3次元異材界面端特異性解析用特殊有限要素法の開発と 3次元特異性データベースの構築*

許 金 泉^{*1}, 武 藤 睦 治^{*1}

Development of FEM Program for Stress Singularity Analysis and Database of Three Dimensional Interfacial Corner Singularities

Jin-Quan XU^{*2} and Yoshiharu MUTOH

^{*2} Department of Mechanical Engineering, Nagaoka University of Technology,
1603-1 Kamitomioka, Nagaoka-shi, Niigata, 940-2188 Japan

A special finite element method (FEM) program to analyze three dimensional singular order of bonded dissimilar materials has been developed. It has been found that three dimensional stress singular order can be accurately determined by using this program for both single and multiple singularities. It has been also found that the three dimensional stress singularity of the interface corner of bonded dissimilar materials is different from that for both plane strain and plane stress cases. Three elastic parameters to express the effect of material combination on the three dimensional edge singularity have been also investigated. Based on the analysis by using the special FEM program, iso-counter graphs of the stress singular order at the three dimensional interface corner have been drawn for three typical interface corner models, which can be used as the database for determining the three dimensional singularity of bonded dissimilar materials.

Key Words: Three Dimensional Stress Singularity, Special Finite Element Method, Interface Edge, Iso-Counter Graph, Database

1. 緒言

界面端応力特異性の究明は異材の強度評価上極めて重要であり、これまでに主に2次元問題を対象として多くの研究が行われている⁽¹⁾⁻⁽⁵⁾。しかし、実際の異材構造は3次元的で、応力特異性も3次元的に考える必要がある。一方、界面き裂表面点の特異性に関し、数多くの研究⁽⁶⁾⁻⁽⁹⁾が報告されているが、普通の界面コーナ点の特異性に関する研究は極めて少ないのが現状である。古口⁽¹⁰⁾はRongvedの基本解を組込んだ3次元境界要素法を用いて、数値的にコーナ点近傍の応力特異性を調べ、2次元の特異性と異なることを明らかにしている。3次元界面コーナ点の特異性を求める理論解析には大きな困難があるため、現状では数値解析法がもっとも有力な手法であると考えられる。特異性を求める数値解析法は2種類に大別することができる。すなわち、普通の数値解析手法で応力場や変位場の数値解を求め、これらの結果から単一または複数の特異オーダーを数値的に求める方法⁽¹¹⁾と、均質材のき裂先端と自由表面の交差点の特異性解析に広く用いられている特殊有限要素法を用いる方法である。後者の方法はBazantとEstenssoro⁽¹²⁾、SomaratnaとTing⁽¹³⁾らに代表されるように、変位場を特異点からの距離 r に関し、角度方向の座標変数と変数分離形を有することを仮定し、変分原理に基づき、角度方向のみ

離散化して、特異性オーダーを特性値として求めるアプローチである。一方、どの方法でも、解析のコストがかかるだけでなく、高度な数値解析技術が要求されるため(プログラム自身は購入できるとしても、要素分割などでやはり専門的な知識が必要となる)、工学的応用面では不便なところがあることは否めない。実用上では簡便に調べられるデータベースの方が望ましい。そこで本研究は、まず均質材のき裂先端と自由表面の交差点の特異性解析に用いられている特殊有限要素法を異材界面コーナ点の特異性解析に適用することを試み、3次元界面端特異性を求める特殊有限要素法のプログラムを開発する。幾つかの検証例により、本プログラムの高精度、高効率性を確認する。そして、3次元特異性に影響する材料の組合せを表す複合パラメータについて考察し、簡潔な複合パラメータを提案する。これらの複合パラメータを用いて、三つの典型的な3次元界面コーナ点問題に関し、特殊有限要素法で得られた結果を等高線図の形で整理し、そのデータベース化を図る。

2. 特異性解析用有限要素法の基礎理論

き裂先端と自由表面の交点の特異性を求めるために、さまざまな数値解析手法が提案されている⁽¹²⁾⁻⁽¹⁶⁾。本研究ではその中の特殊有限要素法のアプローチを異材界面端の特異性解析に適用する。特殊有限要素法の詳しい定式化は文献(12)および(13)を参照されたいが、ここでは後述の議論に必要な基礎理論のみを簡単に示しておく。図1に示す特異点を原点とする球座標系で、特異点近傍の変位場を次のような形を有すると仮定する。

