圧電積層平板の有限要素解析*

加 鳥 裕 明^{*1}

Finite Element Analysis for Laminated Piezoelectric Plates

Hiroaki KATORI^{*2}^{*2} Department of Vehicle System Engineering, Meijo University,
1-501 Shiogamaguchi, Tempaku-ku, Nagoya-shi, Aichi, 468-8502 Japan

In this paper, a finite element analysis of laminated composite plates with piezoelectric laminae is developed. This formulation is based on the first-order shear deformation theory. This theory is extended to include the piezothermoelastic response of composite plate structures. The element employed is a triangle with 18 degree-of-freedom which include extension, bending and transverse shear deformation states. Numerical results show that moderately thick piezothermoelastic composites are sensitive to shear deformation.

Key Words: Finite Element Method, Structural Analysis, Elasticity, Numerical Analysis, Piezothermoelasticity, Piezoelectric Composite Material, Shear Deformation, Mindlin's Theory

1. 緒 言

圧電材料は、知的材料・構造の有力な基本的材料の一つとして注目を集めている。この圧電材料は、外力の作用により変形すると材料中に電位差を生ずる(圧電効果)、逆に電位差を与えるとひずみあるいは応力を発生させる(逆圧電効果)性質を有する材料である⁽¹⁾。このような、電場と弾性場の連成効果を利用して、航空宇宙分野における振動制御や音響制御などへの応用が考えられてきている⁽²⁾⁽³⁾。近年、その応用の関心は、さらに自動車、鉄道車輛、エネルギー機器、医療機器など広範囲の分野に拡大しつつある⁽⁴⁾⁻⁽⁶⁾。最近、知的材料・構造システムの開発に関連して、圧電材料に関するさまざまな研究が行われている。圧電材料の持つ圧電効果や逆圧電効果を利用して知的機能を備えたアクチュエータやセンサを開発する場合、積層形として用いられる場合が多い。知的機能を備えた平板を実現するため、圧電材料をアクチュエータだけでなくセンサとしても使用した積層板の振動制御につい

て、Tzou, Tseng⁽⁷⁾や Ha, Keilers, Chang⁽⁸⁾は8節点六面体要素を用いた有限要素解析を示している。Tauchert⁽⁹⁾は、圧電積層板を対象とし、古典積層理論を電気熱弾性系の理論に拡張し、理論解析している。その論文では、逆圧電効果のみを考え、圧電積層板の電気熱弾性挙動について検討している。Tang と Xu⁽¹⁰⁾は、動的解析のための支配方程式を導き、周辺単純支持圧電積層板の解析結果を示している。また、Jonnalagadda, Blandford, Tauchert⁽¹¹⁾は、一次せん断変形理論を基礎とする圧電積層板の有限要素解析の定式化を行い、9節点四辺形要素を用いた解析結果を示している。Mitchell と Reddy⁽¹²⁾は、高次のせん断変形理論に基づく解析解を示している。Heyliger と Brooks⁽¹³⁾は、圧電積層板の円筒曲げの厳密解を示している。Saravanos, Heyliger, Hopkins⁽¹⁴⁾は、圧電センサとアクチュエータを有する積層板の電気弾性問題を有限要素法により解析している。崔, 野田, 芦田⁽¹⁵⁾は等方性平板と圧電平板の二層平板の定常熱応力問題を扱い、野田, 木村⁽¹⁶⁾は逆対称アングラブリ圧電熱積層平板の熱変形問題を扱っている。

有限要素法による圧電積層板の構造解析において、効率のよい有限要素が開発されれば、圧電積層板の諸特性を少ない計算労力で評価することができる。

* 原稿受付 2001 年 6 月 15 日。

^{*1} 正員, 名城大学理工学部 (☎ 468-8502 名古屋市天白区塩釜口 1-501)。

E-mail: katori@ccmfs.meijo-u.ac.jp

そこで本論文では、著者が先に示した、複合材料積層板などのせん断変形の影響を考慮した解析方法⁽¹⁷⁾を拡張し、圧電積層板の諸特性評価のための実用性の高い手法を求め、その有効性について検討した。ここでは、三角形要素の要素面内力と面外変位に関する剛性行列を作り、これを関係節点の変位に関する通常の剛性行列に変換して、1節点当たり6自由度の3節点三角形要素を得る。

