準三次元荷重下における多孔質弾性岩盤内の
弾性覆工を有する円形トンネルの力学解析*市川 晃 央^{*1}, 平島 健 一^{*2}, 木村 清 和^{*3}Analysis of Poroelastic Rock with Circular Lining Tunnel
Under Quasi-Three Dimensional LoadingAkio ICHIKAWA, Ken-ichi HIRASHIMA^{*4} and Kiyokazu KIMURA^{*4} Department of Civil Environmental Engineering, Yamanashi University,
4 3 11 Takeda, Kofu shi, Yamanashi, 400 8511 Japan

In this paper, the theoretical solutions for an circular lining tunnel under inclined to the far-field principal stress are presented. The rock, which is permeated by fluid, is assumed to behave as a poroelastic material with compressible constituents. And the circular lining is considered as a classical elastic material. The poroelastic solutions are derived in the Laplace transform space, and are transformed to the time domain using an approximate numerical inversion technique. Several numerical examples are shown by graphical representations.

Key Words: Poroelastic Medium, Circular Hole, Laplace Transform, Superposition

1. 緒 言

鉛直方向の円形の掘削孔問題については、平面ひずみ状態における古典的な線形弾性解析の結果として例えば、Hubbert & Willis(1957)⁽¹⁾ が良く知られ広く用いられている。しかしながら、掘削孔付近の構造を考える場合、しばしば流体で満たされ、間隙圧は掘削により乱される。一般に、流体の拡散は時間に依存した全応力や有効応力の変化をもたらすが、それらについては、Biot の多孔質弾性理論 (Biot(1941)⁽²⁾ や Detournay & Cheng(1993)⁽³⁾) によって研究がなされている。

Haimson & Fairhurst (1969)⁽⁴⁾ は、漸近的な解析に基づく多孔質弾性掘削孔についての問題を最初に取り扱った。また、時間に依存した平面ひずみ状態での多孔質弾性掘削孔についての完全な理論解析が Detournay & Cheng (1988)⁽⁵⁾、Cheng et al. (1993)⁽⁶⁾ によって行われた。そこでは、時間遅れの圧縮破壊、掘削孔壁の内側へと移動する限界せん断破壊領域、あるいは急激な沈下による引張破壊などの多孔質弾性的ないくつかの現象が広く議論されている。しかしながら、これらの平面ひずみ状態での理論解析は掘削孔の軸が遠方での原位置主応力のうち、いずれかの作用方向に一致しているとするもので、方向を操作することができないという制約があった。

続いて、Cui & Cheng⁽⁷⁾ らはこの多孔質弾性理論を用いて円形の掘削孔の軸が遠方原位置主応力の作用軸に対して任意に傾斜した場合のいわゆる準三次元荷重下での掘削孔 (傾斜掘削孔) 問題の力学解析を行って

いる。

しかし、実際のトンネル問題では、トンネル壁周囲に巻き立て覆工を設置するが、それは掘削トンネルの強度や安定性を向上させる点から極めて有効な手段である。また、この覆工は周囲の岩盤に対する支持だけでなく、地下水のトンネル内部への浸透を防ぐ役割も果たす。

そこで、トンネル周囲の岩盤は等方性の多孔質弾性体として理想化し、覆工の材料は完全弾性体として理想化する。この問題について、平島ら(1989)⁽⁸⁾ により本論文の理論を縮退させたものをもちいた非圧縮構成要素に対する 2 次元面内問題が解かれている。本論文では、トンネルの軸が遠方原位置主応力の作用軸に対して任意に傾斜している準三次元荷重下での解析を行う。したがって、本論文の内容は任意に傾斜したトンネルの覆工と多孔質弾性岩盤の間の相互作用などについての時間依存の解析を目的としたものである。

2. 基礎方程式

2・1 多孔質弾性岩盤の基礎方程式
(構成方程式)

$$\sigma_{ij} = 2Ge_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}e - \alpha\delta_{ij}p, \quad (1)$$

$$p = M(\zeta - \alpha e). \quad (2)$$

ここに、 σ_{ij} は全応力テンソル、 p は間隙圧、 e_{ij} はひずみテンソル、 e は体積ひずみ、 ζ は流体含有率変化、 G はせん断弾性係数、 ν, ν_u は排水、非排水状態でのポアソン比、 B は Skempton の間隙圧係数、 δ_{ij} は Kronecker のデルタである。なお、有効応力係数 α と Biot の弾性係数 M は次式で与えられる。

$$\alpha = \frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1-2\nu)(1+\nu_u)}, \quad M = \frac{2GB^2(1-2\nu)(1+\nu_u)^2}{9(\nu_u - \nu)(1-2\nu_u)}. \quad (3)$$

