弾性薄板に作用する衝撃圧力分布の同定*

荒井 政大^{*1}, 西田 徹^{*2}, 足立 忠晴^{*3}Identification of Dynamic Pressure Distribution
Applied to the Elastic Thin PlateMasahiro ARAI^{*4}, Toru NISHIDA and Tadaharu ADACHI^{*1} Department of Mechanical Systems Engineering, Shinshu University,
4-17-1 Wakasato, Nagano shi, Nagano 380-8553 Japan

This paper deals with a strategy for identification of dynamic pressure distribution applied to the elastic thin plate. Boundary element method is adopted to obtain discretized matrix relation between input loading and output signal, where strain information is used as a supplementary information of the inverse analysis in the present study. Laplace transform and numerical inverse Laplace inversion are introduced in order to treat the dynamic behavior. The coefficient matrix to be solved is given on the Laplace-transformed domain as the form of transfer function relating input and output signals. Since the inverse analysis requires regularization to stabilize the ill-posed solutions, Tikhonov regularization has been employed with singular value decomposition, where the optimal parameter of Tikhonov method was determined by Hansen's L-curve method. Through some numerical simulation on the circular plate subjected to dynamically distributed loading, the usefulness of the present method based on the Laplace-transformed-BEM is demonstrated in detail.

Key Words: Inverse Analysis, Boundary Element Method, Plate Bending, Numerical Analysis, Laplace Transform, Dynamic Loading, Pressure Distribution

1. 緒 論

一般に衝突を伴う 2 体問題は、接触部の大きさと境界条件がともに未知となる問題であり、工学的に取り扱いの難しい現象として捉えられる。特に接触条件が変化しやすい軟質材料や生体材料が構造物に衝突する場合には、2 体間において作用する圧力を数値解析によって予測することが困難となる場合が多い。それゆえ多くの場合は実験的手法に頼らねばならず、接触式センサー等を用いた圧力分布の測定が数多く試みられている。人間の歩行動作において足裏に作用する反力分布の測定⁽¹⁾⁽²⁾などはその一例である。

一般に圧力分布の測定においては、PZT 素子や圧電フィルムといった感圧素子が用いられることが多い。これらのセンサーを用いる方法は、得られた電圧データから圧力分布が直接的に得られるといった利点があるものの、センサーを挟み込むことにより接触条件が変化するという難点がある。

そこで、接触領域にセンサーを置かずに、他の離れた部位にて測定された変位やひずみなどの情報をもとに、逆解析手法を用いて外力を同定する手法も数多く検討されている。例えば衝撃的な集中外力が作用する場合について、井上ら⁽³⁾⁽⁴⁾、Doyle⁽⁵⁾⁽⁶⁾、放生ら⁽⁷⁾、Chang ら⁽⁸⁾による研究結果が報告されている。しかしながら衝撃問題に関する外力同定の研究は、これまでのところ集中荷重を取り扱ったものがほとんどであり、圧力の大きさとともに、その分布領域も時間とともに変化するような場合について同定が試みられた例は報告されていないようである。

著者らは、既報⁽⁹⁾において弾性薄板に静的な圧力分布が作用する場合に関し、板のひずみ測定に基づく圧力分布の逆解析手法を提案し、数値実験により、その有効性について検証した。本論文は既報の静的問題に対する同定法を動的問題に適用するものである。

圧力分布の時間変動と板に生ずるひずみの出力応答との間に成立する関係式は、Laplace 変換を導入することによって代数方程式により帰着させることができ⁽¹⁰⁾、静的問題に対する定式化の自然な拡張が可能である。本論文では、Laplace 像空間解の決定と、数値 Laplace 逆変換の 2 つの演算過程に対して Tikhonov の方法⁽¹¹⁾を導入し、逆解析解の安定化を図った。

* 原稿受付 2001 年 1 月 31 日。

^{*1} 正員、信州大学工学部 (〒380-8553 長野市若里 4-17-1)。^{*2} 日本電気(株) (〒216-8555 川崎市宮前区宮崎 4-1-1) (元：東京工業大学大学院)。^{*3} 正員、東京工業大学大学院理工学研究科。

E-mail: arai@mech.shinshu-u.ac.jp

圧力分布の大きさと作用領域の両者が時間的に変化する周辺支持円板に関して境界要素法を用いた数値シミュレーションを実施し、ひずみの付加条件を用いた衝撃圧力分布の同定が実用上十分な精度で可能であることを具体的に検証した。