2. 理 論

2.1 圧電積層板の基礎理論 図1に示すように、辺の長さがそれぞれ a, b 、厚さ h の N 層圧電積層板を考える。積層板の中央面に x, y 面を取り、それに垂直に z 軸を取る。第 k 層の構成式は

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_k - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{e}_{31} \\ 0 & 0 & \bar{e}_{32} \\ 0 & 0 & \bar{e}_{36} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix}_k - \begin{Bmatrix} \bar{\lambda}_1 \\ \bar{\lambda}_2 \\ \bar{\lambda}_6 \end{Bmatrix}_k \theta \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}_k - \begin{bmatrix} \bar{e}_{14} & \bar{e}_{24} & 0 \\ \bar{e}_{15} & \bar{e}_{25} & 0 \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix}_k \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 $\bar{Q}_{ij}$, $\bar{e}_{ij}$, $\bar{\lambda}_i$ はそれぞれ変換された剛性係数、圧電定数、熱応力定数であり、 E_m は電場の強さ成分、 θ は基準温度 T_R からの温度変化を表す。

面外せん断変形も考慮に入れた変位場は次式で与えられる。

$$U = u(x, y) - z\phi_x(x, y) \quad \dots\dots\dots (3\cdot a)$$

$$V = v(x, y) - z\phi_y(x, y) \quad \dots\dots\dots (3\cdot b)$$

$$W = w(x, y) \quad \dots\dots\dots (3\cdot c)$$

ここに、 u, v, w は中央面の x, y および z 軸方向変位、

Fig. 1 Geometry of laminated plate

ϕ_x, ϕ_y は x, y 軸方向の断面回転角を表す。式(3)を用いてひずみ成分は、次のように得ることができる。

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 - z\kappa_x \quad \dots\dots\dots (4\cdot a)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y^0 - z\kappa_y \quad \dots\dots\dots (4\cdot b)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 - z\kappa_{xy} \quad \dots\dots\dots (4\cdot c)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} - \phi_y \quad \dots\dots\dots (4\cdot d)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} - \phi_x \quad \dots\dots\dots (4\cdot e)$$

ここに、 $(\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0)$ は中央面のひずみ成分、 $(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy})$ は曲率およびねじり率を表す。

式(1)の構成式をもとに板厚にわたり積分すると、積層板の面内剛性や曲げ剛性 A_{ij}, D_{ij} などが次式で与えられる。

$$\begin{aligned} (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{Q}_{ij})_k (1, z, z^2) dz \\ &= \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k \left\{ (z_k - z_{k-1}), \frac{1}{2}(z_k^2 - z_{k-1}^2), \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{3}(z_k^3 - z_{k-1}^3) \right\}, \quad (i, j=1, 2, 6) \quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

さらにせん断剛性は

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \sum_{k=1}^N k \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{Q}_{ij})_k dz \\ &= \sum_{k=1}^N k (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}), \quad (i, j=4, 5) \quad \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

ここに、 $(\bar{Q}_{ij})_k$ は剛性係数、 k はせん断補正係数であり、本論文では $5/6$ を用いる。

電場および温度場における合応力、合モーメントなどは次式で定義される。

$$\begin{Bmatrix} N_x^E \\ N_y^E \\ N_{xy}^E \\ M_x^E \\ M_y^E \\ M_{xy}^E \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \bar{e}_{31} \\ \bar{e}_{32} \\ \bar{e}_{36} \end{bmatrix}_k E_z(1, z) dz \quad \dots\dots\dots (7\cdot a)$$

$$\begin{Bmatrix} N_x^\theta \\ N_y^\theta \\ N_{xy}^\theta \\ M_x^\theta \\ M_y^\theta \\ M_{xy}^\theta \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 \\ \bar{\lambda}_2 \\ \bar{\lambda}_6 \end{bmatrix}_k \theta(1, z) dz \quad \dots\dots\dots (7\cdot b)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y^E \\ Q_x^E \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \bar{e}_{14} & \bar{e}_{24} \\ \bar{e}_{15} & \bar{e}_{25} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \end{Bmatrix} dz \quad \dots\dots\dots (7\cdot c)$$