* 原稿受付 2001 年 1 月 12 日。

^{*1} (株)竹中土木 (〒104 8234 東京都中央区銀座 8 21 1)。^{*2} 正員、山梨大学工学部 (〒400 0016 甲府市武田 4 3 11)。^{*3} 群馬高等専門学校環境都市工学科 (〒371 0845 前橋市鳥羽町 580)。

E-mail: hirashima@ccn.yamanashi.ac.jp

対象とする上記の多孔質弾性媒体に対する基礎方程式は以下のように与えられる。

(釣合方程式)

$$\sigma_{ij,j} = 0. \quad (4)$$

(Darcy の法則)

$$q_i = -\kappa p_{,i}. \quad (5)$$

ここに、 q_i は流束ベクトル、 κ は透水係数である。

(連続の方程式)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + q_{i,i} = 0. \quad (6)$$

(Navier の方程式)

$$G \nabla^2 u_i + \frac{G}{1-2\nu_u} e_{,i} - \alpha M \zeta_{,i} = 0. \quad (7)$$

(拡散方程式)

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \kappa M \nabla^2 p = -\frac{2GB(1+\nu_u)}{3(1-2\nu_u)} \frac{\partial e}{\partial t}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - c \nabla^2 \zeta = 0. \quad (9)$$

ここに、

$$c = \frac{\kappa}{S} = \frac{2\kappa B^2 G(1-\nu)(1+\nu_u)^2}{9(1-\nu_u)(\nu_u-\nu)}. \quad (10)$$

2・2 弾性覆工に対する基礎方程式

この場合の、いわゆる古典的な等方性弾性体の基礎方程式は次式で与えられる。

(構成方程式)

$$\sigma'_{ij} = 2G^l e'_{ij} + \frac{2G^l \nu^l}{1-2\nu^l} \delta_{ij} e'. \quad (11)$$

ここに、 σ'_{ij} は全応力テンソル、 e'_{ij} はひずみテンソル、 e' は体積ひずみ、 G^l はせん断弾性係数、 ν^l はポアソン比であり、また上添字 l は弾性覆工に対するパラメータであることを示している。

(釣合方程式)

$$\sigma'_{ij,j} = 0. \quad (12)$$

(Navier の方程式)

$$G^l \nabla^2 u'_i + \frac{G^l}{1-2\nu^l} e'_{,i} = 0. \quad (13)$$

3. 問題の設定

遠方から作用する主応力の軸に対して、傾斜掘削孔の軸が傾いた状態で掘削されるものとする。すなわち、原位置三軸応力の主軸に一致するように $x'-y'-z'$ のデカルト座標系を設け、それぞれの原位置の三軸主応力を S_x, S_y, S_z と表示する。また、掘削孔はその軸が z 軸に一致するように設けた任意の $x-y-z$ 座標系により定義されるものとする。その位置づけは、 z' 軸について φ_z の方向角をもつ回転、 x 軸に向かって φ_y の天頂角をもつ傾斜によって示される (図 1-(a) 参照)。

Fig.1-(a) Schematic Diagram of Inclined Circular Lining Tunnel

解析の便宜上、任意の (掘削孔の) $x-y-z$ 座標についての解析領域は、図 1(b) に示されている。

Fig.1-(b) Circular Lining Tunnel and Applied Three Dimensional Stresses

Fig.1 Problem definition

遠方の原位置応力は、下式により任意座標軸における値へ変換することができる。

$$\begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \\ S_{xy} \\ S_{yz} \\ S_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{xx}^2 & l_{xy}^2 & l_{xz}^2 \\ l_{yx}^2 & l_{yy}^2 & l_{yz}^2 \\ l_{zx}^2 & l_{zy}^2 & l_{zz}^2 \\ l_{xx}l_{yx} & l_{xy}l_{yy} & l_{xz}l_{yz} \\ l_{yx}l_{xz} & l_{zy}l_{yz} & l_{yz}l_{zx} \\ l_{xz}l_{xx} & l_{zy}l_{xy} & l_{zx}l_{xz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_x' \\ S_y' \\ S_z' \end{Bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} l_{xx} & l_{xy} & l_{xz} \\ l_{yx} & l_{yy} & l_{yz} \\ l_{zx} & l_{zy} & l_{zz} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \varphi_z \cos \varphi_y & \sin \varphi_z \cos \varphi_y & -\sin \varphi_y \\ -\sin \varphi_z & \cos \varphi_z & 0 \\ \cos \varphi_z \sin \varphi_y & \sin \varphi_z \sin \varphi_y & \cos \varphi_y \end{bmatrix} \quad (15)$$

