適応重点サンプリング・シミュレーションに基づく 骨組構造システムの信頼性評価法*

朴 永 太^{*1}, 奥 田 昇 也^{*2}, 米 澤 政 昭^{*3}

Reliability Estimation Method for Frame Structures Based on Adaptive Importance Sampling Simulation

Young-Tae PARK^{*4}, Shoya OKUDA and Masaaki YONEZAWA

^{*4} Graduate School of Engineering, Kinki University,
3-4-1 Kowakae, Higashi Osaka shi, Osaka, 577 8502 Japan

This study describes a reliability estimation method for the frame structures based on an adaptive importance sampling simulation. Both Normal and Non Normal probability distributions are treated in the original basic random variable space. First introducing a preliminary sampling simulation process for estimating the failure probabilities, the sample means and variances of the respective failure domains, several dominant failure modes are selected. For the selected failure domains, the local importance sampling densities are determined so as to have the same parameters as the estimated sample means and variances respectively. Then a multi-modal importance sampling density is constructed as a composite of the weighted local importance sampling densities by weighting the failure probabilities of the selected failure domains. The importance sampling simulation is carried out to estimate the structural failure probability and the respective local importance sampling densities are updated in the simulation process. Numerical examples are presented to show the validity of the proposed method.

Key Words: Structural Reliability, Frame Structure, Probabilistic Method, Simulation Method, Importance Sampling, Adaptive Sampling, Failure Probability

1. 結 論

構造信頼性解析において、重点サンプリング・シミュレーション (Importance Sampling Simulation: 以下, ISS とする) は構造システムの破損確率 (以下, 構造破損確率とする) を評価する際に、破損確率の推定量の分散を減少させる有効な手法として知られ、理論上は推定量の分散をゼロにすることが可能である⁽¹³⁾ ことから注目されている。ISS の基礎理論は、重点サンプリング密度関数を導入して、構造破損の生起事象の集合である破損領域にサンプルを重点的に集中させて、少ないサンプル数で高精度に、構造破損確率を推定するということである。

ISS の理論に基づく構造信頼性解析に関する代表的な手法では、一次信頼性解析法 (FORM) ^{(1) (5)} など得た設計点 (design point) 上に、基本確率変数の

確率密度関数の中心点を移動させることにより、重点サンプリング密度関数を構成している^{(3) (7)}。これらは、基本確率変数が正規分布の場合、設計点の算出やその適用が容易であるが、非正規分布の場合には変数変換が必要で、設計点の算出過程が複雑になるなど、シミュレーション法に基づく信頼性評価における簡便性という利点が薄れてしまう。さらに、破損領域の形状によっては、設計点の算出が不可能な場合や、サンプルの多くが破損領域に集中しない場合がある⁽¹⁰⁾。

一方、破損領域内のサンプルデータを利用して、重点サンプリング密度関数を構成する適応サンプリング法⁽⁴⁾が提案された。この手法は、破損領域に関する 2 次までのモーメントを初期シミュレーションによって推定し、その推定量を密度関数の母数に用いて重点サンプリング密度関数を構成している。さらに、サンプル数の増加に伴って、重点サンプリング密度関数を更新して、密度関数の破損領域への適応度を高めている。しかし、単峰性の重点サンプリング密度関数を構成しているので、構造システムのように破損領域が離散的に複数ある場合は、サンプルの多くが非破損領域に生

* 原稿受付 2001 年 2 月 20 日。

^{*1} 正員, 近畿大学大学院工学研究科 (〒577 8502 東大阪市小若江 3 4 1)。

^{*2} 正員, 近畿大学工業高等専門学校機械工学科。

^{*3} 正員, 近畿大学理工学部。

E-mail: park@fw.is.kindai.ac.jp

成されるという問題点や、初期シミュレーションに関する初期値設定や精度の問題点がある⁽⁹⁾。システム信頼性問題に対しては、多峰性の重点サンプリング密度関数を構成することが有効である^{(6) (14)}。

以上のことから本研究では、適応サンプリング法の重点サンプリング密度関数の構成法を基礎として、骨組構造などのシステム信頼性問題を対象に、適応重点サンプリング・シミュレーションに基づく構造信頼性評価法を提案する。まず初めに、予備探索シミュレーション過程を導入して、各破損モードの破損確率値に基づいて各破損モードの構造破損に対する相対的重要度を算出し、予め構造解析によって同定された複数の破損モードの中から、構造破損に対して主要となる破損モードを選別する。さらに同過程では、主要破損モードの破損領域に関する2次までのモーメントを推定し、その推定量を母数とする各主要破損モードごとに対する局所的な重点サンプリング密度関数を構成する。次に、これらを合成した多峰性重点サンプリング密度関数に基づくサンプリングにより、構造破損確率を推定する^{(12) (17) (18)}。シミュレーションのサンプルは、相対的重要度に応じて決定されるサンプル配分に基づいて、各局所的な重点サンプリング密度関数から生成され、構造破損確率の推定と同時に、サンプリングごとに重点サンプリング密度関数を逐次更新する。提案手法では、信頼性評価において考慮する破損モード数を減少させて、構造システムを簡素化して取り扱い、計算効率を高める。さらに、解析的手法や変数変換などを用いずに、正規・非正規分布を有する構造信頼性問題を容易に取り扱えるように、適用性も高める。

