カルマンフィルタを用いた Gurson 材特性値の同定*

青木 繁^{*1}, 天谷 賢治^{*1}
須賀 一博^{*2}, 関戸 幸太^{*2}Identification of Gurson's Material Constants
by Using Kalman FilterShigeru AOKI, Kenji AMAYA^{*3},
Kazuhiro SUGA and Kouta SEKIDO^{*3} Department of Mechanical and Environmental Informatics, Tokyo Institute of Technology,
2-12-1 Ookayama, Meguro-ku, Tokyo, 152-8552 Japan

This paper presents a method for identifying the Gurson's material constants by inverse analysis. Firstly, in order to improve the accuracy, the measurement condition, such as geometries of specimens, locations of measurements and types of measurements, is optimized. This approach is based on the Kalman filter technique. The optimization is achieved by minimizing the maximum eigen value of a posteriori estimate error covariance matrix. Mathematically, this procedure is reduced to solve a combinational/discrete optimization problem. Secondly, the Gurson's material constants is estimated by using Kalman filter. A numerical identification is presented to demonstrate the validity and usefulness of proposed method.

Key Words: Inverse Problems, Parameter Identification, Kalman Filter, Finite Element Method, Optimization of Measurements

1. 緒 言

高靱性金属材料の破壊過程を解析する場合、ボイドの発生と成長を考慮に入れた Gurson の構成式⁽¹⁾がしばしば用いられる。合理的な解析を行うためにはこの構成式に含まれている材料特性値の決定が重要である。

特にボイドの発生に関する材料特性値においては、多くの時間と労力を要する方法に頼っているのが現状であり、簡便な決定法の開発が望まれている。著者らは材料の引張試験によって得られる測定量から有限要素法解析とカルマンフィルタ⁽²⁾⁽³⁾を用いて材料特性値を同定する手法を提唱した⁽⁴⁾。しかし、試験片の形状や測定の種類(ひずみ測定, 変位測定等), 測定位置等の測定条件は経験的に決定していた。また, 実際の材料特性値同定問題への適用に対して十分な考察がなされていなかった。

本研究では逆問題に対し有効な測定条件を決定する手法⁽⁵⁾を用いてできるだけ同定精度が高くなるように, 測定条件を最適化する。最適化された測定条件を用い, 実際問題への適用を考慮した同定手法を提案する。具体的には, 実際に測定を行うときに生じる測定誤差を定量的に考慮して, 推定値の共分散行列の最大固有

値が最小となる測定条件を探索し測定条件の最適化を行う。最適化された測定条件を使用しカルマンフィルタを用いて材料特性値の同定シミュレーションを行い, 材料特性値が精度良く同定できることを示す。

2. 最適化手法

2.1 基礎理論 一般に, 離散化された逆問題は式(1)のように表現される。

$$y = h(x) + w \quad (1)$$

ここで, y は m 次元観測量ベクトル, x が推定すべきシステムの状態を表す n 次元ベクトル, h は問題を表現する m 次元の非線形ベクトル関数である。 w は測定の誤差を表す m 次元確率変数ベクトルである。 w は x に関して独立な白色雑音で, 式(2)で表される正規分布に従うものと仮定する。

$$p(w) = N(\bar{w}, W) \quad (2)$$

$\bar{w}$ は w の平均値, W は w の共分散行列を表す。

$\bar{x}$ を観測量が得られる前(以下, 事前)の推定量, $\hat{x}$ を観測量が得られた後(以下, 事後)の推定量とする。それぞれの推定誤差は以下のように表せる。

$$\bar{e} = x - \bar{x} \quad (3)$$

$$\hat{e} = x - \hat{x} \quad (4)$$

* 原稿受付 2001年5月14日。

^{*1} 正員, 東京工業大学大学院情報理工学研究科(〒152-8552 東京都目黒区大岡山2-12-1)。^{*2} 東京工業大学大学院。

E-mail: kamaya@a.mei.titech.ac.jp

事前の測定量誤差の共分散行列 M は、式 (5) となる。

$$M = E[\bar{e} \bar{e}^t] \quad (5)$$

E は期待値を表す。 x の事前確率密度は、

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3|M|}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2}(x - \bar{x})^t M^{-1}(x - \bar{x}) \right\} \quad (6)$$