また、遠方場 ($r \rightarrow \infty$) での応力は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= -S_x, \sigma_{yy} = -S_y, \sigma_{zz} = -S_z, \sigma_{xy} = -S_{xy}, \\ \sigma_{yz} &= -S_{yz}, \sigma_{zx} = -S_{zx}, p = p_0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

となり、掘削孔壁と覆工の境界 ($r = R$) における境界条件として、完全結合状態を仮定すれば次式で与えられる。

$$\sigma_{rr} = \sigma'_{rr}, \sigma_{r\theta} = \sigma'_{r\theta}, \sigma_{rz} = \sigma'_{rz}, \frac{\partial p}{\partial r} = 0. \quad (17)$$

また、覆工の内側 ($r = R_0$) は自由境界であるとすれば、その境界条件は次式で与えられる。

$$\sigma_{rr}^I = 0, \quad \sigma_{r\theta}^I = 0, \quad \sigma_{rz}^I = 0. \quad (18)$$

ところで、遠方原位置応力を円柱座標系により表示すると次式となる。

$$\left. \begin{aligned} S_r &= \frac{S_x + S_y}{2} + \frac{S_x - S_y}{2} \cos 2\theta + S_{xy} \sin 2\theta, \\ S_{r\theta} &= S_{xy} \cos 2\theta - \frac{S_x - S_y}{2} \sin 2\theta, \\ S_{rz} &= S_{xz} \cos \theta + S_{yz} \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

4. 解析解

式(1)～(3)に示した支配方程式の線形性により、遠方場および円形の掘削孔壁と覆工の境界条件および、覆工の自由境界条件での条件式(16)、(17)、(18)をそれぞれ便宜的に、**Problem I** (多孔質弾性平面ひずみ問題)、**Problem II** (弾性一軸問題) および、**Problem III** (弾性面外せん断問題) の3つの問題に分割すること(図2参照)ができ、これらの問題の重ね合わせにより所期の目的の一般解が得られることになる。

Fig.2 Decomposition of Inclined Circular Lining Hole Problem, where $S_z = S_z^1 + S_z^2$

これらの3つの問題の遠方場 ($r \rightarrow \infty$) での応力状態、掘削孔壁と覆工の境界 ($r = R$) における境界条件および、覆工の内側 ($r = R_0$) の自由境界条件はそれぞれ以下のように与えられる。

<Problem I>

遠方場 ($r \rightarrow \infty$) :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= -S_x, \quad \sigma_{yy} = -S_y, \\ \sigma_{zz} &= -\nu(S_x + S_y) - \alpha(1-2\nu)p_0, \\ \sigma_{xy} &= -S_{xy}, \quad \sigma_{yz} = \sigma_{xz} = 0, \\ p &= p_0. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

掘削孔壁と覆工の境界 ($r = R$) :

$$\left. \begin{aligned} u_r &= u_r^I, \quad u_\theta = u_\theta^I, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{rr}^I, \\ \sigma_{r\theta} &= \sigma_{r\theta}^I, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

覆工の自由境界 ($r = R_0$) :

$$\sigma_{rr}^I = \sigma_{r\theta}^I = 0. \quad (22)$$

<Problem II>

遠方場 ($r \rightarrow \infty$) :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zz} &= -S_z + [\nu(S_x + S_y) + \alpha(1-2\nu)p_0], \\ \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{xz} &= p = 0. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

掘削孔壁と覆工の境界 ($r = R$) :

$$u_r = u_r^I, \quad u_z = u_z^I, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{rr}^I. \quad (24)$$

覆工内側 ($r = R_0$) の自由境界 :

$$\sigma_{rr}^I = 0. \quad (25)$$

<Problem III>

遠方場 ($r \rightarrow \infty$) :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} &= p = 0, \\ \sigma_{yz} &= -S_{yz}, \quad \sigma_{xz} = -S_{xz}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

掘削孔壁と覆工の境界 ($r = R$) :

$$u_z = u_z^I, \quad \sigma_{rz} = \sigma_{rz}^I. \quad (27)$$

覆工の自由境界 ($r = R_0$) :

$$\sigma_{rr}^I = \sigma_{r\theta}^I = \sigma_{rz}^I = 0. \quad (28)$$

以下にそれぞれの問題に対する解析解を示す。

4・1 多孔質弾性岩盤の挙動

<Problem I>

これは平面ひずみ状態のもとで解く問題に相当する。この問題において、平島ら(1989)⁽⁸⁾の解は $B=1.0$ および $\nu=0.5$ とすることにより得られる。ここでは、以下のような角度の変換を行うことによって、Detournay & Cheng (1988)⁽⁵⁾による解を援用することができる。