式(5)~(7)を用いて、合応力 (N_x, N_y, N_{xy}) 、合モーメント (M_x, M_y, M_{xy}) 、合せん断力 (Q_y, Q_x) が次式のように得られる。

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^E \\ M^E \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^\theta \\ M^\theta \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (8\cdot a)$$

$$\{Q\} = [S]\{\gamma\} - \{Q^E\} \quad \dots\dots\dots (8\cdot b)$$

式(8・a)はさらに、次式のように書き表すことができ

る。

$$\begin{Bmatrix} \epsilon^0 \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* & -B^* \\ B^{*T} & D^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ \kappa \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N^* \\ M^* \end{Bmatrix} \quad (9)$$

ここに、 A^* などは

$$\left. \begin{aligned} A^* &= A^{-1}, B^* = A^{-1}B \\ D^* &= D - BA^{-1}B \\ N^* &= A^{-1}(N^E + N^0) \\ M^* &= BA^{-1}(N^E + N^0) - M^E - M^0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

平板理論での平衡方程式は次式で与えられる。

$$N_{x,x} + N_{xy,y} = 0, N_{xy,x} + N_{y,y} = 0 \quad (11 \cdot a)$$

$$M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x = 0, M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_y = 0 \quad (11 \cdot b)$$

$$Q_{x,x} + Q_{y,y} + q = 0 \quad (11 \cdot c)$$

2.2 有限要素の定式化 有限要素の定式化を行

うため、式(11・c)に仮想変位 $\bar{w}$ をかけて要素面上に積分する。式(11・b)と式(4・d)、(4・e)を用いながら部分積分すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_A \bar{w} q dA + \int_s \bar{w} Q_s^* ds - \int_s (\bar{\phi}_n M_s^* + \bar{\phi}_s M_t^*) ds \\ & + \int_A \left\{ \frac{\partial \bar{\phi}_x}{\partial x} M_x + \frac{\partial \bar{\phi}_y}{\partial y} M_y + \left(\frac{\partial \bar{\phi}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\phi}_y}{\partial x} \right) M_{xy} \right\} dA \\ & - \int_A (\bar{\gamma}_x Q_x + \bar{\gamma}_y Q_y) dA = 0 \quad (12) \end{aligned}$$

ここに、 Q_s^* は周上の z 方向分布力、 ϕ_n は法線方向の回転角、 M_s^* 、 M_t^* は周上の曲げおよびねじりモーメントをそれぞれ示す。

$$Q_s^* = Q_x n_x + Q_y n_y \quad (13 \cdot a)$$

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_n M_s^* + \bar{\phi}_s M_t^* &= \bar{\phi}_x (M_x n_x + M_z n_y) \\ &+ \bar{\phi}_y (M_z n_x + M_y n_y) \quad (13 \cdot b) \end{aligned}$$

さらに、式(11・a)を満たす仮想面内力 $\bar{N}_x$ 、 $\bar{N}_y$ 、 $\bar{N}_{xy}$ を考え、ひずみにかけて部分積分を行うと次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_A (\bar{N}_x \epsilon_x^0 + \bar{N}_y \epsilon_y^0 + \bar{N}_{xy} \gamma_{xy}^0) dA \\ &= \int_s (u^0 \bar{X} + v^0 \bar{Y}) ds \quad (14) \end{aligned}$$

ここに、 $\bar{X} = \bar{N}_x n_x + \bar{N}_z n_y$ 、 $\bar{Y} = \bar{N}_z n_x + \bar{N}_y n_y$ は要素周边上の分布力である。

要素内のたわみ w を次式のように表す。

$$w = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) W_i = NW \quad (15)$$