で表されると仮定する。 w の確率密度は、式 (7) となる。

$$p_2(w) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|W|}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2}(w - \bar{w})^t W^{-1}(w - \bar{w}) \right\} \quad (7)$$

x が与えられた時の y の条件付き確率密度は、式 (8) となる。

$$p_2(y|x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|W|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}r^t W^{-1}r \right\} \quad (8)$$

$$r = y - h(x) - \bar{w} \quad (9)$$

y の確率密度は $h(x)$ を x の周りで Taylor 展開して線形化すると、式 (10) となる。

$$p_3(y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|W + H M H^t|}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2}(y - \bar{y})^t (W + H M H^t)^{-1}(y - \bar{y}) \right\} \quad (10)$$

ただし、

$$\bar{y} = E[y] \quad (11)$$

であり、 H は h のヤコビアン行列で式 (12) で与えられる。

$$H = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}} \quad (12)$$

ここで、ベイズの定理

$$p(x|y) = \frac{p_1(x)p_2(y|x)}{p_3(y)} \quad (13)$$

を用いると、測定量 y が与えられた時の x の条件付き事後確率密度は

$$p(x|y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2|P|}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2}(x - \hat{x})^t P^{-1}(x - \hat{x}) \right\} \quad (14)$$

となる。 P および $\hat{x}$ は次式で与えられる。

$$\hat{x} = \bar{x} + P H^t W^{-1}(\bar{y} - h(\bar{x}) - \bar{w}) \quad (15)$$

$$P = (M^{-1} + H^t W^{-1} H)^{-1} \quad (16)$$

よって、事後推定量の誤差の共分散行列は、式 (17) となる。

$$P \equiv E[\hat{e} \hat{e}^t] = (M^{-1} + H^t W^{-1} H)^{-1} \quad (17)$$

2.2 測定条件の最適化 h が測定条件に依存する事を明確に示すために、式 (1) を式 (18) のように書き換える。 $\mathcal{M}$ は、測定条件を表す。

$$y_{\mathcal{M}} = h_{\mathcal{M}}(x) + w_{\mathcal{M}} \quad (18)$$

同様に、式 (17) は、 $\mathcal{M}$ を用いて以下のように表せる。

$$P_{\mathcal{M}} \equiv E[\hat{e}_{\mathcal{M}} \hat{e}_{\mathcal{M}}^t] = (M_{\mathcal{M}}^{-1} + H_{\mathcal{M}}^t W_{\mathcal{M}}^{-1} H_{\mathcal{M}})^{-1} \quad (19)$$

逆問題における推定の確からしさを出来るだけ高くするような測定条件を見つけることが本節での課題である。推定の確からしさは、事後推定量の誤差の共分散行列 $P_{\mathcal{M}}$ で表現される。推定量が二次元の場合 ($x = (x_1, x_2)^t$) について、 $P_{\mathcal{M}}$ と推定の確からしさとの関係を模式的に図 1 に示す。ここで、 $\lambda_{p1}, \lambda_{p2}$ は $P_{\mathcal{M}}$ の固有値であり、図 1 では $p(x|y)$ を $p = \text{一定}$ の面で切った時に出来る楕円の長半径と短半径である。固有値がより小さい程、より確からしい推定量が得られる。したがって、測定条件の最適化問題は式 (20) の組合せ最適化問題を解く事に帰着される。

$$\min_{arg=\mathcal{M}} (\lambda_{max}(P_{\mathcal{M}})) \quad (\mathcal{M} \subset U) \quad (20)$$

$\lambda_{max}(P_{\mathcal{M}})$ は、 $P_{\mathcal{M}}$ の固有値の最大値、 U は測定条件の候補を要素とする全体集合を表す。測定条件とは、どんな物理量を測定するのか、同じ物理量を測定するにしてもどの場所を測れば良いのかといった条件を指す。