まず、 x'' 軸が最小水平主応力方向に、 y'' が最大水平主応力方向に一致するように z 軸に関する座標の回転を行う。 x 軸と x'' 軸のなす回転角 θ_r は次式で表される。

$$\theta_r = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2S_{xy}}{S_x - S_y}. \quad (29)$$

この変換後の座標系での角度は次式となる。

$$\theta'' = \theta - \theta_r. \quad (30)$$

この軸の変換により遠方場 ($r \rightarrow \infty$) での応力は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= -(P_0 - S_0), \quad \sigma_{yy} = -(P_0 + S_0), \\ \sigma_{xy} &= 0, \quad p = p_0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

ここに、 P_0 は平均圧縮応力、 S_0 は偏差応力でありそれぞれ次式で与えられる。

$$P_0 = \frac{S_x + S_y}{2}, \quad S_0 = \sqrt{\left(\frac{S_x - S_y}{2}\right)^2 + S_{xy}^2} \dots\dots\dots (32)$$

この Problem I の変位および応力の一般解は遠方条件を考慮すると次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} u_r^{(I)} &= u_r^{(1)} + u_r^{(2)}, \\ u_\theta^{(I)} &= u_\theta^{(2)}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr}^{(I)} &= \sigma_{rr}^{(1)} + \sigma_{rr}^{(2)}, \\ \sigma_{\theta\theta}^{(I)} &= \sigma_{\theta\theta}^{(1)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2)}, \\ \sigma_{r\theta}^{(I)} &= \nu[\sigma_{rr}^{(1)} + \sigma_{\theta\theta}^{(1)}] - \alpha(1-2\nu)p^{(I)}, \\ \sigma_{r\theta}^{(I)} &= \sigma_{r\theta}^{(2)}, \\ \sigma_{rz}^{(I)} &= \sigma_{rz}^{(1)} = 0, \\ p^{(I)} &= p_0 + p^{(2)}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

ここに、上添字⁽¹⁾ および⁽²⁾ は、それぞれ Mode1 および Mode2 の解析解である。

この覆工を有する問題は Mode1 および Mode2 に分解することができる。すなわち、 $r \rightarrow \infty$ での遠方条件および $r = R$ 、 $r = R_0$ における境界条件の問題に区別され、それぞれ以下になる。

Mode1

遠方場 ($r \rightarrow \infty$) :

$$\sigma_{rr}^{(1)} = -P_0, \quad \sigma_{r\theta}^{(1)} = 0. \dots\dots\dots (35)$$

掘削孔壁と覆工の境界 ($r = R$) :

$$\left. \begin{aligned} u_r^{(1)} &= u_r^{(1)}, \quad u_\theta^{(1)} = u_\theta^{(1)}, \quad \sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{rr}^{(1)}, \\ \sigma_{r\theta}^{(1)} &= \sigma_{r\theta}^{(1)}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

覆工内側 ($r = R_0$) の自由境界 :

$$\sigma_{rr}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{r\theta}^{(1)} = 0. \dots\dots\dots (37)$$

Mode2

遠方場 ($r \rightarrow \infty$) :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr}^{(2)} &= S_0 \cos 2(\theta - \theta_r), \\ \sigma_{r\theta}^{(2)} &= -S_0 \sin 2(\theta - \theta_r), \\ p^{(2)} &= p_0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

掘削孔壁と覆工の境界 ($r = R$) :

$$\left. \begin{aligned} u_r^{(2)} &= u_r^{(2)}, \quad u_\theta^{(2)} = u_\theta^{(2)}, \quad \sigma_{rr}^{(2)} = \sigma_{rr}^{(2)}, \\ \sigma_{r\theta}^{(2)} &= \sigma_{r\theta}^{(2)}, \quad \frac{\partial p^{(2)}}{\partial r} = 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

覆工内側 ($r = R_0$) の自由境界 :

$$\sigma_{rr}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{r\theta}^{(2)} = 0. \dots\dots\dots (40)$$

以上の条件にしたがう Mode1 および Mode2 の解析解は以下のようにして求められる。

Mode1

この問題における作用荷重は体積ひずみを生じさせ

る原因とはならないので、間隙圧は生じない。したがって、解は古典的な Lamé の弾性解により次式のように与えられる。

$$u_r^{(1)} = \frac{-1+2\nu}{2G} P_0 r + A \frac{1}{r}, \dots\dots\dots (41)$$

$$\sigma_{rr}^{(1)} = -P_0 - 2GA \frac{R^2}{r^2}, \dots\dots\dots (42)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(1)} = -P_0 + 2GA \frac{R^2}{r^2}. \dots\dots\dots (43)$$