2. 重点サンプリング・シミュレーションに基づく構造破損確率の推定

2.1 構造システムの破損確率 本研究では、 m 個の破損モードが同定される骨組構造などの構造システムに対して、時間非依存の信頼性評価を考える。構造システムの破損条件を直列システム問題とすると、構造破損確率 P_f は次式のように定義される。

$$P_f = \Pr[g_1(\mathbf{X}) \leq 0 \cup g_2(\mathbf{X}) \leq 0 \cup \dots \cup g_m(\mathbf{X}) \leq 0] \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_k)^T$ は構造システムに関する部材強度や外部荷重等を表す基本確率変数ベクトル、 $g_l(\mathbf{X})$, ($l = 1, 2, \dots, m$) は各破損モードの限界状態関数で、 $g_l(\mathbf{X}) \leq 0$ のときその破損モードが破損状態、 $g_l(\mathbf{X}) > 0$ のとき安全状態にあることを示す。

基本確率変数 $\mathbf{X}$ の結合確率密度関数を $f(\mathbf{X})$ で表

すと、構造破損確率 P_f は次式の積分で定式化される。

$$P_f = \int_{D_f} f(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \quad (2)$$

ここで、 D_f は次式で規定される破損領域である。

$$D_f = \left\{ \mathbf{X} \mid \bigcup_{l=1}^m [g_l(\mathbf{X}) \leq 0] \right\} \quad (3)$$

基本確率変数 $\mathbf{X}$ の実現値に対して、指標値を示す指標関数 $I_{D_f}[\cdot]$ を次のように定義する。

$$I_{D_f}[\mathbf{X}] = \begin{cases} 1 & : \mathbf{X} \in D_f \\ 0 & : \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

これを式(2)に導入すると、構造破損確率 P_f は $\mathbf{X}$ の全定義域上の積分として表すことができる。

$$P_f = \int_{\text{all } \mathbf{X}} I_{D_f}[\mathbf{X}] f(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \quad (5)$$

2.2 重点サンプリング・シミュレーション 式(5)に重点サンプリング密度関数 $h(\mathbf{X})$ を導入すると、構造破損確率 P_f は、次式の期待値 $E_f\{\cdot\}$ として表すことができる。

$$\begin{aligned} P_f &= \int_{\text{all } \mathbf{X}} I_{D_f}[\mathbf{X}] \frac{f(\mathbf{X})}{h(\mathbf{X})} h(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \\ &= E_f \left\{ I_{D_f}[\mathbf{X}] \frac{f(\mathbf{X})}{h(\mathbf{X})} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

したがって、ISSによる構造破損確率の推定量 $\hat{P}_f$ 、および推定量の分散 $\text{Var}[\hat{P}_f]$ は、それぞれ次式に基づいて求められる。

$$\hat{P}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_f^{(i)} \quad (7)$$

$$\text{Var}[\hat{P}_f] = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (P_f^{(i)} - \hat{P}_f)^2 \quad (8)$$

$$P_f^{(i)} = I_{D_f}[\mathbf{x}^{(i)}] \frac{f(\mathbf{x}^{(i)})}{h(\mathbf{x}^{(i)})} \quad (9)$$

ここで、 $\mathbf{x}^{(i)}$, ($i = 1, 2, \dots, N$) は重点サンプリング密度関数 $h(\mathbf{X})$ から生成されるサンプル、 N はシミュレーションのサンプル数である。

3. 適応重点サンプリング・シミュレーション

3.1 主要破損モードの判別 一般に、構造システムには複数の破損モードが同定され、システムの規模が大きくなると破損モード数も増大する。これらの中には、破損がほとんど生起しないモードや、破損生起してもシステム全体の構造破損にあまり影響を与え