* 原稿受付 2000年12月5日。

*1 正員, 長岡技術科学大学機械系(〒940-2188 長岡市上富岡町1603-1)。

E-mail: jinquan@mech.nagaokaut.ac.jp

$$u_r = r^\lambda f(\theta, \varphi), \quad v_\theta = r^\lambda g(\theta, \varphi), \quad w_\varphi = r^\lambda h(\theta, \varphi) \quad (1)$$

ただし、 S_1 を球面とし、 S_2 は幾つかの原点を通る平面または円錐面の組合せで、表面力をフリーとする。 S_1 と S_2 が囲んだ領域を V とすると、仮想仕事の原理により、

$$\int_V \delta W dV - \int_{S_1} (p_r \delta u_r + p_\theta \delta v_\theta + p_\varphi \delta w_\varphi) dS = 0 \quad (2)$$

Fig.1 A body with a 3 Dimensional singular point and the related spherical coordinate system

ここで、 W はひずみエネルギー密度であり、 $\partial W / \partial \varepsilon_{ij} = \sigma_{ij}$ 。また、 p_i は i 方向の表面力を示す。式(1)を用いて、外力がコーナ点特異性に影響を及ぼさないものとし、(2)より、次式が導ける。

$$\int_V r^{2\lambda} \delta \bar{U} dr = 0 \quad (3)$$

$$\delta \bar{U} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[F \delta f + F^\theta \delta f_\theta + F^\varphi \delta f_\varphi + G \delta g + G^\theta \delta g_\theta + G^\varphi \delta g_\varphi + H \delta h + H^\theta \delta h_\theta + H^\varphi \delta h_\varphi \right] d\theta d\varphi = 0 \quad \text{for all } \delta f, \delta g, \delta h$$

従って、物体が占めている領域の角度寸法 θ, φ だけを離散化して解析することができ、解析の規模を大幅に減少することができる。上式中、

$$f_\theta = \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad f_\varphi = \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \quad g_\theta = \frac{\partial g}{\partial \theta}, \quad g_\varphi = \frac{\partial g}{\partial \varphi}, \quad h_\theta = \frac{\partial h}{\partial \theta}, \quad h_\varphi = \frac{\partial h}{\partial \varphi},$$

$$F = C_{11} [2 - \lambda(\lambda + 1)] f \sin \theta + (C_{11} - \lambda C_{12}) (g_\theta \sin \theta + g \cos \theta) + (C_{11} - \lambda C_{12}) h_\varphi$$

$$F^\theta = \mu [(\lambda - 1)g + f_\theta] \sin \theta, \quad F^\varphi = \mu [(\lambda - 1)h + f_\varphi / \sin \theta]$$

$$G = \cos \theta [C_{11} + C_{12}(\lambda + 1)] f - \mu(\lambda + 2) f_\theta \sin \theta + \cos \theta (C_{12} g_\theta + C_{11} g \cot \theta) - (\lambda + 2)(\lambda - 1) \mu g + C_{11} h_\varphi \cot \theta$$

$$G^\theta = [C_{11} + C_{12}(\lambda + 1)] f \sin \theta + C_{11} g_\theta \sin \theta + C_{12} g \cos \theta + C_{12} h_\varphi$$

$$G^\varphi = \mu [h_\theta - h \cot \theta + g_\varphi / \sin \theta]$$

$$H = -\mu \left[\begin{array}{l} f_\varphi (\lambda + 2) + g_\varphi \cot \theta + h_\theta \cos \theta \\ -h \cot \theta \cos \theta + (\lambda + 2)(\lambda - 1) h \sin \theta \end{array} \right]$$

$$H^\theta = \mu [h_\theta \sin \theta - h \cos \theta + g_\varphi]$$

$$H^\varphi = [C_{11} + C_{12}(\lambda + 1)] f + C_{12} g_\theta + C_{11} g \cot \theta + C_{11} h_\varphi / \sin \theta \quad (4)$$

ここで、 C_{11}, C_{12} は材料の弾性係数であり、次式のように定義される。

$$C_{11} = \frac{2\mu(1-\nu)}{1-2\nu}, \quad C_{12} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \quad (5)$$