Fig. 1 Probability density function $p(x|y)$

2.3 動的システムへの適用 観測量が動的にサンプリングされるシステムに適用することを考える。この場合、上述の手法はカルマンフィルタのアルゴリズムにうまく適応する。システム過程が状態量ベクトル x について、式 (21) の確率微分方程式に従うとする。

$$x_{k+1} = f_k(x_k) + v_k \quad (21)$$

添字 k は、時間ステップを表す。 v_k は、過程での雑音を表す確率ベクトルである。 $f(\cdot)$ は、時間ステップ k と $k+1$ を関係づける非線形関数である。

カルマンフィルタはフィードバック形式でシステム過程を推定する。まず、ある時間におけるシステムの状態を推定し、その後、観測量を用いてフィードバックを行う (図 2)。したがって、カルマンフィルタは二つの方程式に分類される。時間を更新する方程式と観測を更新する方程式である。時間を更新する方程式は次の時間での状態の事前推定量を得るために現在の状態量と事後推定誤差を時間方向にすすめる。観測を更新する方程式はフィードバックに対応している。すなわち、事前推定量に新しく観測された観測量の情報を組み込むことで、事前推定量を修正し、事後推定量を得る。また、時間を更新する方程式は予測方程式、観測を更新する方程式は補正方程式と考える事が出来る。実際、最終的な推定アルゴリズムは図 2 で表される数値問題を解く予測-補正アルゴリズムに似ている。

Fig. 2 Ongoing discrete kalman filter cycle

時間の更新を行うための支配方程式は式 (22)(23) 表現される。ただし、 $F_k = \partial f_k / \partial x$, $\bar{v}_k$ は v_k の平均値を表す。

$$\bar{x}_{k+1} = f_k(\bar{x}_k) + \bar{v}_k \quad (22)$$

$$M_{k+1} = F_k P_k F_k^t + V_k \quad (23)$$

観測の更新を行うための支配方程式は式 (24)(25)(26) で表現される。 I は単位行列を表す。

$$K_k = M_k H_k^t (H_k M_k H_k^t + W_k)^{-1} \quad (24)$$

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + K_k (y_k - h_k(\bar{x}_k)) \quad (25)$$

$$P_k = (I - K_k H_k) M_k \quad (26)$$

また、式 (22)(23) によって、状態量ベクトルと推定の共分散行列がステップ k から $k+1$ へどのように更新されるかに注目されたい。

観測を更新するためには、まず、カルマンゲイン K_k を計算する。次に、観測により y_k を得て、式 (25) を用いて事後推定量を得る。最後に、式 (26) を用いて、事後推定量の誤差共分散行列を得る。時間と観測が更新

された都度、事後推定量は新しい事前推定量とされるか、あるいは事前推定量の予測に利用される。この再帰的な性質は、カルマンフィルタの魅力的な特徴であり、実際の実行に適している。

本最適化手法では、各時間ステップ k ごとに最適な測定条件を決定することが可能である。このことを明確に示すために、式 (24)(26) を次のように書き直しておく。

$$K_{\mathcal{M}k} = M_{\mathcal{M}k} H_{\mathcal{M}k}^t (H_{\mathcal{M}k} M_{\mathcal{M}k} H_{\mathcal{M}k}^t + W_{\mathcal{M}k})^{-1} \quad (27)$$

$$P_{\mathcal{M}k} = (I - K_{\mathcal{M}k} H_{\mathcal{M}k}) M_{\mathcal{M}k} \quad (28)$$

最適な測定条件は、様々な $P_{\mathcal{M}k}$ を計算し、それら最大固有値を評価することにより決定される。すなわち、以下の最適化問題⁽⁶⁾ を解くことにより決定される。

$$\min_{arg=\mathcal{M}} (\lambda_{max}(P_{\mathcal{M}k})) \quad (\mathcal{M} \subset U) \quad (29)$$

最適な測定条件が決定されたときの、状態量の事後推定量は、式 (30) で計算される。 $\mathcal{O}$ は最適な測定条件を表す。

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + K_{\mathcal{O}k} (y_{\mathcal{O}k} - h_{\mathcal{O}k}(\bar{x}_k)) \quad (30)$$