ないモードもある。すべての破損モードを考慮して構造システムの信頼性評価を行うと、その評価過程が複雑になり、計算が非効率になる状況が考えられる。そこで、各破損モードが構造破損に対してどの程度影響があるかを示す相対的重要度を算出し、構造破損に主要となる破損モードを選別する。その相対的重要度は、次式で定義される重み係数 w_l ($l = 1, 2, \dots, m$) によって決定する⁽¹²⁾。

$$w_l = \frac{P_{f_l}}{\sum_{l=1}^m P_{f_l}} \quad (10)$$

ここで、 P_{f_l} ($l = 1, 2, \dots, m$) は各破損モードの破損確率であり、その算出については次節で述べる。

重み係数が $w_l \cong 0$ となる場合は、構造破損への影響度が小さいと考えられ、その破損モードを除外して構造システムの信頼性評価を行う。

3.2 予備探索シミュレーション 重点サンプリング密度関数の構成には、破損領域 D_f に関する情報が必要となるが、予め与えられていないため、他の最適化手法などを用いて算出する必要がある。例えば、ISPUD 法では設計点を算出する過程を経て、重点サンプリング密度関数を構成している⁽³⁾。また、適応サンプリング法では、条件付シミュレーションを用いて破損領域 D_f に関する平均値と標準偏差を推定し、それぞれを密度関数の 1, 2 次モーメントとする単峰性の重点サンプリング密度関数を構成している⁽⁴⁾。

そこで本研究では、少ない計算時間でおおよその情報を算出することを目的に、シミュレーションによって破損領域 D_f に関する統計的情報を収集するという過程を導入する。これを以下で、予備探索シミュレーションとする。予備探索シミュレーションでは、各破損モードの破損領域に関する平均値と標準偏差を ISS の手法を用いて推定し、それぞれを密度関数の 1, 2 次モーメントとする複数の局所的な重点サンプリング密度関数を構成する。ISS に基づく各破損モードの破損領域に関する平均値 $\mathbf{x}_{D_{f_l}}$ ($l = 1, 2, \dots, m$)、標準偏差 $\sigma_{D_{f_l}}$ ($l = 1, 2, \dots, m$)、および破損確率 P_{f_l} は、理論的にはそれぞれ、次のように定式化される。

$$\mathbf{x}_{D_{f_l}} = \frac{1}{P_{f_l}} \int_{D_{f_l}} \mathbf{X} \frac{f(\mathbf{X})}{h_0(\mathbf{X})} h_0(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \quad (11)$$

$$\sigma_{D_{f_l}} = \sqrt{\frac{1}{P_{f_l}} \int_{D_{f_l}} (\mathbf{X} - \mathbf{x}_{D_{f_l}})^2 \frac{f(\mathbf{X})}{h_0(\mathbf{X})} h_0(\mathbf{X}) d\mathbf{X}} \quad (12)$$

$$P_{f_l} = \int_{D_{f_l}} \frac{f(\mathbf{X})}{h_0(\mathbf{X})} h_0(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \quad (13)$$

Fig. 1 Preliminary sampling simulation

ここで、 D_{f_l} ($l = 1, 2, \dots, m$) は式 (14) で規定される各破損モードの破損領域、 $h_0(\mathbf{X})$ は予備探索シミュレーションで用いる重点サンプリング密度関数であり、以下で予備サンプリング密度関数とする。

$$D_{f_l} = \{\mathbf{X} \mid g_l(\mathbf{X}) \leq 0\} \quad (14)$$

予備探索シミュレーションの概念図を図 1 に示す。予備サンプリング密度関数 $h_0(\mathbf{X})$ には、元の確率密度関数 $f(\mathbf{X})$ の平均値 μ_X と同じ平均値を持ち、その標準偏差 σ_X を L 倍した標準偏差、すなわち $L \times \sigma_X$ を有する密度関数を用いる。例えば、 $L = 1.0$ の場合は、モンテカルロ・シミュレーションのサンプリングに基づく評価となり、式 (11), (12), (13) の推定には膨大なサンプル数を必要とする。図 1 に示すように、 $L > 1.0$ の場合の $h_0(\mathbf{X})$ は、サンプル値のばらつきが拡大し、元の確率密度関数 $f(\mathbf{X})$ よりも多くのサンプルを破損領域 D_f に生成させることが可能である⁽¹²⁾。したがって、予備探索シミュレーションでは式 (11), (12), (13) の推定量が、それぞれ次のように算出される。

$$\hat{\mathbf{x}}_{D_{f_l}} = \frac{1}{\hat{P}_{f_l}} \left\{ \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{x}^{(i)} \cdot P_l^{(i)} \right\} \quad (15)$$

$$\hat{\sigma}_{D_{f_l}} = \sqrt{\frac{1}{\hat{P}_{f_l}} \left\{ \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} (\mathbf{x}^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_{D_{f_l}})^2 \cdot P_l^{(i)} \right\}} \quad (16)$$

$$\hat{P}_{f_i} = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} P_i^{(i)} \quad (17)$$

$$P_i^{(i)} = I_{D_{f_i}}[\mathbf{x}^{(i)}] \frac{f(\mathbf{x}^{(i)})}{h_0(\mathbf{x}^{(i)})} \quad (18)$$