μ, ν はそれぞれ材料のせん断弾性係数とポアソン比である。

3. 3次元異材界面端への適用とプログラムの開発

3.1 異材界面端問題の定式化 以上の定式化は異種接合材界面端問題に簡単に適用できる。領域 V に二つの材料が接合されているとすると、その界面を S_I と仮定すれば、それぞれの材料に対し、式(2)は次のようになる。

$$\int_{V_1} \delta W dV - \int_{S_{I1}} (p_r \delta u_r + p_\theta \delta v_\theta + p_\varphi \delta w_\varphi) dS - \int_{S_I} p_{r1} \delta u_{r1} dS = 0 \quad (6a)$$

$$\int_{V_2} \delta W dV - \int_{S_{I2}} (p_r \delta u_r + p_\theta \delta v_\theta + p_\varphi \delta w_\varphi) dS - \int_{S_I} p_{r2} \delta u_{r2} dS = 0 \quad (6b)$$

界面上では、 $p_{r1} = -p_{r2}, u_{r1} = u_{r2}$ の関係があるので、上式を足し合わせると、

$$\int_{V_1+V_2} \delta W dV - \int_{S_{I1}+S_{I2}} (p_r \delta u_r + p_\theta \delta v_\theta + p_\varphi \delta w_\varphi) dS = 0 \quad (7)$$

となり、式(2)と同じ式が得られる。従って、式(3)と全く同じ定式化が行える。ただし、その場合、領域1、2に対応して、式(4)の材料定数をそれぞれ材料1または2の値を取らなければならない。すなわち、積分の核関数は界面 S_I を境に不連続となっていることに注意が必要である。

3.2 離散化 本研究では θ, φ 平面の要素分割に2次の正規化要素を用いる。すなわち、要素内での f, g, h および座標値はその構成節点の値から次式のように表せる。

$$f = \phi_i f_i, \quad g = \phi_i g_i, \quad h = \phi_i h_i, \quad \theta = \phi_i \theta_i, \quad \varphi = \phi_i \varphi_i \quad (8)$$

ここで、 θ_i, φ_i は節点の座標値であり、 f_i, g_i, h_i は節点における f, g, h の値である。 $\phi_i(\xi, \eta)$ は内挿関数⁽¹⁴⁾であり、 ξ, η は正規化座標である。 f, g, h の θ, φ に関する導関数は式(8)より求めることができる。すなわち、

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi_i}{\partial \theta} f_i = \left[\frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right] f_i, \quad (9)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial \phi_i}{\partial \varphi} f_i = \left[\frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \right] f_i$$

g, h に関しても全く同様である。なお、式(9)中の $\partial \xi / \partial \theta$ などの微分関数は式(8)後半の2式から求めることができる。すなわち、

$$\frac{\partial \xi}{\partial \theta} = \frac{A_4}{A_1 A_4 - A_2 A_3}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \theta} = \frac{-A_3}{A_1 A_4 - A_2 A_3}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \varphi} = \frac{-A_2}{A_1 A_4 - A_2 A_3}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} = \frac{A_1}{A_1 A_4 - A_2 A_3}$$

$$A_1 = \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \theta_i, \quad A_2 = \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \theta_i, \quad A_3 = \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \varphi_i, \quad A_4 = \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \varphi_i, \quad (10)$$

式(3)を任意の要素に関して書き下すと、

$$\delta \bar{U}^e = \{ \delta X_e \}^T [K_e] \{ X_e \} \quad (11)$$

となる。ただし、 $\{ X_e \}$ は要素の各節点の f, g, h 値からなる列ベクトリックスである。2次の正規化要素を用いているため、 $[K_e]$ は 24×24 のマトリックスで、 λ だけが未知係数となっている。すべての要素に関して得られた式(11)を連立し、式(3)より

$$\{ \delta X \}^T [K] \{ X \} = 0 \quad (12)$$

となる。ここで、 $\{ X \}$ はすべての節点の f, g および h 値からなる列ベクトルである。 $[K]$ は全体のマトリックスであり、節点数が N であれば、 $3N \times 3N$ のマトリックスになる。その中でやはり