2. 逆問題の定式化

薄板に作用する面外圧力を $f(t)$ 、その結果、板面に生ずる曲げひずみを $\varepsilon(t)$ とし、それぞれを時刻 t の関数として定義する。両者の関係が線形であり、 $t < 0$ において $f(t) = 0$ であるとすれば、 $f(t)$ と $\varepsilon(t)$ は次のような畳み込み積分により記述することができる⁽¹²⁾。

$$\varepsilon(t) = \int_0^t E(t-\tau)f(\tau)d\tau \quad (1)$$

ここに $E(t)$ はシステムのインパルス応答関数を意味する。 $t = 0$ において $\varepsilon = 0$ かつ $d\varepsilon/dt = 0$ なる初期条件の下に式 (1) を Laplace 変換すると次式を得る。

$$\bar{\varepsilon}(\kappa) = \bar{E}(\kappa)\bar{f}(\kappa) \quad (2)$$

ただし、 κ は Laplace 変換パラメータであり、各物理量の Laplace 変換を ‘ $\bar{\cdot}$ ’ を付して表すものと約束する。

重ね合わせの原理に従い、式 (1) の関係を、荷重 $f(t)$ およびひずみ $\varepsilon(t)$ が複数の場合に拡張すると次式に帰着する。

$$\bar{\varepsilon}_i(\kappa) = \bar{E}_{ij}(\kappa)\bar{f}_j(\kappa) \quad (3)$$

ただし添字に関する演算は総和規約に従うものとする。すなわち、伝達マトリクス $\bar{E}_{ij}$ が既知であれば、ひずみの出力情報を Laplace 変換して式 (3) に代入し、それを解くことによって外力 $\bar{f}_j(\kappa)$ が求められる。さらに、得られた $\bar{f}_j(\kappa)$ に Laplace 逆変換を施すことにより、外力 $f(t)$ の実時間解が算出されることがわかる。

なお、実際に本論文で取り扱う外力 $f_j(t)$ は複数の集中力の組合せではなく連続な分布関数であるが、実際には適当な要素を用いて離散化して取り扱われるため、同様に式 (3) の関係式に帰着させることができる。

式 (3) の関係は、Laplace 変換領域で定義されていることを除けば既報で取り扱われた静的問題に対するマトリクス方程式と同型であるから、像空間解 $\bar{f}_j(\kappa)$ を逆解析に求める手順は静的問題の場合⁽⁹⁾と全く同じである。なお本論文における数値シミュレーションにおいて、伝達マトリクス $\bar{E}_{ij}$ の算出には境界要素法を用いた。境界要素法による弾性板曲げ問題の定式化、およびひずみの付加条件を用いた逆問題の解析法の詳細については、既報⁽⁹⁾⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾を参照されたい。

3. 数値 Laplace 変換・逆変換

式 (3) に基づいて板面に作用する圧力分布 $f_j(t)$ を求めるには、演算に用いる物理量の Laplace 変換および逆変換を行う必要がある。本論文では、以下のように FFT を利用した数値的手法⁽¹⁵⁾を適用した。

以下に示される Laplace 変換の定義式、

$$\bar{f}(\kappa) = \int_0^\infty f(t)e^{-\kappa t}dt \quad (4)$$

において、Laplace 変換パラメータを $\kappa = \gamma + i\omega$ によって置き換えれば次式となる。

$$\bar{f}(\gamma + i\omega) = \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-\gamma t}e^{-i\omega t}dt \quad (5)$$

ただし、 i は虚数単位であり、 γ は正の任意定数である。上式は $e^{\gamma t}$ を窓関数とした Fourier 変換と見なせるから、FFT を用いた高速アルゴリズムが適用できる。解析時間を T 、サンプリング数を N とすると、Laplace 変換の定義式は以下のように書き改められる。

$$\bar{f}(\gamma + in\Delta\omega) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} f(k\Delta t)e^{-\gamma k\Delta t}e^{-2\pi i kn/N} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (6)$$

同様に、数値 Laplace 逆変換の定義式についても次式のように書き表すことができる。

$$f(k\Delta t) = \frac{e^{\gamma k\Delta t}}{2\pi} \Delta\omega \sum_{n=0}^{N-1} \bar{f}(\gamma + in\Delta\omega)e^{2\pi i kn/N} \quad (7)$$