Mode2

この問題は偏差荷重が作用するものであり、Laplace 変換領域での解は以下になる。

$$\begin{aligned} \tilde{u}_r^{(2)} &= \frac{S_0 R}{2Gs} \left\{ -\frac{B(1+\nu_u)}{3\beta(1-\nu_u)} C_1 \left[K_1(\xi) + \frac{2}{\xi} K_2(\xi) \right] \right. \\ &\quad \left. + C_2 \frac{R}{r} + C_3 \frac{R^3}{r^3} + \frac{r}{R} \right\} \cos 2(\theta - \theta_r), \end{aligned} \dots\dots\dots (44)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_\theta^{(2)} &= \frac{S_0 R}{2Gs} \left\{ -\frac{2B(1+\nu_u)}{3\beta^2(1-\nu_u)} C_1 \frac{R}{r} K_2(\xi) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1-2\nu_u}{2(1-\nu_u)} C_2 \frac{R}{r} + C_3 \frac{R^3}{r^3} - \frac{r}{R} \right\} \sin 2(\theta - \theta_r), \end{aligned} \dots\dots\dots (45)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}^{(2)} &= \frac{S_0}{s} \left\{ \frac{B^2(1-\nu)(1+\nu_u)^2}{9(1-\nu_u)(\nu_u-\nu)} C_1 K_2(\xi) \right. \\ &\quad \left. + \frac{B(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} C_2 \frac{R^2}{r^2} \right\} \cos 2(\theta - \theta_r), \end{aligned} \dots\dots\dots (46)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{rr}^{(2)} &= \frac{S_0}{s} \left\{ \frac{B(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} C_1 \left[\frac{1}{\xi} K_1(\xi) + \frac{6}{\xi^2} K_2(\xi) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{1-\nu_u} C_2 \frac{R^2}{r^2} - 3C_3 \frac{R^4}{r^4} + 1 \right\} \cos 2(\theta - \theta_r), \end{aligned} \dots\dots\dots (47)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(2)} &= \frac{S_0}{s} \left\{ -\frac{B(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} C_1 \left[\frac{1}{\xi} K_2(\xi) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{6}{\xi^2} \right) K_2(\xi) + 3C_3 \frac{R^4}{r^4} - 1 \right\} \cos 2(\theta - \theta_r), \end{aligned} \dots\dots\dots (48)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{r\theta}^{(2)} &= \frac{S_0}{s} \left\{ \frac{2B(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} C_1 \left[\frac{1}{\xi} K_1(\xi) + \frac{3}{\xi^2} K_2(\xi) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2(1-\nu_u)} C_2 \frac{R^2}{r^2} - 3C_3 \frac{R^4}{r^4} - 1 \right\} \sin 2(\theta - \theta_r), \end{aligned} \dots\dots\dots (49)$$

上式中の $\sim$ は Laplace 変換を意味し、 s は変換パラメータである。

ξ と β は次式で表される。

$$\xi = r \sqrt{\frac{s}{c}}, \quad \beta = R \sqrt{\frac{s}{c}}. \dots\dots\dots (50)$$

<Problem II>

この問題は遠方場条件(23)より下式のように得られる。

$$\sigma_{zz}^{(II)} = -S_z + [\nu(S_x + S_y) + \alpha(1-2\nu)p_0] \quad (51)$$

本問題の応力場において、 $\sigma_{zz}^{(II)}$ が一定応力で与えられることより間隙圧は生じないことになる。

一般に、Matrix (岩盤) と Inclusion (覆工) のポアソン比が異なるものとすれば $\sigma_{zz}^{(II)}$ および $\sigma_{zz}^{(III)}$ の作用によって、 $r = R$ の接合境界での半径方向の様な静水圧的な応力 p_h が発生することになる。このことを踏まえて境界条件式より面内応力は次式となる。

$$\sigma_{rr}^{(II)} = -p_h \frac{R^2}{r^2}, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(II)} = p_h \frac{R^2}{r^2} \quad (52)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr}^{(III)} &= -\frac{R^2}{R^2 - R_0^2} p_h \left(1 - \frac{R_0^2}{r^2}\right), \\ \sigma_{\theta\theta}^{(III)} &= -\frac{R^2}{R^2 - R_0^2} p_h \left(1 + \frac{R_0^2}{r^2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