λ だけが未知係数となっている。式(12)が任意の $\delta f, \delta g, \delta h$ に対して成立しなければならないので、結局次式のような3N個の斎次方程式が得られる。

$$[K]\{X\} = 0 \quad (13)$$

λ の解は上式の非零解を持つ条件から得られる。すなわち、

$$\det[K] = 0 \quad (14)$$

3.3 プログラミング時の注意点 要素の剛性マトリックス $[K_e]$ を計算するとき、式(4)で示したように、積分核に $1/\sin\theta$ の項が残る。これは $\theta=0$ および $\theta=\pi$ の点を含む要素の積分が特異積分であることを示している。本研究では境界要素法に広く使われている変数変換法⁽¹⁷⁾を用いて、この特異積分を求めた。また、これは要素分割のとき、 $\theta=0, \pi$ 付近である程度細かく分割する必要があることも示唆している。この特異積分の処理の有無は解の精度に大きく影響を及ぼす。また、界面を境に、積分の核関数が不連続となるため、界面近傍の両側もある程度細かく要素分割する必要がある。

なお、式(14)から λ を求めるには、予め多数の λ_i に対応する $\det[K]$ を計算し、その値の符号が変化している区間で挟み込み法により λ を求めればよい。ただし、 $\det[K]$ を計算するとき、その値が大きすぎて、オーバフローとなることがある(節点数が多いほど、その値が大きくなる)。本研究では $\det[K]$ 計算の各段階で、 10^{10} を超えると、その値を 10^{10} で割り、割った回数を別途記録しておく。なお、挟み込み法を利用しているので、その値の符号が重要である。

3.4 検証例 以上に示した方法で、FORTRANを利用して特殊有限要素プログラムを作成した。検証のために、まず図2に示す均質材き裂先端表面点Oの特異性を求めた。要素分割も図に示している。 $\theta=0$ 付近でより細かく要素分割していることが分る。材料定数はヤング率を210GPa、ポアソン比を0.3とする(実際に特異性はポアソン比のみに依存する)。得られた λ の値は二つあり、表1に既存の結果と比較している。本プログラムより得られた結果は既存の結果と良く一致していることが分かる。なお、本研究では対称変形と逆対称変形を区別する必要がなく、そのまま二つの λ 値が求まるように工夫している。

Fig.2 Crack corner in a homogeneous body and element division

Table 1 Singular order($=1-\lambda$) for a crack corner

	λ_1	λ_2
This study	0.5481	0.3951
Bazant and Estenssoro (12)	0.5477	0.402
Somaratna and Ding (13)	0.5478	0.3911
Benthem (18)	0.5477	0.3927

4. 異材界面コーナ点特異性の解析例

4.1 楔型接合界面端 解析モデル及び要素分割を図3に示す。ここで、 $\phi_0=\pi$ の場合は直角接合の平面ひずみ問題となり、O点での特異性はそれと一致しなければならない。図4には材料定数を $E_1=100\text{GPa}, \nu_1=0.37$ 、 $E_2=500\text{GPa}, \nu_2=0.25$ とした場合の特異性解析結果を示す。図から分るように、 $\phi_0=\pi$ の場合の λ 値(0.8313)は平面ひずみ問題の理論解(0.8308)と良く一致している。また、 $\phi_0=\pi/2$ の場合については、図中に示すように、古口⁽¹⁰⁾らの境界要素法解析結果は特異性が $\lambda=1-0.208=0.798$ であり、本解析結果と良く一致している。なお、図4には平面応力の場合の特異性も併記しているが、コーナ点での特異性は平面応力状態の特異性と大きく異なり、平面ひずみの特異性よりもさらに強くなっていることが分る。また、楔角度が鋭い(ϕ_0 が小さい)ほど、特異性が強くなる。

Fig.3 Three dimensional interface corner model with a sharp angle and the element division for the special FEM analysis

Fig.4 Singularities for various sharp angle

4.2 V-notch 型接合材 解析モデル及び要素分割を図5に示す。ここで、 $\Theta=\pi/2$ の場合は界面き裂表面点の特異性問題となる。このモデルに対しては、座標軸を図5のように取った方が解析上便利である。座標系を別の形に設定すると、 θ, ϕ 平面の形状

Fig.5 Interface corner model for a V-notch shape bimaterial and the FEM mesh used in the analysis

が複雑になったり、解析不能になる場合もある。その理由は θ, φ が対等なパラメータではないためと考えられる。このように、特殊有限要素法による界面コーナ点特異性の解析は、座標系設定の段階から、経験（ノーハウ）が必要となる。