ここで、 $\mathbf{x}^{(i)}$, ($i = 1, 2, \dots, N_p$) は $h_0(\mathbf{X})$ から生成されるサンプル, N_p は予備探索シミュレーションのサンプル数, $I_{D_{f_i}}[\cdot]$ は次式で定義される指標関数である.

$$I_{D_{f_i}}[\mathbf{X}] = \begin{cases} 1 & : \mathbf{X} \in D_{f_i} \\ 0 & : \text{otherwise} \end{cases} \quad (19)$$

3.3 多峰性適応重点サンプリング密度関数による構造破損確率の推定 以下では、提案手法による重点サンプリング密度関数 $h(\mathbf{X})$ の構成法、および $h(\mathbf{X})$ に基づくサンプルの生成法、構造破損確率 P_f の推定手順について述べる.

まず、重み係数 w_l は式 (10) で定義されるが、各破損モードの破損確率 P_{f_i} は、解析的に算出することは困難であるので、式 (17) の予備探索シミュレーションによる推定量 $\hat{P}_{f_i}$ を用いる. すなわち、式 (10) において $P_{f_i} = \hat{P}_{f_i}$ として、重み係数 w_l を決定する.

次に、主要と判別された破損モードに対し、元の確率密度関数 $f(\mathbf{X})$ と同じ分布形で、式 (15), (16) のその破損モードに関する破損領域の平均値、標準偏差の推定量 $\hat{\mathbf{x}}_{D_{f_i}}$, $\hat{\sigma}_{D_{f_i}}$ をそれぞれ密度関数の 1, 2 次モーメントとする局所的重点サンプリング密度関数 $h_l(\mathbf{X})$, ($l = 1, 2, \dots, m_d$) を構成する. ここで、 m_d は主要破損モード数である.

図 2 に示すように、主要破損モードのみに対して構成される局所的重点サンプリング密度関数 $h_l(\mathbf{X})$ と、重み係数 w_l を合成して、次式のように多峰性重点サンプリング密度関数 $h(\mathbf{X})$ を構成する⁽¹²⁾.

$$h(\mathbf{X}) = \sum_{l=1}^{m_d} w_l h_l(\mathbf{X}) \quad (20)$$

したがって、提案手法による構造破損確率の推定量 $\hat{P}_f$ とその分散 $\text{Var}[\hat{P}_f]$ は、式 (20) の重点サンプリング密度関数 $h(\mathbf{X})$ に従うサンプル $\mathbf{x}^{(i)}$ を生成し、破損領域 D_f を次式のように変更して、式 (7), (8), (9) に基づいて算出される.

$$D_f = \left\{ \mathbf{X} \mid \bigcup_{l=1}^{m_d} [g_l(\mathbf{X}) \leq 0] \right\} \quad (21)$$

$h(\mathbf{X})$ に従うサンプル $\mathbf{x}^{(i)}$ は、重み係数 w_l の値に応じて、局所的重点サンプリング密度関数 $h_l(\mathbf{X})$ から生成され、各密度関数 $h_l(\mathbf{X})$ からのサンプル数 N_l , ($l = 1, 2, \dots, m_d$) は、次式によって与えられる.

$$N_l = w_l \cdot N \quad (22)$$

Fig. 2 Local importance sampling densities constructed for dominant failure modes

式 (22) により、相対的重要度の大きい破損モードに対しては、より多くのサンプルが配分される.

さらに、シミュレーションのサンプル $\mathbf{x}^{(i)}$ は、構造破損確率を推定すると同時に、式 (15), (16), (17), (23) に基づいて、各破損領域 D_{f_i} に関する平均値と標準偏差も推定し、式 (20) の重点サンプリング密度関数 $h(\mathbf{X})$ を逐次更新する.

$$P_i^{(i)} = I_{D_{f_i}}[\mathbf{x}^{(i)}] \frac{f(\mathbf{x}^{(i)})}{h_i(\mathbf{x}^{(i)})} \quad (23)$$

以下に、提案手法の構造破損確率推定手順を示す.

Step1 予備探索シミュレーションにより、各破損モードの破損領域に関する平均値 $\mathbf{x}_{D_{f_i}}$, 標準偏差 $\sigma_{D_{f_i}}$, 破損確率 P_{f_i} を推定する.

Step2 推定量 $\hat{P}_{f_i}$ を用いて、式 (10) の重み係数 w_l を算出し、主要破損モードを判別する. 主要破損モードに対して、その平均値と標準偏差の推定量 $\hat{\mathbf{x}}_{D_{f_i}}$, $\hat{\sigma}_{D_{f_i}}$ から密度関数の母数を決定し、局所的重点サンプリング密度関数 $h_l(\mathbf{X})$ を構成する.