上式等からこのときのひずみが求められ、それらの積分を実行して、最終的に次式のように変位が得られる。

$$\left. \begin{aligned} u_r^{(II)} &= \frac{r}{E} \left\{ -\nu \sigma_{zz}^{(II)} + p_h (1+\nu) \frac{R^2}{r^2} \right\}, \\ u_z^{(II)} &= \frac{z}{E} \sigma_{zz}^{(II)}. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

$$\left. \begin{aligned} u_r^{(III)} &= \frac{r}{E^I} \left\{ -\nu^I \sigma_{zz}^{(III)} - \frac{R^2}{R^2 - R_0^2} p_h \left\{ (1-\nu) + (1+\nu) \frac{R_0^2}{r^2} \right\} \right\}, \\ u_z^{(III)} &= \frac{z}{E^I} \left\{ \sigma_{zz}^{(III)} + \frac{2R^2}{R^2 - R_0^2} p_h \nu^I \right\} \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

さて、 $r = R$ において完全接合されていることから、この位置での変位の連続条件、すなわち $u_r^{(II)} = u_r^{(III)}$ 、 $u_z^{(II)} = u_z^{(III)}$ が成立しなければならない。したがって、この2つの条件式により p_h および $\sigma_{zz}^{(III)}$ を決定することができ、それらから Matrix および Inclusion の両領域での応力、変位などが最終的に求められることになる。

<Problem III>

この問題は、面外せん断応力が作用した場合のものである。この面外せん断応力のもとでは、平均垂直応力は生じず、それゆえに、Skempton 効果による間隙圧は生じないことになる。したがって、岩盤は弾性解により与えられることになる。

釣合方程式(4)、(12)は次式のような応力関数 φ を導入すれば、恒等的に満足される。

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad \sigma_{\theta r} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad (56)$$

この φ は次式のように与えられる。

$$\varphi(r, \theta) = A(\theta)r - \frac{B(\theta)}{r} \quad (57)$$

上式は、次式の φ に関する支配方程式を満たさなければならない。

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (58)$$

式(56)を上式に代入すれば次のような方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} A''(\theta) &= -A(\theta), \\ B''(\theta) &= -B(\theta). \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

また、ひずみ-変位関係式および構成方程式はそれぞれ次式である。

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad \gamma_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \quad (60)$$

$$\gamma_{rz} = \frac{1}{G} \sigma_{rz}, \quad \gamma_{\theta z} = \frac{1}{G} \sigma_{\theta z} \quad (61)$$

以上の式により、いくつかの操作により変位および応力の一般解は次式で与えられる。

$$u_z^{(III)} = \frac{1}{G} \left\{ A'(\theta)r + B'(\theta) \frac{1}{r} \right\} \quad (62)$$

$$\sigma_{rz}^{(III)} = A'(\theta) - B'(\theta) \frac{1}{r^2} \quad (63)$$

$$\sigma_{\theta z}^{(III)} = -A(\theta) - B(\theta) \frac{1}{r^2} \quad (64)$$

式(62)-(64)に対応する弾性覆工に対する一般解も上述と同様に求めると共に、条件(26)、(27)、(28)を満足するように岩盤および弾性覆工に対する $A(\theta)$ 、 $B(\theta)$ を定めることによって次式が得られる。

$$u_z^{(III)} = -\frac{1}{G} (S_{xz} \cos \theta + S_{yz} \sin \theta) r \left[1 + \frac{D_1}{r} \right] \quad (65)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rz}^{(III)} &= -(S_{xz} \cos \theta + S_{yz} \sin \theta) \left[1 - \frac{D_1}{r^2} \right], \\ \sigma_{\theta z}^{(III)} &= (S_{xz} \sin \theta - S_{yz} \cos \theta) \left[1 + \frac{D_1}{r^2} \right], \\ \sigma_{rr}^{(III)} &= \sigma_{\theta\theta}^{(III)} = \sigma_{zz}^{(III)} = \sigma_{r\theta}^{(III)} = p^{(III)} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

ここに、定数 D_1 は次式である。

$$D_1 = \frac{R^2 \{ R^2 (G - G^I) + R_0^2 (G + G^I) \}}{R_0^2 (G - G^I) + R^2 (G + G^I)} \quad (67)$$

以上に得られた結果の重ね合わせより、最終的な解は

次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_r^{(I)}, & \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{\theta\theta}^{(I)}, & \sigma_{zz} &= \sigma_{zz}^{(I)} + \sigma_{zz}^{(II)}, \\ \sigma_{r\theta} &= \sigma_{r\theta}^{(I)}, & \sigma_{rz} &= \sigma_{rz}^{(II)}, & \sigma_{\theta z} &= \sigma_{\theta z}^{(II)}, & p &= p^{(I)}. \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