図6に特性値 λ （特異オーダー $1-\lambda$ ）と接合角 Θ の関係を示す。解析に用いた材料定数は $\mu_1/\mu_2=3, \nu_1=0.2, \nu_2=0.3$ である。同図に Ghahremani & Shih⁽⁶⁾らの界面き裂表面点に関する結果も併記している。同図から、接合角 Θ が大きいくほど、二つの特異性がともに強くなることが分る。なお、 $\Theta \rightarrow \pi/2$ のとき、複素数の特異性オーダー（すなわち振動特異性）が出てくる場合があるが、本例の材料定数では、やはり二つの実数特異性となっている。すなわち、界面き裂表面コーナ点付近では振動特異性が消失することがある。なお、本研究で開発されたプログラムは複素数の特異性⁽¹⁹⁾も求められるように工夫してある。

Fig.6 Singularities for various bonding angles

5. 3次元異材問題の複合材料定数

前章では、特異性に界面コーナ点形状が与える影響を調べたが、異材の組合せも大きな影響を及ぼすと考えられる。3次元異材の力学特性を表す材料定数は、2次元問題のような二つの Dunders⁽²⁰⁾パラメータだけでは表しきれなく、三つの複合材料定数が必要であることがすでに知られている⁽²¹⁾。一方、どんな複合材料定数で表現するかについてはまだ統一的な意見が得られていない。古口⁽²²⁾らは3次元問題の二つの Dunders parameterを提案しているが、それだけでは材料組合せの影響が表しきれないことを彼ら自身が明らかにしている。著者らは、同じ三つであれば、なるべく簡単で直感的なパラメータを用いる方が実用的と考えている。3次元弾性論から、異材の力学特性に与える材料定数の影響は $\Gamma = \mu_2/\mu_1, \nu_1, \nu_2$ の三つで表せるが、 Γ の値域は $0 \sim \infty$ のため、データベース化などの際には不都合が生じる。そこで、本研究では Γ と等価な $\gamma = (\mu_1 - \mu_2)/(\mu_1 + \mu_2)$ を用いる、その値域は $-1.0 \sim 1.0$ となる。従って、 γ, ν_1, ν_2 の三つの複合材料定数で、3次元界面端特異性に及ぼす材料組合せの影響を表せる。この三つのパラメータを用いる理由はその値域が有限で、しかも、物理的意味も明瞭なためである。

6. 3次元異材界面コーナ点特異性データベースの構築

前述の特殊有限要素法プログラムを用いて、特異性の計算が可能となっても、依然として特異性オーダーと材料特性、界面端形状の関係が必ずしも明瞭ではなく、しかも計算の実行には専門的な知識が要求される。工学的見地から、やはり応用しにくい面がある。そこで、本研究では各種材料組合せや界面端形状に対し、特

殊有限要素法で予めその特異性を求め、これらの結果を等高線で表すことにより、3次元界面端特異性のデータベース化を図る。

3次元界面端コーナ点の特異性は、幾何学的なコーナ点形状を θ_0, φ_0 で表せるとすれば、次式のような連続関数として表現することができる。

$$\lambda = F(\theta_0, \varphi_0, \gamma, \nu_1, \nu_2) \quad (15)$$

従って、特異性のデータベースの構築には形状と材料の組合せの両方から考える必要がある。形状に関しては、幾つかの θ_0, φ_0 に関して特異性を求めておけば、任意形状の界面コーナ点の特異性はこれらの結果より、補間法で求めることが可能である。例えば、図5に示している任意の接合角を有する界面コーナ点の特異性は $\Theta = \pi/2, \pi/3, \pi/6, 0, -\pi/6, \pi/3$ の六つの場合に関して特異オーダーを求めていれば、図6から分かるように、簡単に補間で任意の形状のコーナ点特異性が求められる。すなわち、形状を考慮するデータベースの構築は幾つかの代表的な形状の特異性の解を用意することにより実現される。一方、材料の組合せの特異性に及ぼす影響を表すには、式(15)にも示しているように、三つの複合パラメータが必要となる。これは特異性をこの三つの複合パラメータの空間 (γ, ν_1, ν_2) で、等高面として表せることを意味している。しかし、一般に立体図の空間曲面から、直接特異性オーダーを読み取る作業は複雑・困難であるので、本研究では γ, ν_1 平面に平行な断面($\nu_2 = \text{const.}$)で切りだし、複数の平面等高線図でこの空間等高面を表す方法を採用する。任意の ν_2 に関する特異性はこれらの図から読取った結果の補間により得られる。ただし、式(5)からも分かるように、材料定数 ν_1, ν_2 は0.5の値を取ると、数値計算が不可能になるため、本研究では ν_1, ν_2 の最大値を0.499とした。