ここに、 N は面積座標の不完全3次式⁽¹⁰⁾で表される行列であり、 W は未定係数からなる列行列である。なお、要素内のたわみ w は要素内でせん断ひずみ γ_{xz} 、 γ_{yz} が一定という条件のもと、式(4・d)、(4・e)のようにたわみ角を断面回転角とせん断ひずみとで関係づける。この関係をもとに計算を行うと、せん断ひずみが未定係数からなる列行列 W で書き表される。ここで、

せん断ひずみ γ と曲率 κ をそれぞれ次のように書き表すこととする。

$$\gamma = N_s W, \kappa = N_b W \quad (16)$$

一方、応力関数 f を次のように書き表す。

$$f = \sum_{i=1}^n f_i(x, y) S_i = fS \quad (17)$$

ここに、 f は面積座標の3次関数からなる行行列であり、 S は未定係数からなる列行列である。この応力関数を用いて面内力を書き表すと

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \partial^2 f / \partial y^2 \\ \partial^2 f / \partial x^2 \\ -\partial^2 f / \partial x \partial y \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_{xy} \end{Bmatrix} S = FS \quad (18) \end{aligned}$$

となる。

これらの表現を用いて式(12)と式(14)を書き直すとそれぞれ次式のように書き表される。

$$\bar{W}^T P = \bar{W}^T (G^T S + C W + P^M - P^Q) \quad (19 \cdot a)$$

$$\bar{S}^T s = \bar{S}^T (H S - G W + P^N) \quad (19 \cdot b)$$

式(19)から

$$\begin{Bmatrix} s \\ P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H & -G \\ G^T & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S \\ W \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P^N \\ P^M - P^Q \end{Bmatrix} \quad (20)$$

上式を変位ベクトル s 、 W に関する剛性式に書き直すと

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} S \\ P \end{Bmatrix} &+ \begin{Bmatrix} H^{-1} P^N \\ G^T H^{-1} P^N - P^M + P^Q \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} H^{-1} & H^{-1} G \\ G^T H^{-1} & C + G^T H^{-1} G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s \\ W \end{Bmatrix} \quad (21) \end{aligned}$$

と表される。ここに、

$$G^T = \int_A N_b^T B^* F dA \quad (22 \cdot a)$$

$$C = \int_A N_b^T D^* N_b dA + \int_A N_s^T S N_s dA \quad (22 \cdot b)$$

$$H = \int_A F^T A^* F dA \quad (22 \cdot c)$$

$$P^N = \int_A F^T N^* dA \quad (22 \cdot d)$$

$$P^M = \int_A N_b^T M^* dA \quad (22 \cdot e)$$

$$P^Q = \int_A N_s^T Q^E dA \quad (22 \cdot f)$$

式(21)の左辺第2項は温度変化などに伴う見かけの荷重項を表す。式(21)で s 、 W に関する関係式が得られたが、これを節点変位 r に関する方程式に変換することが必要になる。そのために、 s については要素周辺

の変位 u^0, v^0 を関係節点の変位 r_i^e に結び付けて $u^0 = U_r r_i^e, v^0 = V_r r_i^e$ とし、要素周辺上の分布力を $\bar{X} = X_s \bar{S}, \bar{Y} = Y_s \bar{S}$ とすれば式(14)の右辺より $s = tr_i^e, t = \int_s (X_s^T U_r + Y_s^T V_r) ds$ のように局所座標の変位成分 r_i^e によって書き表される。また、 W については局所座標変位成分のたわみおよび断面回転角 r_i^e により表される。この局所座標変位成分 r_i^e, r_i^e を全体座標変位成分 r に変換すると s, W は

$$\begin{Bmatrix} s \\ W \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} r \quad \dots\dots\dots (23)$$

と表され、剛性行列は次式のように得られる。

$$k = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} H^{-1} & H^{-1}G \\ G^T H^{-1} & C + G^T H^{-1}G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (24)$$

3. 数値計算例

2章で定式化した要素の精度、有効性を検討するため、いくつかの問題について解析を行った。計算には、表1に示す材料定数を有する繊維強化複合材料の Graphite/epoxy と高分子系圧電膜の PVDF を積層