ただし Δt 、 $\Delta\omega$ はそれぞれ、

$$\Delta t = \frac{T}{N}, \quad \Delta\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (8)$$

と定義される。

4. 数値 Laplace 逆変換の適切化

Laplace 変換・逆変換に基づく数値解法では、実時間解 $f(t)$ を得るために、像空間解 $\bar{f}(\kappa)$ の逆変換を行う必要がある。この Laplace 逆変換は第 1 種 Fredholm 型積分方程式を解くことに相当する典型的な逆問題であるため、逆形式のマトリクス方程式 (3) を解く場合と同様に解の不安定性・不適切性が生ずる。そこで数値 Laplace 逆変換に対し Tikhonov の方法を適用し、解の適切化を図る方法について簡単に述べる⁽¹⁰⁾。

まず、数値 Laplace 変換の式 (6) を以下のように書き換える。

$$\bar{f} = Lf \quad (9)$$

ここで、Laplace 変換作用素であるマトリクス L を特異値分解⁽¹⁶⁾すると次式となる。

Fig.1 Circular plate with clamped edge subjected to transverse loading.

Fig.2 Model 1: distribution of axial symmetric transverse pressure applied to the circular plate.

$$L = U\Lambda V^H \dots\dots\dots (10)$$

上式のマトリクス U , Λ , V はそれぞれ以下のように定義される.

$$U = \begin{bmatrix} U_{0,0} & U_{0,1} & \dots & U_{0,N-1} \\ U_{1,0} & U_{1,1} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ U_{N-1,0} & \dots & \dots & U_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (11)$$

$$U_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-2\pi i n k / N} \dots\dots\dots (12)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_0 & & 0 \\ & \lambda_1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_{N-1} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (13)$$

$$\lambda_k = \Delta t \sqrt{N} e^{-\gamma k \Delta t} \dots\dots\dots (14)$$

$$V = I_N \dots\dots\dots (15)$$

なお, I_N は N 次の単位行列であり, 上付添字 H は行列の共役転置を意味する.

Tikhonov の方法では, 以下に示す汎関数 Π を最小化するような解を最適解として求める.

$$\Pi = \|Lf - \bar{f}\|^2 + \alpha \Phi(f) \dots\dots\dots (16)$$

ただし, α は解の平滑化の度合を決定する安定化パラメ

Fig.3 Histories of transverse pressure (Model 1, Exact).

ータであり, $\Phi(f)$ は安定化汎関数である. 安定化汎関数として $\Phi(f) = \|f\|^2$ を用いると, Φ を最小化させる解 f^* は以下の方程式を満たす.

$$(L^H L + \alpha I_{N-1}) f^* = L^H \bar{f} \dots\dots\dots (17)$$

上式を f^* について解けば,

$$f^* = (L^H L + \alpha I_{N-1})^{-1} L^H \bar{f} \dots\dots\dots (18)$$

上式に前述の特異値分解を適用すると, 最終的に適切化解 f^* は次式で与えられることがわかる.

$$f^* = (\Lambda \Lambda + \alpha I_{N-1})^{-1} \Lambda U^H \bar{f} \\ = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_0}{\lambda_0^2 + \alpha} & & 0 \\ & \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 + \alpha} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \frac{\lambda_{N-1}}{\lambda_{N-1}^2 + \alpha} \end{bmatrix} U^H \bar{f} \dots\dots\dots (19)$$

なお, 安定化パラメータ α の決定に際しては, マトリクス方程式 (3) の適切化解を求める場合と同様に L-Curve 法⁽¹⁷⁾⁽¹⁸⁾を適用した.

5. 数値計算例

以下, 薄板に作用する動的圧力分布の同定に関する数値シミュレーションを実施し, 本手法の有効性について検証する. 解析モデルは図 1 に示すような周辺を固定された円板である. 分布荷重が作用すると想定される領域を 54 個の三角形一次要素にて要素分割した. 式 (3) の伝達マトリクス E は, 既報⁽⁹⁾の静的問題の場合と同様に境界要素法を用いて計算される. その際の境界要素分割には, 32 個の 2 次アイソパラメトリック要素を用いた.

