ボルト締結体の熱および力学挙動の有限要素解析*

福岡 俊道^{*1}, 許 全 托^{*2}, 吉田 健太郎^{*3}

Finite Element Analysis of the Thermal and Mechanical Behaviors of Bolted Joint

Toshimichi FUKUOKA^{*4}, Jun HSU and Kentaro YOSHIDA

^{**}Department of Ocean Electro-Mechanical Engineering, Kobe University of Mercantile Marine,
5-1-1 Fukaeminami, Higashinada-ku, Kobe-shi, Hyogo, 658-0022 Japan

A bolted joint is frequently used under thermal load in practical applications, such as internal combustion engines, steam and gas turbines, pressure vessels, etc. In order to accurately evaluate the thermal stresses thus produced, the effects of thermal contact resistance at the interface and the heat flow through small gaps, which exist around the objective bolted joint, must be taken into account. An empirical equation, which can compute the thermal contact coefficient at the interface for various contact conditions, has been presented in the previous paper. In this study, a simple equation for evaluating apparent thermal contact coefficient is proposed, which can calculate the amounts of heat flow through small gaps. By incorporating the effects of such contact resistances, i.e., in case of two planes being in contact or with small gaps, into the finite element formulation, a numerical approach is proposed, which can elucidate how the bolt stress is varied with time under thermal load. It is shown that among various factors, coefficient of linear expansion has dominant effects on the variations of bolt stress.

Key Words: Fixing Element, Bolted Joint, Transient Temperature Field, Thermal Contact Resistance, Contact Problem, FEM

1. はじめに

構造物が熱負荷を受けた場合に発生する温度場、応力場を高い精度で評価することは、工学上重要な課題である。一般に機械構造物は多数の部品から構成されており、それらの界面において温度分布は不連続となる。このような界面における温度降下は接触熱抵抗の大きさから求められる。しかしながら、さまざまな条件に対して接触熱抵抗の値を正確に評価することはかなり困難である⁽¹⁻⁴⁾。最近著者らは、接触熱抵抗を実用的に有効な精度で評価できる実験式を提案した⁽⁵⁾。その式を有限要素法に組み込むことにより、接触構造物が熱負荷を受けた場合の温度場ならびに応力場を従来

より高い精度で求めることが期待される。一方、澤らは熱伝導方程式の厳密解と三次元弾性論、および差分法を組み合わせることにより、有効な研究成果を発表している^(6,7)。接触構造物の温度場を評価する場合、界面の面圧が高く表面あらがが小さいと接触熱抵抗の影響を無視しても実用上十分な解が得られると考えられる。しかしながら、ボルトで締結された構造物では各部の面圧が広い範囲で変化するので、接触熱抵抗の影響はかなり大きいと推察される。さらに、ボルト締結体は各部に小さなすきまが存在しており、その部分の熱の流れも無視できない⁽⁸⁾。すなわち、微小なすきまを隔てた二面間は完全に断熱されているのではなく、ある大きさの熱抵抗が存在する接触面と等価な状態にあると考えることができる。

そこで本研究では、まず界面に微小なすきまが存在する場合の接触熱抵抗の評価式を提案し、その有効性を実験により確かめる。つぎに、その式を過去の研究で提案している接触熱伝達率の計算式⁽⁵⁾とともに有限

* 原稿受付 2001 年 3 月 19 日。

^{*1} 正員, 神戸商船大学商船学部(〒658-0022 神戸市東灘区深江南町5-1-1)。

^{*2} 正員, エンジニア・ジャパン(株)(〒222-0033 横浜市港北区新横浜2-5-5)。

^{*3} 学生員, 神戸商船大学大学院。

E-mail: fukuoka@cc.kshosen.ac.jp

Fig. 1 Heat flow through a bolted joint under thermal load

要素法に組み込む。その結果得られた解析プログラムを用いることにより、ボルト締結体が熱負荷を受ける場合の温度場と応力場の基本的な特性を体系的に明らかにすることを目的としている。

2. 熱負荷を受けるボルト締結体

ボルト締結体はさまざまな形態の熱負荷を受ける。積極的に熱を与える例としては、大きな呼び径のボルトの締付けに用いられる熱膨張法があり、その締め付け過程を有限要素法を用いて評価できる手法についてはすでに提案している^(8,9)。しかしながら、一般に接触構造物が熱負荷を受けるとボルトの締め付け力が変化し、結果として強度上の問題を引き起こすことが多いようである。