測定条件の最適化によって改善された推定アルゴリズムは図 3 で表現できる。

Fig. 3 Implementation of measurement optimization to kalman filter cycle

3. Gurson 材特性値の推定

3.1 Gurson の構成式 本節では、Gurson 材特性値の推定を行うための測定条件を最適化する。

Gurson の構成式における降伏曲面は式 (31) で与えられる⁽¹⁾。

$$\Phi = \frac{3}{2} \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{ij}}{\sigma_m^2} + 2f \cosh\left(\frac{1}{2} \frac{\sigma_{kk}}{\sigma_m}\right) - (1 + f^2) = 0 \quad (31)$$

ここで、 σ'_{ij} は巨視的偏差応力、 σ_m は母材の (微視的) 相当応力、 f はボイドの体積率である。式 (31) は $f = 0$ とすると Mises 材の降伏条件に一致する。

空孔の体積率 f は空孔の発生と成長によって増加するので次式が成立すると仮定する。

$$\dot{f} = \dot{f}_{growth} + \dot{f}_{nucleation} \quad (32)$$

ただし, $()$ は時間微分を表す. $\dot{f}_{growth}$ はボイドの成長による f の増加率であり, D_{ij}^p を多孔質材料の変形速度の塑性成分とすると, 次式から計算される。

$$\dot{f}_{growth} = (1-f)D_{kk}^p \quad (33)$$

一方, $\dot{f}_{nucleation}$ は, Needman と Tvergaard の仮定⁽⁷⁾を採用し, 塑性ひずみ ε_m^p および塑性ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_m^p$ に依存するとして式 (34) で表されるとする。

$$\dot{f}_{nucleation} = \frac{f_N}{S_N \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(\varepsilon_m^p - \varepsilon_N)^2}{2S_N^2} \right\} \dot{\varepsilon}_m^p \quad (34)$$

ε_N, S_N, f_N が同定すべき材料特性値である。

3.2 カルマンフィルタによる推定 引張試験片上のある点の測定量を入力としてカルマンフィルタを用いて ε_N, S_N, f_N を同定する逆解析を試みる⁽⁴⁾。以下の x_k を状態量とする。

$$x_k \equiv Q(\varepsilon_N, S_N, f_N)^t \quad (35)$$

ここで, Q は材料特性値の正規化行列であり, 本研究では単位行列とした。試験片の測定量を y_{Mk} を観測量とする非線形システムを考え, 次の状態方程式および観測方程式が成立するとする。 w_M は測定の誤差ベクトル (既知) である。

$$x_{k+1} = x_k \quad (36)$$

$$y_{Mk} = h_{Mk}(x_k) + w_{Mk} \quad (37)$$

下添字 k は, 変形の k 段階目を表す。カルマンフィルタのアルゴリズムに従って反復計算を行うことにより x_k の推定量 $\hat{x}_k$ が得られる。

3.3 最適測定条件の候補 試験片の数値モデルとして切欠きを有する丸棒試験片および丸棒試験片を想定した (図 4)。いずれも鋼製を想定し, 以下に示す材料特性値を用いた。

$$\begin{cases} \text{ヤング率} & : E = 200.0 \text{ [GPa]} \\ \text{ポアソン比} & : \nu = 0.333 \\ \text{初期ボイド率} & : f_0 = 0 \end{cases}$$

測定の候補を以下に示す。 $()$ 内の数字は測定候補数を表す。いずれも静的引張試験時におけるものとする。

Fig. 4 Geometry of specimen

測定位置は図 5 に示す。

$$\begin{cases} \text{軸方向ひずみ} & : \varepsilon_z (\text{丸棒:49, 切欠き付:35}) \\ \text{半径方向ひずみ} & : \varepsilon_\theta (\text{丸棒:49, 切欠き付:35}) \\ \text{軸方向変位} & : u_z (\text{丸棒:49, 切欠き付:35}) \\ \text{半径方向変位} & : u_r (\text{丸棒:49, 切欠き付:36}) \\ \text{引張力} & : F_1, F_2 \end{cases}$$

実際の測定精度を考慮し測定誤差の標準偏差を以下のように設定した。

$$\begin{cases} \text{変位測定} & : 5.0 \text{ } [\mu\text{m}] \\ \text{ひずみ測定} & : 1.0 \times 10^{-5} \\ \text{引張力測定} & : 4.0 \text{ [N]} \end{cases}$$