Step3 式 (20) の多峰性重点サンプリング密度関数 $h(\mathbf{X})$ を構成する.

Step4 重み係数 w_l を用いて、 $[0, 1]$ の区間を m_d 個の区間 $H_1 : [0, w_1]$, $H_2 : [w_1, (w_1 + w_2)]$, $\dots$, $H_{m_d} : [(w_1 + w_2 + \dots + w_{m_d-1}), 1]$ に分割する. $[0, 1]$ の一様乱数 u_i を生成し、 u_i が区間 H_l にあれば、 l 番目の局所的重点サンプリング密度関数 $h_l(\mathbf{X})$ からサンプル $\mathbf{x}^{(i)}$ を生成する.

Step5 $I_{D_f}[\mathbf{x}^{(i)}] \leq 0$ であれば、式 (7), (8), (9) に基づいて構造破損確率 P_f を推定する. $I_{D_f}[\mathbf{x}^{(i)}] > 0$ であれば、Step4 へ飛ぶ.

Step6 $I_{D_{f1}}[x^{(i)}] \leq 0$ となる破損領域 D_{f1} の平均値, 標準偏差, 破損確率を式 (15), (16), (17), (23) に基づいて算出し, Step3へ飛ぶ. Step3からStep6を N 回繰り返す.

4. 数値計算例

骨組構造, およびトラス構造システムの破損確率を評価する数値計算例により, 提案手法 (以下, Proposed とする) の有効性を検討する. モンテカルロ・シミュレーション (以下, MCS とする), および多峰性 ISPUD 法⁽¹⁴⁾ (以下, MISPUD とする), 方向シミュレーション⁽²⁾ (以下, DS とする) に基づく結果と比較し, 提案手法の推定精度, 適用性について検討する. 各サンプリング密度関数に従うサンプルは, Meresenne Twister⁽⁸⁾ に基づく一様乱数を変換して生成した. 各数値計算例の厳密な構造破損確率値は, 解析的には与えられないため, 十分大きいサンプル数の MCS による推定量を推定精度比較のための基準値 (表, 図中で Exact とする) としている. 数値計算例に使用した計算機は, SUN Workstation Ultra-1 (clock 167MHz), プログラミング言語は FORTRAN77 である.

4.1 数値計算例 1: 一径間一層骨組構造システム

図 3 に示す一径間一層骨組構造システムの破損確率の評価を行う. この骨組構造の破損モードに対する限界状態関数は, 式 (24) のように与えられる⁽¹⁵⁾.

$$\begin{cases} g_1(\mathbf{R}, \mathbf{L}) = R_1 + 3R_2 - 5L_2 \\ g_2(\mathbf{R}, \mathbf{L}) = 2R_1 + 2R_2 - 5L_2 \\ g_3(\mathbf{R}, \mathbf{L}) = 4R_2 - 5L_2 \\ g_4(\mathbf{R}, \mathbf{L}) = 3R_1 + R_2 - 5L_1 \\ g_5(\mathbf{R}, \mathbf{L}) = 4R_1 - 5L_1 \\ g_6(\mathbf{R}, \mathbf{L}) = 2R_1 + 2R_2 - 5L_1 \\ g_7(\mathbf{R}, \mathbf{L}) = 2R_1 + 4R_2 - 5L_1 - 5L_2 \\ g_8(\mathbf{R}, \mathbf{L}) = 4R_1 + 2R_2 - 5L_1 - 5L_2 \end{cases} \quad (24)$$

ここで, R_1, R_2 は部材強度, L_1, L_2 はそれぞれ水平, 垂直荷重であり, 表 1 に示す統計データを有する確率変数であるとする. 予備探索シミュレーションの結果を表 2 に, 構造破損確率推定の結果を表 3, 図 4 に示す.

表 2 は, サンプル数 $N_p = 10^3$ の予備探索シミュレーションによる重み係数 w_i の値と, サンプル数 $N = 10^4$ の構造破損確率推定シミュレーションを行った場合の主要破損モードに対して配分されたサンプル数 N_i を示している. 重み係数 w_i の値より, 各破損モードの構造破損に対する相対的重要度が表されている. 重み係数 w_i の算出には式 (17) の推定量を用いているので, シミュレーションによる推定誤差を考慮して,

Fig. 3 Frame structure for numerical example 1

Table 1 Statistical data of basic random variables for numerical example 1

Variable	Mean value μ_i	c.o.v.	Distribution type		
			Case1	Case2	Case3
R_1	76.1[kN-m]	0.05	N	LN	W
R_2	99.8[kN-m]	0.05	N	LN	W
L_1	24.8[kN]	0.20	N	G	G
L_2	40.0[kN]	0.20	N	G	G
l	5.0[m]	-			
h	5.0[m]	-			