以上の議論から分かるように、3次元界面コーナ点特異性のデータベースは幾つかの特殊形状に対する特異性オーダーの等高線図で構築することができる。以下ではもっとも良く使われている3種類の界面コーナ点形状に対し、その特異性のデータベースを示す。より完全なデータベースを構築するには、対応する界面コーナ点形状の例を増やしていけばよい。

6.1 異材直角方棒の角点 対応する異材モデルの概形を図7に示す。ただし、重要なのは、角点O近傍の形状だけであって、遠方の形状は特異性に影響を及ぼさないことに注意する必要がある。

図8a~8fに特性値 λ （応力特異オーダー $1-\lambda$ ）の等高線図を示す。同図から分かるように、直角界面端に対しては、 $\gamma=0$ すなわち $\Gamma = \mu_2/\mu_1=1$ に近い材料の組合せでは特異性がほとんど生じない。また、 ν_2 が小さいほど特異性が弱くなる。さらに図8から、特異性が消失する材料の組合せに対しても簡単に判別でき

Fig.7 Three dimensional orthogonal interface edge

8a) $\nu_2 = 0.0$ 8b) $\nu_2 = 0.1$ 8c) $\nu_2 = 0.2$ 8d) $\nu_2 = 0.3$ 8e) $\nu_2 = 0.4$

る。従って、このような等高線図で表示した3次元特異性のデータベースは強度評価上だけでなく、異種材の設計上（材料選定や界面端形状など）でも極めて有用で実用性の高いものと考えられる。なお、このモデルでは、どんな材料の組合せでも、単一の特異性しか現れなく、しかもその特異オーダー λ が 0.5 より弱いことを明記しておきたい。

8f) $\nu_2 = 0.499$

Fig8. Singular order for the three dimensional orthogonal interface edge

6.2 段付き方棒の角点 対応するモデルを図9に示す。ただし、 $\theta_0 = 90^\circ, \varphi_0 = 90^\circ$ である。図10a～10fに特異性の等高線図を示す。このモデルではほとんどの材料の組合せに対し、二つの実数の特異性が現れ、一部では三つの特異性(同じ点に3本の等高線が通っている)が現れている。なお、特異オーダーを読み取るには各組の解に対応して、それぞれ読み取らなければならない。図中にはそれぞれ実線、破線および一点鎖線で3組の解を区別している。なお、このモデルでは、 $1/\sqrt{r}$ よりも強い特異性が現れているので注意が必要である。3次元問題では、ひずみエネルギー密度の有限性から、 $1/r$ 以下の特異性が許される。

Fig.9 Interface corner of bonded roll with different size

10a) $\nu_2 = 0.0$ 10b) $\nu_2 = 0.1$

Fig10. Singular order for the bonded roll with different size

6.3 台形異種材の角点 対応するモデルを図 11 に示す。ただし、 $\theta_0 = 90^\circ$, $\varphi_0 = 90^\circ$ である。すなわち、小さい方棒が大きい方棒に接合されているコーナ点問題である。図 12a~12f に特異性の等高線図を示す。このモデルでは、最大四つの実数特異性が現れる。それぞれを実線、破線、一点鎖線および二点鎖線で区別しているが、二点鎖線で示している解は $\nu_2 \geq 0.2$ となると消失する、代わりに一点鎖線で示している特異性の強い解が現れる。しかし、 $\nu_2 > 0.2$ の場合はこの一点鎖線で示している解はすべての (γ, ν_1) について存在するが、 $\nu_2 = 0.2$ の場合、図面の左側に $\lambda \geq 0.45$ の解しか見つからない。その原因は $\lambda < 0.45$ の解を表