逆問題に際して与えられる付加条件は, 三角系要素の頂点位置における x_1, x_2 軸方向の曲げひずみ ($\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$) の時間変動解を用いるものとし, 実験を模擬するため, Laplace 変換境界要素法により求められた数値解に, 領域内のひずみの最大値を基準としたランダムノイズを加えて用いた. なお, ひずみの算出においては離散化誤差

Fig.4 Histories of identified pressure using Tikhonov regularization on the estimating the inverse matrix E .

Fig.5 Histories of identified pressure using Tikhonov regularization on the estimating the inverse matrix E and inversion of Laplace transform.

を可能な限り少なくするため、圧力分布を180要素に分割して精密解析を行っている。ポアソン比は全解析を通じて0.3とした。

5・1 解析例 1 はじめに、基本的な例題として図2に示されるような回転放物面状の分布荷重が時間に伴って三角波状に変化する場合を取り扱う。この例題の圧力分布は具体的に次式で与えられる。

$$f(x_1, x_2; t) = g(x_1, x_2)h(\tau)f_0 \quad \dots\dots\dots (20)$$

ただし、

$$g(x_1, x_2) = g(r) = \begin{cases} -\left(\frac{4r}{3a}\right)^2 + 1, & \text{in } r \leq \frac{3a}{4}, \\ 0 & \text{in } r > \frac{3a}{4}, \end{cases} \quad \dots\dots\dots (21)$$

ここに a は円板の半径、 $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ であり、 $h(\tau)$ は以下の式で与えられる。

$$h(\tau) = \begin{cases} \frac{5\tau}{2} - 1 & \text{in } 0.4 \leq \tau \leq 0.8 \\ 3 - \frac{5\tau}{2} & \text{in } 0.8 \leq \tau \leq 1.2 \\ 0 & \text{in } \tau < 0.4, \tau > 1.2 \end{cases} \quad \dots\dots (22)$$

ただし、 τ は無次元時間であり、密度を ρ 、板厚を h 、曲げ剛性を D として、 $\tau = t\sqrt{D/\rho ha^4}$ として定義される。図1のNo.1, No.19, No.31 および No.37 の各点において作用する圧力を図示すると、図3に示される波形となる。

はじめに、式(3)を解き、像空間解を求める過程にのみ Tikhonov の方法を適用して逆解析解の適切化を図った場合について、ひずみの付加条件に含まれる誤差が0%, $\pm 1\%$, $\pm 3\%$ の場合の圧力変動の同定結果を図4に示す。付加条件に含まれるノイズレベルが上昇するにつれ、時間後半のリングングによる誤差が著しく増大する傾向にあることが確かめられる。

他方、数値 Laplace 逆変換に対しても Tikhonov の方法を適用した場合の結果を図5に示す。時間後半の誤差

Fig.6 Variation of the transverse pressure on Model 1 (Left : Exact, Right : Identified, Noise level : 1%).

Fig. 7 Histories of transverse pressure (Model 2, Exact).

の増大が押えられており、3%程度のノイズレベルであれば実用上十分な精度の解が得られているといえる。

付加条件のノイズレベルが1%の場合について、同定された圧力分布の時間変化を正解と比較して示したのが図6である。離散化誤差の影響から中央部の圧力がやや低めに見積もられており、また周辺部において若干の精度低下が認められるものの、実用上十分な精度で圧力分布が同定されているといえる。

5.2 解析例 2 次に、圧力の作用する領域が時間とともに変化する問題について数値シミュレーションを行った。圧力分布は先の例題と同様に回転法物面とし、時間的に三角波状に変化するものを用いた。この例題における圧力分布は次式により与えられる。なお、その他の解析条件については、先の例題と同じである。

$$f(x_1, x_2; t) = f_0\{g(\tau) + y(\tau)\} \quad \cdots \cdots \cdots (23)$$

$$y(\tau) = \begin{cases} \frac{5\tau}{2} - 2 & \text{in } 0.4 \leq \tau \leq 0.8 \\ 2 - \frac{5\tau}{2} & \text{in } 0.8 \leq \tau \leq 1.2 \\ 0 & \text{in } \tau < 0.4, \tau > 1.2 \end{cases} \quad \cdots (24)$$