N: Normal, LN: Log-Normal, G: Gumbel, W: Weibull

Table 2 Results of preliminary sampling simulation for numerical example 1

Mode $g_i(\mathbf{X})$	Weighted factor w_i^*			Sample number $N_i^\dagger$		
	Case1	Case2	Case3	Case1	Case2	Case3
1	0.0694	0.1928	0.1995	531	2026	2085
2	0.4412	0.3452	0.3391	4391	3957	3694
3	0.0064	0.0772	0.1103	-	923	1205
4	0.0000	0.0004	0.0027	-	-	-
5	0.0000	0.0004	0.0029	-	-	-
6	0.0000	0.0000	0.0027	-	-	-
7	0.0000	0.0322	0.0431	-	-	-
8	0.4802	0.3463	0.2996	5087	3094	3016

*: $L = 1.7, N_p = 10^3, \dagger: N = 10^4$

$w_i \leq 0.05$ となる重み係数は, $w_i \cong 0.00$ に近似している. その結果, Case 1 のとき破損モード 1, 2, 8, Case 2, 3 のとき破損モード 1, 2, 3, 8 が, それぞれ主要破損モードとして判別された. 表 2 より, この判別による構造破損に対する相対的重要度に応じて, 主要破損モードにより多くのサンプルが配分されていることがわかる.

表 3 では, 各手法によるサンプル数 $N = 10^4$ の構造破損確率の推定量 $\hat{P}_f$, その変動係数 (表中で c.o.v. of $\hat{P}_f$ とする), 計算時間 (Proposed では, 予備探索シミュレーションの計算時間を含む), サンプルの有効利用率として構造破損確率推定に寄与したサンプル数 N_f の総サンプル数 N に対する比率 $q = N_f/N$ を示している. 表 3 より, Proposed の推定結果は, 各 Case と他手法に比べて推定精度が良く, 変動係数の値も小さくなっている. また図 4 より, Proposed はサンプル数 $N = 10^3$ 程度で厳密値に収束し, サン

Table 3 Estimated results of numerical example 1

Method	Estimated $\hat{P}_f$	c.o.v. of $\hat{P}_f$	CPU time [sec]
[Case 1]	$\times 10^{-4}$		
Proposed*	2.8026 (0.7110)	0.0207	0.75
MISPUD	2.6983 (0.5312)	0.0204	0.78
DS	2.9974 (0.3281)	0.0418	25.23
MCS	4.0000	0.4999	0.27
Exact	2.7928	-	
[Case 2]	$\times 10^{-3}$		
Proposed*	5.5696 (0.8350)	0.0206	1.19
MCS	1.2000	0.2885	0.26
Exact	5.7251	-	
[Case 3]	$\times 10^{-3}$		
Proposed*	5.7387 (0.8112)	0.0163	5.04
MCS	5.2000	0.1383	0.24
Exact	5.8384	-	

*: $L = 1.7$, $N_p = 10^3$, $N = 10^4$, $(\cdot) : q = N_f/N$

Fig. 4 Results of numerical example 1 - [Case 1]

プル数が増大するにつれて、安定した推定結果になっていることがわかる。

4.2 数値計算例2：三径間一層骨組構造システム

図5に示す三径間一層骨組構造システムを取り扱う。接点の全塑性曲げモーメント M_i ($i = 1, 2, \dots, 11$) に対して、水平荷重 F_1 、および垂直荷重 F_2, F_3, F_4 が作用するものとする、この骨組構造には15個の破壊モードが同定される⁽¹⁶⁾。各基本確率変数の統計データを表4、計算結果を表5、図6に示す。

予備探索シミュレーションの結果、各Caseとも図

Fig. 5 3-bay 1-storey frame structure and identified failure modes for numerical example 2

Table 4 Statistical data of basic random variables for numerical example 2

Variable	Mean value μ_i	c.o.v.	Distribution type		
			Case1	Case2	Case3
$M_1 - M_{11}$	101.1[kNm]	0.15	N	LN	W
F_1	50.0[kN]	0.15	N	LN	G
F_2, F_3, F_4	40.0[kN]	0.15	N	LN	G
l_1	5.0[m]	-			
l_2, l_3, l_4	10.0[m]	-			

N: Normal, LN: Log-Normal, G: Gumbel, W: Weibull

5に示す破壊モード2, 3, 4が、主要破壊モードと判別され、破壊モード数は15から3に減少した。また、破壊モード数の減少に伴い、基本確率変数は15変数から10変数に減少した。