本最適化例では, 測定 (測定位置など) はカルマンフィルタのステップが更新されても変化しないものとした。すなわち, 引張試験中は測定条件は変化せず一定という条件のもとで最も有効な測定条件を探索する最適化問題を解いた。最適化を行うにあたって必要なのは, 初期推定量 $\bar{x}_0$, 測定誤差 W_{Mk} , 初期推定誤差 M_{M0} , H_{Mk} である。 H_{Mk} を計算するために有限要素法解析を行った。有限要素法解析により, 切欠き付丸棒試験片および丸棒試験片の静的引張試験時の挙動を考察した。解析には, 解析コード ABAQUS⁽⁸⁾⁽⁹⁾ を用い変位制御で行った。対称性から試験片の 1/4 を軸対称要素を用いてメッシュ分割し解析した。メッシュ分割および最適測定条件の候補を図 5 に示す。 H_{Mk} は次式を用いて求めた。

$$H_{Mk} \equiv \frac{\partial h_{Mk}}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}_k} \approx \frac{h_{Mk}(\bar{x}_k + \Delta x_k) - h_{Mk}(\bar{x}_k)}{\Delta x} \quad (38)$$

事前推定量に対して良好な先験情報が得られないため

$$\bar{x}_k = (\varepsilon_N, S_N, f_N)^t = (0.10, 0.06, 0.04)^t \quad (39)$$

$$\Delta x = (\Delta \varepsilon_N, \Delta S_N, \Delta f_N)^t = (0.05, 0.03, 0.01)^t \quad (40)$$

とし測定の一最適化を行った. 有限要素法解析は, 1 ステップごとに平滑な丸棒では $0.20 \times 10^{-3} [m]$, 切欠き付丸棒では $0.03 \times 10^{-3} [m]$ だけ変位を増加させ測定値を得た. 総ステップ数は 12 である.

横軸に測定の構成数, 縦軸にカルマンフィルタの最終ステップにおける $\lambda_{\max}(P_{Mk})$ の最小値をとったグラフを図 6 に示す. また, 有効な測定を順位付けした結果を表 1 に示す. 表 1 中の測定位置 a, b, c は図 7 に示されている. なお, 引張試験時の丸棒のくびれが発生するように, メッシュ形状に幾何学的な初期不整を加えた. この不整による影響が大きい下から 3 要素における測定を最適化候補から除外した.

これらの結果から, 次のことが分かる. 測定が一つのみ許される場合には, 丸棒試験片の引張力 F_2 が最適の測定となる. 測定が二つまで許される場合は, 引張力 F_2 に加え, 切欠き付き丸棒試験片の引張力 F_1 を測定することにより, $\lambda_{\max}(P_{Mk})$ の値が大きく減少し, 推定の精度が大きく向上する. 測定数が 3 の場合には $\lambda_{\max}(P_{Mk})$ の値は横ばいとなり, 推定精度の大きな向上は望めない. また, a, b, c 付近ならば, a, b, c にかえて, 他の位置で ε_θ を測定しても $\lambda_{\max}(P_{Mk})$ は大きく変化しない. すなわち, a, b, c 付近の ε_θ ならば, どこを測定しても推定精度に大差が生じないことが分かった. 以上から, F_1, F_2 を測定する場合が最も効率良く, また高精度で材料特性値を推定することが出来ることがわかる.

3.4 材料特性値の同定例 F_1, F_2 を測定量として材料特性値を同定するシミュレーションを行った. カルマンフィルタの初期条件として以下に示す値を設定した. 測定量 y_k は有限要素法で得られた結果に正規分布に従う測定誤差を加えることにより模擬した. P_{M0} と W_{Mk} はそれぞれ式 (42) と式 (43) で与えられると仮定した.

$$y_{Mk} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \quad (41)$$

$$P_{M0} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \quad (42)$$

$$W_{Mk} = \begin{pmatrix} 16.0 & 0 \\ 0 & 16.0 \end{pmatrix} \quad (43)$$

推定可能範囲を以下のように設定した.

$$\begin{cases} 0.05 \leq \varepsilon_N \leq 0.35 \\ 0.06 \leq S_N \leq 0.18 \\ 0.01 \leq f_N \leq 0.08 \end{cases} \quad (44)$$