ただし、 $f(x_1, x_2; t) < 0$ の場合は常に $f(x_1, x_2; t) = 0$ とする。上式で示される圧力変動について、図1中のNo.1, No.19, No.31 および No.37 の各点における圧力履歴を図示したのが図7である。

像空間解の算出および数値 Laplace 逆変換の両過程において Tikhonov の方法を適用した場合の圧力変動の逆解析結果を図8に示す。同様に、付加条件に含まれるノイズレベルは0%, ±1%, ±3%の3通りとした。荷重の作用領域が時刻とともに変化することに起因して離散化誤差の影響が見られ、特に時間後半部において若干の精度低下が生じている。また全体的に圧力が小さめに見積もられているといえる。

最後に付加条件の誤差が±1%の場合について、圧力分布履歴の逆解析結果を正解と併せて図9に示した。時間前半部および後半部において離散化誤差に起因するとみられる若干の精度低下が認められる。

Fig. 8 Histories of identified pressure using Tikhonov regularization on the estimating the inverse matrix E and inversion of Laplace transform.

6. 結 論

本論文では、弾性薄板に作用する衝撃圧力分布を、領域内部で観測されるひずみ履歴の付加条件をもとに逆解析的に同定する手法について提案し、数値シミュレーションによる基礎的な検討を行った。

動的な圧力分布の同定に関しても、系の入力と出力の関係を畳み込み積分の形で表し、Laplace 変換法を適用することで、既報に示した静的問題と同様の定式化が可能であり、Tikhonov の方法を適用することによって実用上十分な精度で圧力分布の同定が可能となることを明らかにした。

なお、本手法では面外圧力分布の離散化に三角系一次要素を用いたが、現実的な同定を考えればさらにひずみの観測点ならびに面積分の離散化要素を増やすことは難しいと考えられる。今後は高次要素の導入なども検討し、付加条件数が少ない場合においても誤差の少ない同定法について検討してゆくことが望まれる。

Fig.9 Variation of the transverse pressure on Model 2 (Left : Exact, Right : Identified, Noise level : 1%).

文 献

- (1) 尾田十八・本 悟・井上次郎・多保田純, 機論, **55-513**, A(1989), 1230-1235.
- (2) 宇治橋貞幸・渡辺純一・足立忠晴, スポーツ産業学研究, **1**, (1992), 19-30.
- (3) 井上裕嗣・渋谷寿一・小泉亮・福地淳一, 非破壊検査, **37-11**, (1988), 874-878.
- (4) 井上裕嗣・岸本喜久雄・渋谷寿一・小泉亮, 機論, **57-543**, A(1991), 2727-2734.
- (5) Doyle, J.F., *Experimental Mechanics*, **24-1**, (1984), 10-16.
- (6) Doyle, J.F., *Experimental Mechanics*, **27-1**, (1987), 68-72.
- (7) 放生明廣・茶谷明義・上村文人, 機論, **55-511**, A(1989), 477-482.
- (8) Chang, C., and Sun, C. T., *Experimental Mechanics*, **29-4**, (1989), 414-419.
- (9) 荒井政大・西田徹・足立忠晴, 弾性薄板に作用する面外圧力分布の同定, 機論, **67-655**, A(2001), 405-412.
- (10) 井上裕嗣・岸本喜久雄・渋谷寿一・原田謙次郎, 機論, **63-616543**, A(1997), 2503-2509.
- (11) 例えば, 久保司郎, 計算力学と CAE シリーズ 10 逆問題, (1992), 45-49, 培風館.
- (12) 例えば, C. R. ワイリー, 工業数学 (上), 富久泰明訳, (1970), 270-279, プレイン図書.
- (13) Arai, M., Adachi T. and Matsumoto, M., *JSME International Journal*, **40-1**, A(1997), 65-74.
- (14) 荒井政大・足立忠晴・松本浩之・宇治橋貞幸, 機論, **60-570**, A(1994), 436-442.
- (15) Krings, W. and Waller, H., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **14**, (1979), 1183-1196.
- (16) 例えば, 柳井春夫・竹内啓, UP 応用数学選書 10 射影行列・一般逆行列・特異値分解, (1990), 東京大学出版会.
- (17) Hansen, P.C., *SIAM Review*, **34-4**, (1992), 561-580.
- (18) Hansen, P.C., *SIAM Journal on Scientific Computing*, **14-6**, (1993), 1487-1503.