Table 1 Material properties

Graphite/epoxy	
$E_1=181\text{GPa}, E_2=10.3\text{GPa}$	
$G_{23}=2.87\text{GPa}, G_{13}=G_{12}=7.17\text{GPa}, \nu_{12}=0.28$	
$\alpha_1=0.02 \times 10^{-6}/\text{C}, \alpha_2=22.5 \times 10^{-6}/\text{C}$	
PVDF	
$E_1=E_2=E_3=2\text{GPa}$	
$G_{23}=G_{13}=G_{12}=G_4=0.752\text{GPa}, \nu_{12}=0.33$	
$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=120 \times 10^{-6}/\text{C}$	
$d_{31}=d_{32}=23 \times 10^{-12}\text{m/V}, d_{33}=33 \times 10^{-12}\text{m/V}$

Fig. 2 Center displacement of simply supported square laminated plate under uniform load

した圧電積層板を考え、電気的負荷などを受ける場合について解析を行った。PVDF 層の厚さは Graphite/epoxy 層の厚さの 2 倍とし、Graphite/epoxy を $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]_s$ と積層した対称積層板の下層に PVDF を積層した 9 層非対称圧電積層板とした。解析は対称性を考慮して 1/4 領域のみを $n \times n$ に等分割した。なお、剛性行列は要素分割によって得られる四辺形を対角線によって分割することで得られる 2 通りの分割法の平均として求めた。

温度場を与える場合には、積層板内の温度分布を次式の線形温度分布で与えられると仮定した。

$$\theta = \frac{\theta_0 + \theta_N}{2} + z \frac{\theta_N - \theta_0}{h} \quad \dots\dots\dots (25)$$

なお、 θ_0, θ_N はそれぞれ板の上面と下面の温度を表す。

電界は Z 方向にのみ印加することとした。

図2~4は、板厚比 b/h を変化させた周辺単純支持の正方形圧電積層板に等分布荷重、温度変化、電界がそれぞれ作用した場合の板中央のたわみを示したものである。なお、数値計算結果における積層板中央のた

Fig. 3 Center displacement of simply supported square laminated plate under thermal load

Fig. 4 Center displacement of simply supported square laminated plate under electric load

わみは下記のような無次元化量で示してある。

外荷重(等分布荷重)の場合

$$\bar{w} = 100 w E_E h^3 / (b^4 q) \quad (26 \cdot a)$$

熱的負荷の場合

$$\bar{w} = -1000 w h / (b^2 \alpha_E T) \quad (26 \cdot b)$$

電氣的負荷の場合

$$\bar{w} = 100 w h / (b^2 d_{33} E_z) \quad (26 \cdot c)$$

図2~4には、古典的積層理論に基づく解析結果も示している。いずれの負荷の場合においても、影響の程度に違いはあるものの、板厚の増加とともにせん断変形の影響が現れている。特に板厚比 b/h が40以下においてその影響が現れている。これらの結果の中で、板厚比 b/h が10, 40の場合の数値結果を表2~4に示してある。表中には、Jonnalagadda, Blandford と Tauchert⁽¹¹⁾ の解析解と9節点四辺形要素を用い、 8×8 に等分割(1445自由度)して得られた有限要素解も示してあるが、いずれの場合も1%未満の差で両者は良く一致している。また、板厚比 b/h が40の場合に要素分割数を変化させたときの本解析結果も示してある。Jonnalagadda らの有限要素解との比較において、本解析結果は4分割(150自由度)でも最大1.5%程度、8分割(486自由度)および10分割(726自由度)においてはその差は1%以下であり、分割数(自由度)の増加

