果の分布である。図2をみると、 $x=2$ の位置に鋭いピークが現れ、しかもその近傍に激しいオーバーシュートが存在していることがわかる。このことからそこに集中荷重が存在することが推定できる。しかしながら、その値は1とは大きく異なったものになっている。この理由は、求めた q 値はあくまでも分布荷重の値であるからである。したがって、集中荷重の大きさを推定するには $q(s)$ を積分しなければならないことに注意が必要である。以上のことから、本解析法では集中荷重の値(非常に狭い範囲の分布荷重の合力かも知れないもの)

を次の式から推定することとした。

$$F = \int_a^b q(\xi) d\xi \quad \dots\dots\dots (25)$$

上式は式(23)または式(24)により簡単に積分できて、具体的な数式表示を得ることができる。図2の結果に対し、式(25)によって算出した集中荷重の推定値を表1に示す。オーバーシュートで乱された範囲では多少誤差が大きいものの、推定値としてはかなりいいものが得られることがわかる。また、全範囲を積分すれば力の平衡条件から1となるべきであるが、これも表中にあるように極めて高精度の値が得られている。

図3は2個の集中荷重が同時に作用している場合の推定結果を示す。この場合も集中荷重の値としては図2の場合とほぼ同じような値が推定できた。このように、2個以上の集中荷重も先験的な仮定なく、自然に推定することができる。ただし、集中荷重同士が非常に近接して、分離が難しい場合が生じることもあり得るが、これも必要に応じて m を増やしたり、二次的な推定を行ったり、等価な分布荷重として評価したりすればよいものと考えられる。

3.2 分布荷重の例 図4は $2 \leq x \leq 8$ の範囲に大きさが1の等分布荷重が作用している場合の推定結果

Table 1 Identified value of the load (exact is 1)

Integration Range	Integrated Value
$1.8 \leq x \leq 2.2$	1.1424
$1.6 \leq x \leq 2.4$	0.9513
$1.4 \leq x \leq 2.6$	1.0208
$0.0 \leq x \leq 10.0$	1.0024

Fig. 3 Identified distribution of two concentrated loads

Fig. 4 Identified distribution of step-shaped constant load

Fig. 5 Identification of a step-shaped linearly distributed load

Fig.6 Identification of a step-shaped quadratic distributed load (in case of $n=2$)

Fig. 7 Identification of two distributed loads

Fig. 8 Identified distribution of step-shaped constant load (in case of $n=4$)

Fig. 9 Identification of a step-shaped quadratic distributed load (in case of $n=4$)

である。この場合においても、値が急激に変化する $x=2$ および $x=8$ 付近でかなり大きな誤差(オーバーシュート)が生じるが、全体的に非常によく推定ができているといえる。

図5は、 $2 \leq x \leq 7$ に $q(x)=2x+1$ で表される、ステップ状の線形分布荷重が存在する場合の推定結果である。この場合においても図4と同様の結果が得られているのがわかる。

図6は、 $2 \leq x \leq 8$ に頂点 $x=5$ で大きさ10、 $x=2, 8$

Fig. 10 Analysis model with boundary conditions of fixed at $x=0$ and free at $x=L$

Fig. 11 Identified result of Fig. 10

Fig. 12 Analysis model with boundary conditions of roller at $x=0$ and fixed at $x=L$

Fig. 13 Identified result of Fig. 12

で大きさ5となるようなステップ状の放物線分布荷重が存在する場合の推定結果である。この場合も、精度良い推定がなされている。この場合はステップ部付近のオーバーシュートはそれほど大きくならなかった。

図7は2個の分布荷重、すなわち、 $2 \leq x \leq 4$ に $q(x) = 2x+1$ で表されるステップ状線形分布、 $6 \leq x \leq 8$ に大きさ1のステップ状等分布荷重が作用している場合の推定結果である。これを見ると、それぞれが単独で作用している場合と変わらぬ精度で推定できていることがわかる。

以上示したように、本研究による方法は、荷重の種類や個数、作用位置など、なんら仮定を設けずに精度よく推定できることが証明された。

3.3 微分の階数 n の影響 前述の結果はすべて $n=2$ の推定式を用いて推定を行った結果であるが、 $n=4$ で推定を行うと推定精度を上げることができる。図8は図4と同じ問題、図9は図6と同じ問題について、 $n=4$ として推定を行った結果である。本解析手法は $n=2$ でも十分な精度で推定が行えるので、 n の違いによる影響は全体的にはあまりないが、 $n=4$ にするとステップ部付近のオーバーシュートがかなり小さくなるが見て取れる。

3.4 他の境界条件の例 これまでの解析例ではすべて単純支持の境界条件で解析した。最後に、種々の境界条件に対応できるかどうかを検討する(解析は $n=2$ として行った)。

図10はいわゆる片持ばりで、図4と同じ等分布荷重が作用した場合の推定を行った。その結果を図11に示す。図12は別の境界条件で、これも荷重分布は図4と同じものである。図11と図13を見ると、図4とほとんど同じ結果となっていることがわかる。すなわち、境界条件が変わっても同一の荷重分布が推定できており、本研究における推定法が種々の境界条件に対応できていることが示されたわけである。

4. 結 言

本論文ではデルタ関数を利用した離散積分法を導入

し、さらにこれを用いて逆問題解析を行う方法を提案した。本報ではまず一次元逆問題に適用した例として、均質はりにおける外荷重分布の推定問題を取扱った。本解析法によれば、外荷重の種類、個数、作用位置などいっさいの仮定を設けずに、その分布が種々の境界条件にも対応して精度よく自然に推定できることを示した。ただし、集中荷重やステップ状に急激に変化する荷重分布の推定の際には、オーバーシュートが生じ、その部分で誤差が大きくなることがある。この点については、本文中、各所で触れたように、精度上必要であれば、一次推定結果の情報を用いて再推定を行うなどの実用的な方法を考える必要があると思われる。これに関しては実際の問題に応じて研究を継続していく予定である。なお、本解析法は連続はりにも容易に拡張することができる。

本論文では理想的な推定条件が設定できる場合を取扱っているが、実際の逆問題では、例えばたわみの観測データが十分に得られない、といったような、条件の悪い場合も多いものと思われる。しかし、そのような条件の悪い場合に対しても、本解析法を基にして有効な対処策を開発できるものと考えている。

文 献

- (1) 久保司郎, “逆問題”, (1998), 101, 培風館.
- (2) チャールズ W. グロエツチュ著(金子晃ほか2名訳), “数理科学における逆問題”, 別冊・数理科学, (1996), 39-61, サイエンス社.
- (3) 木須博行・近藤睦浩・戎圭明, 機講論, No. 008-1 (2000-8), 95-96.
- (4) 木須博行・戎圭明・近藤睦浩, 機講論, No. 00-1, Vol. II (2000-8), 45-96.
- (5) 木須博行・近藤睦浩・戎圭明, 機講論, No. 00-1, Vol. II (2000-8), 47-48.
- (6) 落合芳博, 機講論, No. 00-1, Vol. II (2000), 43-44.
- (7) 落合芳博, 機論, **64** 626, A (1998), 2477-2482.
- (8) 木須博行・ほか2名, 機論, **65** 633, A (1999), 962-967.
- (9) 木須博行・ほか2名, 機論, **65** 633, A (1999), 968-973.
- (10) Kisu, H. and Rong, G., *JSME Int. J.*, Ser. A, **43** 3 (2000), 268-274.