図1は、ボルト締結体が熱負荷を受けた場合の熱の流れを模式的に示したものである。この場合、温度場を高い精度で評価するためには、ねじ面、ナット座面、ボルト頭部座面および被締結体の界面における接触熱抵抗の影響を考慮する必要がある。また、ボルト円筒部表面と被締結体の間、およびはめあいねじ部の遊び側フランクには小さなすきまが存在しており、その部分の熱の流れも無視できないと考えられる。すなわち、熱負荷を受けるボルト締結体の温度場を解析する場合、ある大きさの面圧で接触している界面の接触熱抵抗と、すきまの存在に起因する熱抵抗を考慮する必要があるといえる。前者については、接触熱抵抗の逆数である接触熱伝達率 h_c [$W/(m^2K)$] に関して、以下に示す評価式を提案している⁽⁵⁾。

$$h_c = 10^5 \left[c_1 \lambda \frac{\left(\frac{p}{Hv} \right)^{2/3}}{Ra_t^m} + \frac{c_2}{Ra_t^n} \right] \quad (1)$$

$$Ra_t = Ra_1 + Ra_2$$

$$c_1 = 0.06 \in [0.055, 0.065]$$

$$c_2 = 0.09 \in [0.085, 0.095]$$

$$m = 0.8 \in [0.8, 0.9]$$

$$n = 0.7 \in [0.7, 0.8]$$

上式は炭素鋼、ステンレス鋼、アルミニウム合金など広く使用されている工業材料に対して有効である。ここで、 λ は熱伝導率 [$W/(mK)$]、 p は接触面圧力 (MPa)、 Hv はビッカース硬さ、 Ra_1, Ra_2 は両表面の中心線平均あらさ (μm)である。また、 c_1, c_2, m, n は定数で、式中に示した範囲でばらつく。なお、異種材料から構成される接触面における熱抵抗については、評価式を確立するには至っていないが、上記の材料を組み合わせた場合の実験結果を報告している⁽¹⁰⁾。

さらに本研究では、微小なすきまを流れる熱量の評価に有効な見かけの接触熱伝達率 h_e の評価式を提案する。

3. 微小なすきまに起因する熱抵抗

3.1 ボルト締結体における微小なすきまと熱流れ式(1)で示した接触熱伝達率 h_c の評価式は、接触面圧 p が零、すなわち軽く接触している場合にも適用可能である。一方ボルト締結体には、ボルト円筒部表面と被締結体の間、すなわちボルト穴部分に最大3mm程度のすきまが存在し、はめあいねじ部の遊び側フランクにはさらに小さなすきまが存在する。ボルト締結体の熱および力学的挙動に対して、それらのすきまを通過する熱の影響は必ずしも小さくないと考えられる。とくにボルト締結体のグリップ長さが大きい場合、ボルト円筒部の表面積が大きくなり、ボルト穴を通して伝わる熱の影響は無視できなくなると考えられる。

本研究では、温度差のある2枚の板をわずかに離して設置し、対応する表面の間を流れる熱量を測定することによって、微小なすきまに起因する「見かけの接触熱伝達率 h_e 」を定量的に評価する。

3.2 実験方法 見かけの接触熱伝達率の測定実験は、大きさが等しい2枚の円板形の試験片を用いて実施する。図2に示したように、一方の円板は固定されており、外側の面に加熱源である出力60Wのシリコンラバーヒータが装着されている。もう一方の円板は、マイクロメータの機構を利用することによって平行に移動できる。その結果、2枚の円板のすきまの大きさを細かく調整することが可能となっている。実験は、試験片の表面熱伝達率の測定実験と界面における見かけの接触熱伝達率 h_e の測定実験から構成される。

まず予備実験では、シリコンラバーヒータを装着した試験片1のみを用いて、円板表面の対流熱伝達率 h_{cv}

Fig. 2 Test setup for measuring apparent thermal contact coefficient

を測定する。試験片の表面と側面には放射率0.93の黒体スプレーを塗布し、加熱開始後十分な時間が経過して試験片全体が様な温度になったことを確認した後、赤外線サーモグラフィーを用いて各面の温度を測定する。その結果得られた対流熱伝達率 h_{cv} は、およそ $25 \text{ W/m}^2\text{K}$ であった。なお、試験片の表面と側面の温度差はほとんど無視できる程度であった。