表5、図6より、Case 1ではMISPUDが最良の推定結果を与えているが、Proposedではその他の手法と比較して相対的に精度良い、安定した推定結果を与えていることがわかる。Case 3のProposedによる計算時間は、Case 1, 2と比較して非常に増大しているが、これは以下のようなことからである。基本確率変数 X がワイブル分布に従う場合、局所的な重点サンプリング密度関数 $h_l(X)$ の1, 2次モーメントをそれぞれ次のように与える。

$$\eta \Gamma \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) = \hat{x}_{D,1} \quad (25)$$

$$\eta \sqrt{\Gamma \left(1 + \frac{2}{\lambda} \right) - \Gamma \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right)^2} = \hat{\sigma}_{D,1} \quad (26)$$

Table 5 Estimated results of numerical example 2

Method	Estimated $\hat{P}_f$	c.o.v. of $\hat{P}_f$	CPU time [sec]
[Case 1]	$\times 10^{-5}$		
Proposed*	2.8460 (0.7110)	0.0144	17.58
MISPUD	2.8233 (0.5008)	0.0070	44.37
DS	2.9105 (0.3281)	0.0887	162.17
MCS	3.0000	0.5773	11.69
Exact	2.8633	-	
[Case 2]	$\times 10^{-5}$		
Proposed*	7.2025 (0.8356)	0.0144	26.55
MCS	1.1000	0.3015	12.97
Exact	7.1174	-	
[Case 3]	$\times 10^{-3}$		
Proposed†	1.2539 (0.8112)	0.0181	130.05
MCS	1.3500	0.0860	10.60
Exact	1.2467	-	

*: $L = 2.0$, †: $L = 1.7$, $N_p = 10^4$, $N = 10^5$, $(\cdot) : q = N_f/N$

Fig. 6 Results of numerical example 2 - [Case 1]

ここで、 $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数、 λ , η はそれぞれワイブル分布の形状母数、および尺度母数である。式 (25), (26) より、母数 λ , η の算出には繰り返し計算が必要となり、Proposed ではサンプリングごとに $h(\mathbf{X})$ を更新する際に、 $h_i(\mathbf{X})$ の母数 λ , η を算出するので、Case 1, 2 よりも計算量が多くなるためである。

4.3 数値計算例 3 : 10 部材トラス構造システム
図 7 に示す 10 部材トラス構造システム⁽¹¹⁾の破損確率の評価を行う。各部材強度 T_i ($i = 1, 2, \dots, 10$) と水平荷重 F_1 , 垂直荷重 F_2 の統計データをそれぞれ表 6

Fig. 7 10-member truss structure for numerical example 3

Table 6 Statistical data of basic random variables for numerical example 3

Variable	Mean value μ_i	c.o.v.	Distribution type		
			Case1	Case2	Case3
T_1, T_2	90.0[kN]	0.15	N	LN	LN
T_3	9.0[kN]	0.15	N	LN	LN
T_4, T_5	48.0[kN]	0.15	N	LN	LN
T_6, T_7	21.0[kN]	0.15	N	LN	LN
T_8	15.0[kN]	0.15	N	LN	LN
T_9, T_{10}	48.0[kN]	0.15	N	LN	LN
F_1	11.0[kN]	0.30	N	LN	G
F_2	3.6[kN]	0.20	N	LN	G

N: Normal, LN: Log-Normal, G: Gumbel

Table 7 Estimated results of numerical example 3

Method	Estimated $\hat{P}_f$	c.o.v. of $\hat{P}_f$	CPU time [sec]
[Case 1]	$\times 10^{-5}$		
Proposed*	4.7715 (0.6281)	0.0236	13.79
MCS	3.0000	0.5773	6.57
MISPUD	5.1107 (0.5143)	0.0070	21.92
DS	5.2315 (0.1108)	0.0539	166.58
Exact	5.0893	-	
[Case 2]	$\times 10^{-4}$		
Proposed*	8.0303 (0.7636)	0.0113	24.26
MCS	7.6000	0.1147	7.72
Exact	8.2000	-	
[Case 3]	$\times 10^{-3}$		
Proposed*	1.2084 (0.8064)	0.0082	23.27
MCS	1.1700	0.0924	6.96
Exact	1.2685	-	

*: $L = 1.7$, $N_p = 10^4$, $N = 10^5$, $(\cdot) : q = N_f/N$

に示し、計算結果を表 7 に示す。

予備探索シミュレーションの主要破損モードの判別により、各 Case と破損モード数は 8 から 4 に、基本確率変数の数は 12 変数から 8 変数に減少した。表 7 より、Proposed は数値計算例 2 と同様に、MISPUD に次いで、他手法より相対的に推定精度の良い、安定

した結果を与えていることが示される。

4.4 考察と検討 サンプリング密度関数の構成、サンプル生成について検討すると、Proposedでは主要破損モードのみに局所的重点サンプリング密度関数を構成し、構造破損に対して相対的重要度の高い破損モードに多くのサンプルを配分しているの、Proposedは破損領域の特性に適応して重点サンプリング密度関数を構成していると考えられる。また、サンプル有効利用率 q が他手法より大きい値となっていることから、Proposedのサンプルは破損領域に集中して生成されているといえる。