す曲面が $\nu_2 = 0.2$ と $\nu_2 = 0.3$ の間に平坦な曲面となっていることが考えられる。

Fig.11 Model of stick-on interface corner

Fig12 Singular order for the stick on interface corner model

6.4 等高線の使い方

以上の等高線図から、 $\nu_2 = 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.499$ の場合は直接大よそ 0.01 以下の誤差で特異オーダーが読取れる。それ以外のポアソン比 ν_2 に関しては、その前後のポアソン比を用いて、補間法により求められる。ただし、 ν_2 に関して変化が激しい場合もあるので、より良い精度の解を得るために、 $\nu_2 = 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.499$ のすべての特異オーダーを読み取り、これらの点を連続曲線で近似して、特異性を得る方法がより適切であろう。例えば、図 9 のモデルにおいて、材料定数が $\gamma = -0.8, \nu_1 = 0.3, \nu_2 = 0.17$ の場合の特異オーダーを求めるには、図 13 に示すように、まず $\nu_2 = 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.499$ に関して、特異性オーダーを図 10 から読み取り、そして特異性の ν_2 に関する曲線を描いて、それから読取るようにすれば、よりよい精度の特異性オーダーを読み取ることが可能である。この方法は、ある意味では曲線補間法を利用しているといえる。なお、この考え方は形状の補間にも適用できる。ただし、変化があまり激しくない場合、または精度がそれほど要求されない場合は、前後のポアソン比で読取ったデータから直線補間で求める方が便利である。

Fig.13 Interpolation method for middle material constants

7. 結論

3次元界面端特異性解析用有限要素法プログラムを開発し、その高精度、効率性を確かめた。3次元異材問題の複合材料定数を提案し、それを用いて界面コーナ点特異性のデータベースを構築した。得られた主な結論は以下の通りである。

- 1) 特異性解析用に定式化した有限要素法は3次元特異性を正確に求めることができる。多重特異性が混在する場合もすべての特異性を精度よく求めることができる。
- 2) 3次元界面コーナ点の特異性は平面応力の特異性とは大きく異なり、平面ひずみの特異性よりもさらに強くなる。
- 3) 異材界面コーナ点の特異性はコーナ点の幾何学的形状と材料の組合せに依存する。
- 4) 材料定数のコーナ点特異性に及ぼす影響は三つのパラメータすなわち $\gamma = (\mu_1 - \mu_2) / (\mu_1 + \mu_2)$ 、 ν_1 、 ν_2 で表せる。
- 5) 三つの複合材料定数空間の特異性等高面は六つの平面で切り出した等高線図で表せる。
- 6) 幾つかの特殊な界面コーナ点形状に対し、データベースとしての特異性オーダー等高線図を用意しておけば、任意の界面端形状の特異性も簡単に調べることができる。

参考文献

- 1) Bogy D.B., J.Appl.Mech, 38(1971),377-386.
- 2) 久保・大路, 機論A, 57-535(1991),632-636.
- 3) 陳・西谷, 機論A, 57-534(1991),366-372.
- 4) Ting T.C.T. and Chou S.C. Int.J.Solids Struct.,17-11(1981), 1057-1068.
- 5) 許・武藤, 機論A, 65-629(1999),154-159.
- 6) Ghahremani F. and Shih C.F., J. Appl. Mech. 59(1992), 61-68.
- 7) Barsoum R.S. and Chen T.K., Int. J. Fract., 50(1991),221-237.
- 8) Sinha J.K. and Hareesh V., Int.J.Solids Struct., 34(1997), 741-754.
- 9) Lee Y.J. and Roskis A.J., Int.J.Solids Struct., 30 (1993), 3139-3158.
- 10) H.Koguchi, Int.J.Solids Structure, 34(1997),461-480.
- 11) 許・武藤, 機論A, 65-640(1999),2478-2482.
- 12) Bazant Z.P. and Estenssoro L.F., Int. J. Solids Struct., 15(1979), 405-412.
- 13) Somaratna N. and Ding T.C.T., Int.J.Engng.Sci. 24(1986), 1115-1134.
- 14) Ghahremani F.,Int.J.Solids Struct.,27(1991),1371-1386.
- 15) Bazant Z.P. and Keer L.M., Int. J. Solids Struct.,13(1977) 479-492.
- 16) Moran B. and Shih C.F.,Int.J.Fract.,35(1987),295-310.
- 17) 結城・木須, 境界要素法による弾性解析, 培風館, 1987.
- 18) J.P. Benthem, Int.J.Solids Structure, 16(1980),119-132.
- 19) 結城・許・劉, 生産研究, 44-4(1992), 206-210.
- 20) Dunders J., J. Appl. Mech., 36(1969), 650-652.
- 21) 結城・許, 機論A, 58-545(1992), 39-47.
- 22) 古口・村本・井原, 機論A, 64-618(1998), 480-488.