つぎに、2枚の試験片を図2に示したように配置して、見かけの接触熱伝達率 h_e を測定する。試験片1から試験片2へ伝わる熱は、すきまから大気中へ逃げるものを除いて試験片2に伝わる。その場合界面を通過する熱量 q は、見かけの接触熱伝達率 h_e と2つの面の温度差 ΔT の積に等しい。ここで、試験片1と2の対応する表面の温度は予備実験と同じ方法で測定される。また界面を通過する熱量の大きさは、試験片2における熱量バランスを表す式に、予備実験で求めた試験片の表面熱伝達率 h_{cv} を代入して算出する。以上の手順によって、見かけの接触熱伝達率 h_e に対するすきまの影響を定量的に評価することが可能となる。

3.3 見かけの接触熱伝達率の評価式 図3は、実験から求めた見かけの接触熱伝達率 h_e とすきま δ の関係を示している。すきま δ が大きくなるにつれて、急激に h_e が小さくなっている。その傾向は、すきまの大きさが 0.5 mm より小さい範囲で顕著である。つぎに、あるすきま δ に対して見かけの熱伝達率 h_e を求める簡易式を提案する。前報では、わずかなすきまが存在すると空気の熱伝導と対応する表面間のふく射により熱が伝わると仮定したが⁽⁸⁾、ここではさらに対流熱伝達を加えて3つの伝熱機構が複合した状態で熱が移動すると考える。その結果、見かけの接触熱伝達率 h_e を以下のように仮定する。

Fig. 3 Relationships between apparent thermal contact coefficient and gap size

$$h_e = \frac{\lambda_a}{\delta} + h_{cv} + h_r \quad (2)$$

ここで λ_a は空気の熱伝導率を表している。対流熱伝達率 h_{cv} は、予備実験の結果から $25 \text{ W/m}^2\text{K}$ とする。 h_r はふく射熱伝達率で次式で表される⁽¹¹⁾。

$$h_r = \frac{\sigma (T_1^2 + T_2^2) (T_1 + T_2)}{1/\varepsilon_1 + (A_1/A_2)(1/\varepsilon_2 - 1)} \quad (3)$$

上式の σ はStefan-Boltzmann定数、 ε_1 と ε_2 はそれぞれの物体の放射率で、ここでは0.32とした⁽¹²⁾。図3は、式(2)から計算された h_e と実験値を比較したものであり、計算値と実験値はかなりよく一致している。したがって、式(2)は微小なすきまが存在する界面間の熱抵抗の評価式として有効であると考えられる。また実用上の問題から、式(2)をすきまが非常に小さな箇所に適用する場合、式(1)を用いて得られる接触面圧力が零の場合の接触熱伝達率 h_c の値を見かけの熱伝達率 h_e の上限とする。

4. 接触熱抵抗を考慮した温度場と応力場の解析

4.1 温度場と応力場の相互作用 接触面を持つ構造物が非定常熱負荷を受ける場合、接触面の熱抵抗の大きさが構造物の熱および力学的挙動に大きく影響する。例えば構造物がボルトで締め付けられている場合、温度場と応力場は以下のようなメカニズムで相互に影響する。通常構造物の組立は室温で実施され、その際種々の締め付け方法によってボルトに所定の軸力が与えられる。このような構造物が熱負荷を受けると構造物全体が温度上昇によって膨張する。その場合、締結要素であるボルト・ナット系と被締結体の伸びが同じでない限り、温度上昇に伴ってボルト軸力が変化し、その結果接触面の面圧が変化する。接触面面圧が変化すると、式(1)で示した接触熱伝達率 h_c の値が変化する。

Fig. 4 Finite element model of a bolted joint (M16)

また、接触していた面が離隔したりすきまの大きさが変化すると、式(2)の見かけの接触熱伝達率 h_e が変化する。そのことが再び温度場と応力場に影響する、というような現象が構造物を加熱あるいは冷却する過程で起こっていると推察される。

4.2 接触熱抵抗の扱い方 接触面の熱抵抗が温度場に及ぼす影響は、接触熱伝達率 h_c と見かけの接触熱伝達率 h_e で表される熱の流れを有限要素法に組み込むことによって評価できる。これらの熱の流れは、単位面積あたりの伝熱量を $q(W/m^2)$ として、以下に示したように対流熱伝達境界と同様の手順で定式化する。

$$q = h_c(T_a - T_b) \quad \text{or} \quad q = h_e(T_a - T_b) \quad (4)$$

ここで、 T_a と T_b は界面の対応する節点の温度を表している。またすきま δ が非常に小さい場合、式(2)から明らかなように h_e の値が極めて大きく評価されることがある。実際は、その値よりも面と面が軽く接触している場合の接触熱伝達率 h_c の方が大きいと考えられるので、式(1)から面圧 p が零の場合の h_c を求めて h_e を計算する場合の上限値とする。