計算時間について検討すると、ProposedはMIS-PUDやDSより計算時間が少なく、破損モード数が多いほどその差が大きくなっている。これは、Proposedでは予備探索シミュレーションの主要破損モードの判別により、考慮する破損モード数を減少させているが、他手法ではすべての破損モードを考慮して、評価しているためである。特に、DSではサンプリングごとに、繰り返し計算によって各方向ベクトルサンプルに関する条件付き破損確率を算出する必要があり、破損モード数が多いほど計算時間が膨大になる傾向にある。したがって、予備探索シミュレーションの主要破損モードの判別により、計算時間を減少させる効果があるといえる。

適用性については、Proposedは種々の確率変数を有するシステム信頼性問題に対して、複雑な解析的手法や変数変換などを用いなくて対応することができ、簡便な構造信頼性評価法であるといえる。

5. 結 論

本研究では、適応重点サンプリング・シミュレーションに基づく骨組構造システムの信頼性評価法を提案した。数値計算例を用いて提案手法の有効性を検討し、得られた結果を以下に示す。

1. 予備探索シミュレーションで推定した各破損モードの破損確率の推定量により、各破損モードの構造破損に対する相対的重要度を決定し、主要破損モードを選別した。その結果、考慮する破損モード数が減少し、構造システムを簡略化して信頼性評価を行うことができた。
2. 各主要破損モードの破損領域に関する平均値と標準偏差の推定量をそれぞれ局所的重点サンプリング密度関数の1, 2次モーメントに適用し、これらを合成して破損領域の統計的特性に適応した多峰性重点サンプリング密度関数を構成した。その密度関数に基づいて生成されるサンプルは、構造

破損確率の推定の際に有効に活用された。

3. 数値計算例により、提案手法は正規・非正規のいずれの分布を有する骨組構造システムに対して、容易に評価することができ、相対的に少ない計算時間で、精度良い推定結果を与えることができることを示した。

References

- (1) Ang, A. H-S. and Tang, W. H., *Probability Concepts in Engineering Planning and Design, Vol. II, Decision Risk and Reliability*, (1984), 333-434, John Wiley & Sons
- (2) Bjerager, P., *Journal of Engineering Mechanics*, 114-8, (1988), 1285-1302
- (3) Bourgund, U. and Bucher, C. G., *Importance Sampling Procedure Using Design points -ISPUD-A User's Manual*, Report No.8, (1986), Institute of Engineering Mechanics, University of Innsbruck, Austria
- (4) Bucher, C. G., *Structural Safety*, 5, (1988), 119-126
- (5) Ditlevsen, O. and Madsen, H. O., *Structural Reliability Methods*, (1996), 57-147, John Wiley & Sons
- (6) Fu, G. and Moses, F., *Reliability and Optimization of Structural Systems, Proc. of 1st IFIP WG7.5 Working Conference*, (1987), 141-155, Aalborg
- (7) Harbitz, A., *Proc. of 4th International Conference on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering*, (1983), 825-836, Pitagora, Editrice
- (8) Matsumoto, M. and Nishimura, T., Mersenne Twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudorandom number generator (1998), Retrieved on March 22, 1999 from <http://www.math.keio.ac.jp/~matsumoto/mt.html>
- (9) Melchers, R. E., *Structural Safety*, 6, (1989), 65-66.
- (10) Melchers, R. E., *Reliability and Optimization of Structural Systems, Proc. of 4th IFIP WG7.5 Working Conference*, (1992), 1-42, Springer-Verlag
- (11) 小野 徹郎, 井戸田秀樹, 戸塚 明宏, 日本建築学会構造系論文報告集, 418, (1990), 71-79
- (12) 朴 永太, 奥田 昇也, 米澤 政昭, 機講論, No.994-2, (1999-11), 3-4
- (13) Rubinstein, R. Y., *Simulation and The Monte Carlo Method*, (1981), 114-157, John Wiley & Sons
- (14) Schuëller, G. I. and Stix, R., *Structural Safety*, 4, (1987), 293-309
- (15) 邵 曉文, 室津 義定, 機論, 62-603, A(1996), 228-234
- (16) 米澤 政昭, 室津 義定, 岡田 博雄, 岸 光男, 丹羽 一邦, 材料, 31-351, (1982), 1230-1236
- (17) Yonezawa, M., Okuda, S. and Park, Y. T., *Reliability and Optimization of Structural Systems, Proc. of 8th IFIP WG 7.5 Working Conference*, (1998), 337-344, The University of Michigan
- (18) 米澤 政昭, 奥田 昇也, 朴 永太, 機講論, No.98-5, (1998-11), 333-334