なお、上式中では恒等的に 0 である成分は省略している。

4・2 弾性覆工の挙動 弾性覆工の解析は多孔質弾性岩盤の解析と同様に問題区分を実施して解析を行い、いくつかの操作により次のような結果が得られる。

<Problem I>

この問題は平面ひずみ状態のもとで解くことにより、変位および応力の一般解が次式で得られる。

$$\left. \begin{aligned} u_r^{(I)} &= u_r^{(1)} + u_r^{(2)}, \\ u_{\theta}^{(I)} &= u_{\theta}^{(2)}. \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{(I)} &= \sigma_r^{(1)} + \sigma_r^{(2)}, \\ \sigma_{\theta\theta}^{(I)} &= \sigma_{\theta\theta}^{(1)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2)}, \\ \sigma_{zz}^{(I)} &= \nu' [\sigma_r^{(1)} + \sigma_{\theta\theta}^{(1)}], \\ \sigma_{r\theta}^{(I)} &= \sigma_{r\theta}^{(2)}, \\ \sigma_{rz}^{(I)} &= \sigma_{\theta z}^{(I)} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Model

$$u_r^{(1)} = \frac{-1+2\nu'}{2(1+\nu')} B_1 r + 2B_2 \frac{1}{r}, \quad (71)$$

$$\sigma_r^{(1)} = 2G' \left[\frac{B_1}{2(1-\nu')} - 2B_2 \frac{1}{r^2} \right], \quad (72)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(1)} = 2G' \left[\frac{B_1}{2(1-\nu')} + 2B_2 \frac{1}{r^2} \right]. \quad (73)$$

Mode2

$$\begin{aligned} \tilde{u}_r^{(2)} &= \frac{S_0 R}{2G' s} \left[-4\nu' A_1 \frac{r^3}{R^3} - 4(-1+\nu') A_2 \frac{R}{r} \right. \\ &\quad \left. - 2A_3 \frac{r}{R} + 2A_4 \frac{R^3}{r^3} \right] \cos 2(\theta - \theta_r), \quad (74) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{\theta}^{(2)} &= \frac{S_0 R}{2G' s} \left[2(3-2\nu') A_1 \frac{r^3}{R^3} - 2(1-2\nu') A_2 \frac{R}{r} \right. \\ &\quad \left. + 2A_3 \frac{r}{R} + 2A_4 \frac{R^3}{r^3} \right] \sin 2(\theta - \theta_r), \end{aligned} \quad (75)$$

$$\tilde{\sigma}_r^{(2)} = \frac{S_0}{s} \left[-4A_2 \frac{R^2}{r^2} - 2A_3 - 6A_4 \frac{R^4}{r^4} \right] \cos 2(\theta - \theta_r), \quad (76)$$

$$\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(2)} = \frac{S_0}{s} \left[12A_1 \frac{r^2}{R^2} + 2A_3 + 6A_4 \frac{R^4}{r^4} \right] \cos 2(\theta - \theta_r), \quad (77)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{r\theta}^{(2)} &= \frac{S_0}{s} \left[6A_1 \frac{r^2}{R^2} - 2A_2 \frac{R^2}{r^2} \right. \\ &\quad \left. + 2A_3 - 6A_4 \frac{R^4}{r^4} \right] \sin 2(\theta - \theta_r), \quad (78) \end{aligned}$$

<Problem II>

岩盤側の<Problem II>を参照して変位に対する解は式(55)，および応力に対する解は式(53)で与えられる。

<Problem III>

岩盤側の<Problem III>の解析により次式を得る。

$$u_z^{(III)} = -\frac{1}{G'} (S_x \cos \theta + S_y \sin \theta) D_2 r \left[1 + \frac{R_0^2}{r^2} \right], \quad (79)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{(III)} &= -(S_x \cos \theta + S_y \sin \theta) D_2 \left[1 - \frac{R_0^2}{r^2} \right], \\ \sigma_{\theta\theta}^{(III)} &= (S_x \sin \theta - S_y \cos \theta) D_2 \left[1 + \frac{R_0^2}{r^2} \right], \\ \sigma_r^{(III)} &= \sigma_{\theta\theta}^{(III)} = \sigma_{zz}^{(III)} = \sigma_{r\theta}^{(III)} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