4.3 解析モデルと解析手順 接触構造物が非定常熱負荷を受けた場合、4.1節で述べたように温度場と応力場は相互に影響して非常に複雑な挙動を示す。その場合、構造物の形状以外に多くの影響因子が存在するが、代表的なものとして材料の熱定数、接触面の表面あらさ、どのような形態の熱負荷を受けているかなどが挙げられる。本研究では、ボルト締結体が非定常熱負荷を受けた場合の基本的な特性を明らかにすることを目的としているので、簡単な形状のボルト締結体を解析の対象とする。図4は解析に用いた有限要素モデルを示しており、1枚の厚板が1本のボルトで締め付けられた場合を扱う。ねじ山はそろばん玉形状であると仮定して、温度場、応力場のいずれも軸対称問題

Table 1 Material properties of the objective bolted joint

Materials	α (1/K)	λ (W/mK)	ρ (kg/m ³)	c (J/kgK)	Hv	E (GPa)	ν
S45C	12×10^{-6}	40	7800	466	247	200	0.3
SUS304	15×10^{-6}	16.5	7800	511	225	221	0.3
A2024	23×10^{-6}	120	2700	880	125	74.6	0.3

として解析する。

非定常温度場解析における増分計算の時間ステップ Δt は10秒で、各ステップで応力場も同時に計算することによって、各部の接触面圧とそれに対応した接触熱伝達率 h_c の値を更新する。なお、ボルト穴まわりと遊びねじ側フランクにおける見かけの接触熱伝達率 h_e は一定としている。応力場については、従来から接触構造物の力学特性の解明に用いている手法を適用して弾性接触問題として解析する⁽¹³⁾。ある時間 t における応力場は、温度変化により生じた熱ひずみから計算される。時間 t において与える熱ひずみ $\{\varepsilon_t\}$ の大きさは、そのステップまでの熱ひずみ増分の総和として求められる。

$$\{\varepsilon_t\} = \sum_{i=1}^j [\alpha(\{\theta_i\} - \{\theta_{i-1}\})] \quad (5)$$

ここで α は線膨張係数、 j は時間 t までの計算ステップ数である。また θ_i 、 θ_{i-1} は現ステップと前ステップにおける節点温度である。

4.4 解析条件 解析の対象としたボルト締結体は、M16の並目ねじのボルトで締め付けられており、グリップ長さ64mm、被締結体の外径96mm、ボルト穴直径は19mmである。種々の因子の影響を体系的に評価するために、標準解析条件を以下のように設定する。初期ボルト軸応力 $\sigma_i=50MPa$ 、接触面の中心線平均あらさ $Ra=3.2\mu m$ 、ボルト締結体表面の熱伝達率は予備実験の結果から $35W/m^2K$ とする。すきまについては、ボルト穴部分が1.5mm、はめあいねじ部の遊び側フランクは0.1mmとする。加熱条件は、図4に示したように被締結体の側面から一様加熱される場合を対象とする。熱源の強さは100Wで、後述のシリコンラバーヒータを用いた実験で求められる加熱効率にあわせて、そのうちの96%が被締結体に与えられるとした。ここで96%という加熱効率は、被締結体のみを用いた加熱実験で測定された各部の温度と、FEM解析で得られた温度が一致するように設定した値である。ボルト締結体の材質は、機械構造用炭素鋼S45Cを標準とし、ステンレス鋼SUS304、アルミニウム合金A2024についても解析する。表1は解析に使用した材料定数を示している。なお材料定数の温度依存性は考慮していない。接触面の摩擦係数は、すべての面において0.2と仮定する。