Fig. 5 Location of candidates points

Fig. 6 Minimum of $\lambda_{\max}(P_{Mk})$ vs number of measurements

Table 1 Best ranking of measurements

Ranking	Type	Specimen	Location
1	F_2	smooth	-
2	F_1	notched	-
3	ε_θ	smooth	a
4	ε_θ	smooth	b
5	ε_θ	smooth	c

Fig. 7 Location of optimized measurements

本研究では、 $(\varepsilon_N, S_N, f_N)$ の組を 27 点とり順解析により得られた結果から、各点を二次のラグランジュ補間で内挿した曲面を作り、 $h_{Mk}(\bar{x}_k)$ および H_{Mk} を計算した。

次に、有効性を検証するため、正解を $\varepsilon_N = 0.2, S_N = 0.12, f_N = 0.045$ と設定し、同定シミュレーションを行った。良好な先験情報が得られないため、 x の初期値 $\bar{x}_0$ としてラグランジュ補間の範囲内で各特性値の組合せでできる格子点 ($11 \times 11 \times 11 = 1331$ 点) を選んで設定しカルマンフィルタを用いて推定を行った。設定した補間面内に収束した点のみ有効な収束点とした。 ε_N の場合について収束点の分布の様子を図 8 に示す。 ∇ で正解を示している。解を設定した付近に収束点のピークがあることがわかる。 S_N および f_N についても同様の結果が得られた。

次に、最適な測定条件下で、 $\lambda_{\max}(P_{Mk})$ が測定を重ねるごとに変化する様子を考察した。横軸に引張試験時の変位を増加させて行った測定回数、縦軸に $\lambda_{\max}(P_{Mk})$ をとったグラフを図 9 に示す。この図から、要求する推定精度によって、推定に必要な測定回数が予測でき効率の良い測定・同定が行える。

4. 結 言

本論文では、Gurson 材特性値を簡単な実験の結果から同定する逆解析の精度を向上させる方法を提案した。まず、測定条件 (測定物理量、測定位置など) の最適化を行った。すなわち、各々の測定の精度を考慮に入れ推定量の共分散行列 P_{Mk} の最大固有値 $\lambda_{\max}(P_{Mk})$ が最小となるような測定の組合せを見出した。つぎに、最適化された測定条件を用い、カルマンフィルタと有限要素法を用いて材料特性値を同定するシミュレーションを行った。その結果、通常の引張試験機で 2 本の平滑および切欠き付丸棒試験片の引張力を測定すれば、各材料特性値が精度よく同定できる事を示し、本手法の有効性を確認した。

文 献

- (1) 富田佳宏：数値弾塑性力学 有限要素シミュレーション-基礎と応用，養賢堂 (1990)
- (2) 片山 徹：応用カルマンフィルタ，朝倉書店 (1983)
- (3) 有本卓：カルマンフィルタ，産業図書 (1977)
- (4) 青木 繁，天谷 賢治，佐橋 真，中村 俊雄：Gurson 材特性値の同定と界面き裂からの延性破壊の考察，材料 45 巻 3 号，305-309 (1996)

Fig. 8 Number of converged points (ε_N)

Fig. 9 Variation of covariance in each measurement

- (5) Kenji AMAYA and Shigeru AOKI : Optimization of Measurements for Inverse Problem, Proceedings of 3rd Int. Conf. on Inverse Problems in analysis 1999-junengineering, June 13-18, 1999, Port Ludlow, WA, USA, 1-6 (1999)
- (6) 茨木俊秀，福島雅夫：最適化の手法，共立出版 (1993)
- (7) A.Needleman and V.Tvergaard. : A Numerical Study of Void Distribution Effects on Dynamic, Ductile Crack Growth. (1989)
- (8) Hibbit, Karlsson & Sorensen Inc. : ABAQUS / Standard User's Manual Volume I, II (1995)
- (9) Hibbit, Karlsson & Sorensen Inc. : ABAQUS / Standard Example Problems Manual Volume II (1995)
- (10) A.Needleman and V.Tvergaard. : AN ANALYSIS OF DUCTILE RUPTURE IN NOTCHED BARS. (1983)