ここに、定数 D_2 は次式である。

$$D_2 = \frac{2R^2 G'}{R_0^2 (G - G') + R^2 (G + G')}. \quad (81)$$

以上によって得られた結果の重ね合わせより、最終的な解は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r' &= \sigma_r^{(I)}, & \sigma_{\theta\theta}' &= \sigma_{\theta\theta}^{(I)}, & \sigma_{zz}' &= \sigma_{zz}^{(I)} + \sigma_{zz}^{(II)}, \\ \sigma_{r\theta}' &= \sigma_{r\theta}^{(I)}, & \sigma_{rz}' &= \sigma_{rz}^{(II)}, & \sigma_{\theta z}' &= \sigma_{\theta z}^{(II)}. \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

なお、恒等的に 0 である成分は省略している。

5. 数値計算例

時間領域における数値解は前の章において得られた解析解を近似逆 Laplace 変換を適用することによって得ることができる。多種多様な逆 Laplace 変換は存在するが、以下の計算結果は Stehfest の方法⁽⁹⁾を用いた。

数値計算を行うに当たりそれぞれの物質係数は以下のように与えた。

$$B = 0.915, \quad \alpha = 0.968, \quad c = 0.0154 \text{ m}^2/\text{day},$$

$$\nu = 0.219, \quad \nu_u = 0.461, \quad \nu' = 0.180,$$

$$p_0 = 0.0098 \text{ MPa}.$$

計算例として $S_x = -1.0 \text{ MPa}$ すなわち

$\sigma_{xx} = 1.0 \text{ MPa}$ のみ作用したときの $E/E' = 10$ および $E/E' = 0.1$ の場合の最大せん断応力 $\tau_{\max}$ の状態を表す分布図を示す。図3および図4と図5～図7はそれぞれ $E/E' = 10$ と $E/E' = 0.1$ に対する $\tau_{\max} / p_0$ の等高線図である。図3と図5は $t=0.001(\text{day})$ ，図4と図6は $t=10^3(\text{day})$ ，図7は弾性解である。

図3および図4は覆工の弾性係数よりも媒体の弾性

係数が大きいため、覆工側の応力の値に比べて媒体側の応力の値が大きくなっていることが分かる。また逆に図5～図7では介在物の弾性係数が媒体の弾性係数よりも大きいため媒体側の応力の値に比べて介在物側の応力の値が大きいが分かる。

また、 $t=0.001(\text{day})$ から $t=10^3(\text{day})$ の時間変化により等高線図が変化していることが分かり、 $t=10^3(\text{day})$ の等高線図と弾性解による等高線図はほぼ同様の等高線図であることが分かる。この傾向は、図8においてさらに良く読みとれる。

Fig.3 The contour diagram of maximum shearing stress in $E/E^I = 10$ and $t=0.001(\text{day})$.

Fig.4 The contour diagram of maximum shearing stress in $E/E^I = 10$ and $t=10^3(\text{day})$.

Fig.5 The contour diagram of maximum shearing stress in $E/E^I = 0.1$ and $t=0.001(\text{day})$.

Fig.6 The contour diagram of maximum shearing stress in $E/E^I = 0.1$ and $t=10^3(\text{day})$.

Fig.7 The contour diagram of maximum shearing stress in elastic medium in $E/E^I = 0.1$.

図8は $r=R$ の時の τ_{max} / p_0 の円周方向の分布である。この図を見ると $t=0.001(\text{day})$ から時間が経過し $t=10^3(\text{day})$ に至るまでに最大せん断応力の最大値が減少したことが分かる。

図9はProblem 1のMode2における間隙圧の分布図である。 $t=0.001(\text{day})$ において接合境界上で最大の間隙圧を生じる。そして時間が経過するとともに間隙圧は減少し $t=10^3(\text{day})$ ではほぼ0となることがわかる。

Fig.8 The distribution of maximum shearing stress at $r=R$ in $E/E^I = 0.1$.

Fig.9 The distribution of the pore pressure at Problem1(Mode2) in $E/E^I = 10$.

次に $\phi_z = 30(\text{deg})$, $\phi_y = 60(\text{deg})$ の傾斜を有したトンネルの計算例を示す。遠方原位置主応力は以下のように与えた。

$$S_z = 0.025 \text{ MPa}, S_x = 0.029 \text{ MPa},$$

$$S_y = 0.020 \text{ MPa}.$$

また、物質係数は $G = 760.0 \text{ MPa}$, $E^I = 2.5 \times 10^5 \text{ MPa}$ であり、その他は前述したとおりである。

図 10 および図 11 より時間変化により応力状態が変化していることが分かる。また、トンネルが $\phi_z = 30(\text{deg})$, $\phi_y = 60(\text{deg})$ の角度で傾斜していることから等高線図が回転しているように見受けられる。