Fig. 5 Temperature distributions of bolted joint

Fig. 6 Variations of bolt stress for selected materials

5. 解析結果

5-1 ボルト締結体の温度分布 図5は、ボルト締結体の材料の違いによって、温度分布パターンがどのように変化するかを示したものである。解析はいずれも標準条件で実施されており、加熱開始後60分経過したときの温度分布を示している。明らかに、熱伝導率の高い材料ほどボルトの温度が高く、ボルト締結体全体として温度差が小さくなっている。すなわち、被締結体に与えられた熱はナット座面、ねじ面、あるいはボルト頭部座面からボルトに流入して温度を上昇させるが、熱伝導率の高い材料ほど物体内部を熱が伝わりやすく、式(1)から明らかなように界面の接触熱伝達率 h_c が大きくなるので、結果としてボルトの温度が高くなっていると考えられる。

5-2 ボルト軸応力の時間変化 図6は、加熱時間の経過とともにボルト軸応力がどのように変化するかを示したものである。たて軸は、ある時間におけるボルト軸応力 σ_b を初期軸応力 σ_i で除して無次元化したものである。アルミニウム合金、炭素鋼、ステンレス鋼の順に初期軸応力からの変化が大きくなっている。すなわち、図5に示した温度分布からも明らかなように、熱伝導率の低い材料ほどボルトまで熱が伝わりにくく、

Fig. 7 Effects of coefficient of linear expansion

Fig. 8 Effects of surface roughness

Fig. 9 Effects of the magnitude of supplied heat

ボルト・ナット系に対して被締結体の伸びが相対的に大きくなり、結果としてボルト軸応力が高くなると考えられる。

以下、材料を炭素鋼に固定して種々の因子の影響を検討する。まず線膨張係数 α は、表1に示したように材料によって大きく異なるが、同じ炭素鋼であっても製造工程の違い等によりわずかな違いが生じると考え

られる。図7では、表1に示した炭素鋼の標準的な線膨張係数 $\alpha=12\times 10^{-6}$ に対して、被締結体についてのみ α を仮に 11×10^{-6} 、 13×10^{-6} と変化した場合の結果を示している。ボルト・ナット系と被締結体の線膨張係数がわずかに違うだけで、非常に特徴的な挙動を示している。図から、ボルト軸応力はいずれの場合も加熱開始後ある時間までは増加しているが、被締結体の線膨張係数が相対的に小さい場合、その後減少に転じている。すなわち、加熱開始当初は被締結体が膨張するためにボルト軸応力が高くなるが、その後ボルト・ナット系まで熱が伝わり始めると、その部分の線膨張係数が大きいために伸びやすく、結果としてボルト軸応力が低下していると考えられる。以上示したような線膨張係数のわずかな違いがボルト締結体の力学挙動に大きく影響するという結果は、接触構造物が通常同じ材質の部材や機械要素から構成されている点を考慮すると、実用的に重要な知見であるといえる。

つぎに表面あらさの影響を検討する。図8では、すべての接触面の中心線平均あらさ Ra が同じであると仮定している。 Ra が大きくなると、接触熱伝達率 h_c が低下してボルト・ナット系へ熱が伝わりにくくなり、その結果ボルト軸応力が増加しやすいといえる。図9は与えた熱量の大きさの影響を示している。被締結体に与える熱量が増加した割合に応じて、ボルト軸応力-加熱時間曲線はほぼ等しい間隔で上側に移動している。

以上の結果、ボルト締結体が非定常熱負荷を受けた場合、図6に示したように材質の影響も顕著であるが、実機の設計と現場での施工の観点から注意すべき因子は線膨張係数であると考えられる。すなわち、ボルト・ナット系と被締結体の材料が同じであっても、線膨張係数がわずかに異なるだけでボルト軸力が大きく変化する可能性が高い点は注意すべきである。

6. ボルト締結体の加熱実験

6.1 実験方法 加熱実験は、炭素鋼S45Cで製作したボルト締結体を用いて、解析モデルと同じ形状、条件で実施する。ボルト締結体の加熱には、磁石によって被締結体に装着が可能なシリコンラバーヒータを用いる。ヒータの出力は100Wで、すでに述べたようにこのうち96%が被締結体に与えられる。ここで、ボルト締結体各部の温度は熱電対によって測定する。測定の対象としたのは、ボルト円筒部表面とナット表面である。またボルトの軸方向ひずみは、高温ひずみゲージを用いて2アクティブゲージ法により測定する。なお、ボルトの温度上昇によって発生する見かけのひずみについては、予備実験でボルト円筒部温度との関係を求

Fig. 10 Variations of temperatures of selected points with time

Fig. 11 Variations of axial bolt stresses with time (Effects of initial bolt stress)

めておき、実際に熱負荷を与えたときの軸方向ひずみの測定値から差し引いてボルト軸応力を算出する。

6.2 実験結果と解析結果の比較 図10は、ボルト締結体各部温度の時間変化について実験値と解析値を比較したものである。ボルト円筒部、ナット表面の温度は近い値となっているが、いずれの場合も実験値と解析値は比較的良好に一致しているといえる。つぎに、ボルト軸応力の時間変化について、実験値と解析値を比較する。図11は、初期ボルト軸応力 σ_i をパラメータとして、ボルト軸応力 σ_b の時間変化を示したものである。 σ_i が大きいほどボルト軸応力の変化が小さくなっている、その理由としては、 σ_i が大きくなると各接触面の面圧が高くなり、その結果接触熱伝達率 h_c が大きくなることによると考えられる。図から明らかなように、ボルト軸応力は加熱を開始してある短い時間の後にピーク値を示し、その後減少している。その理由としては、実験に使用したボルト締結体を構成する材料の中で、被締結体の線膨張係数 α が相対的に小さいた

めであると推察される。このような現象は、すでに図7のFEM解析において確認している。以上の点を考慮して、図11ではボルト・ナット系の線膨張係数を 12×10^{-6} 、被締結体の線膨張係数を 11.5×10^{-6} と仮定して得られた結果を示している。初期軸応力が高い場合にやや差が大きくなっているが、解析値と実験値は比較的近い値となっている。したがって、本研究で提案した解析手法は実用的な観点から妥当であると考えられる。

7. 結 言

(1) ボルト締結体为非定常熱負荷を受けた場合の熱および力学挙動について、接触面の熱抵抗の影響を考慮することによって実用的に有効な精度で評価できる数値解析手法を提案した。

(2) わずかなすきまの存在により発生する熱抵抗について、見かけの接触熱伝達率として定量的に評価できる式を提案し、実験によってその妥当性を確認した。

(3) ボルト・ナット系と被締結体の材料が同じであっても、両者の線膨張係数がわずかに異なるだけでボルト軸力が大きく変化する可能性があることを示した。

(4) 本研究で扱った加熱条件の範囲では、ボルト締結体がステンレス鋼のような熱伝導率の低い材料ほどボルト軸力が大きく変化する傾向がある。また接触面の表面あらさについては、表面あらさが大きくなるほどボルト軸力が増加しやすいといえる。

(5) ボルト各部の温度とボルト軸応力の時間変化について、実験値と解析値を比較することによって本

研究で提案した解析手法の実用性を確認した。

本研究では限られた締結体形状と加熱条件のみを扱ったが、熱が接触面に垂直な方向に流れる場合、接触熱抵抗の影響はさらに顕著に現れると考えられる。今後の課題としては、熱機関、圧力容器、熱交換器をはじめとする実際の接触構造物でよく見受けられる接触面形状および加熱条件を対象として、ボルト締結体の熱および力学特性を体系的に明らかにしていく必要があると考えられる。

文 献

- (1) Park, C. J. and Kaminski, D. A., ASME HTD Conference, Vol.356 (1997), pp89-97.
- (2) Park, C. J. and Kaminski, D. A., ASME HTD Conference, Vol.356 (1997), pp99-108.
- (3) 鳥居, 機学誌, 96-892 (1993-3), pp198-203.
- (4) Fletcher, L. S., ASME Journal of heat Transfer (fiftieth anniversary issue), Vol.110 (1988-11), pp1059-1070.
- (5) 福岡・許, 機論 (A 編), 65-630 (1999-2), pp248-253.
- (6) Sawa, T. et al, ASME Journal of Pressure Vessel Technology, Vol.115 (1993), pp142-146.
- (7) Kumano, H. et al, ASME Journal of Pressure Vessel Technology, Vol.116 (1994-2), pp42-48.
- (8) 福岡・許, 機論 (A 編), 66-644 (2000-4), pp658-664.
- (9) 福岡・許, 機論 (A 編), 63-607 (1997-2), pp561-566.
- (10) 福岡・他2名, 第37回伝熱シンポジウム講演論文集, Vol. III (2000-5), pp925-926.
- (11) Holmann, J.P., HEAT TRANSFER 8th Edition (1997), pp487-488, McGRAW-HILL INC.
- (12) 文献11の651ページ.
- (13) 福岡, 機論 (A 編), 60-580 (1994-12), pp2782-2788.