によりその差はより小さくなっており、少ない要素分割数(自由度)で実用上十分な精度の解が得られている。なお、等分布荷重を受ける場合の結果は分割を増やしていくと Jonnalagadda らの有限要素解に近づいていくが、熱的および電氣的負荷を受ける場合、その差は1%以内ではあるが若干異なる値に収束する傾向がある。表5には、アスペクト比 b/a が2, 3の圧電積層板において、板厚比を10, 40と変化させたときの板中央点のたわみを示している。表中には、Jonnalagadda ら⁽¹¹⁾ が、9節点四辺形要素を用いて、 $1/4$ 領域を 4×4 分割して得られた有限要素解も示してある。この表5より、本解析結果が良好なものであることがわかる。図5, 6には、周辺単純支持の圧電積層板の上面に温度変化 $\theta_0 = T = 50^\circ\text{C}$ を与え、さらに圧電材料に z 軸方向に大ききの異なる電界を印加した場合のたわみ分布を示す。図5は、アスペクト比 $b/a = 1$ の圧電積層板に、 $20 \times 10^6 \text{ V/m}$, $25 \times 10^6 \text{ V/m}$, $30 \times 10^6 \text{ V/m}$ の電界が印加された場合のたわみ分布を示す。また、図6はアスペクト比 $b/a = 3$ の圧電積層板に、 $10 \times 10^6 \text{ V/m}$ から $30 \times 10^6 \text{ V/m}$ の電界が印加された場合のたわみ分布を示す。図5, 6の等高線図中には、板の中央点などたわみが大きく現れている点のたわみ量も示してある。これらの結果から、熱たわみを電界の印加によって制御することができ、本計算例において、正方形板の場合には $25 \times 10^6 \text{ V/m}$ 程度、長方形板の場合には $15 \times 10^6 \sim 20 \times 10^6 \text{ V/m}$ 程度の電界を印加することで、熱たわみを小さくできることがわかる。

次に、2対辺単純支持 ($x=0, a$)、他の2対辺固定 ($y=0, b$) の圧電積層板に等分布荷重、温度変化、電氣的負荷が作用する場合について数値計算を行った。表6には、アスペクト比 b/a が1, 3の圧電積層板において板厚比 b/h を10, 100と変化させた場合の板中央点のたわみの無次元化量を表す。また、図7には、2対辺

Table 2 Nondimensionalized center deflection of simply supported square laminated plates under mechanical loading

b/h	Present		Jonnalagadda ⁽¹¹⁾	
	FE mesh		Analytic	FEM
10		0.3687	0.3681	0.3684
40	16×16	0.3259	0.3255	0.3258
	10×10	0.3264		
	8×8	0.3269		
	4×4	0.3307		
	2×2	0.3456		

Table 3 Nondimensionalized center deflection of simply supported square laminated plates under thermal loading

b/h	Present		Jonnalagadda ⁽¹¹⁾	
	FE mesh		Analytic	FEM
10		0.8719	0.8797	0.8802
40	16×16	0.8550	0.8624	0.8627
	10×10	0.8549		
	8×8	0.8548		
	4×4	0.8540		
	2×2	0.8500		

Table 4 Nondimensionalized center deflection of simply supported square laminated plates under electric field loading

b/h	Present		Jonnalagadda ⁽¹¹⁾	
	FE mesh		Analytic	FEM
10		0.6216	0.6202	0.6205
40	16×16	0.6175	0.6158	0.6163
	10×10	0.6174		
	8×8	0.6173		
	4×4	0.6169		
	2×2	0.6144		

Table 5 Nondimensionalized center displacement for different relative thickness, aspect ratios and loads

b/a	b/h	Mechanical		Thermal		Electrical	
		Present	Jonnalagadda ⁽¹¹⁾	Present	Jonnalagadda ⁽¹¹⁾	Present	Jonnalagadda ⁽¹¹⁾
2	10	0.0489	0.0492	0.1511	0.1560	0.1444	0.1459
	40	0.0322	0.0320	0.1327	0.1341	0.1370	0.1366
3	10	0.0141	0.0142	0.0509	0.0521	0.0549	0.0562
	40	0.0065	0.0064	0.0438	0.0439	0.0522	0.0523

Table 6 Nondimensionalized center displacement for simply supported ($x=0, a$) and fixed ($y=0, b$) boundary conditions for different relative thickness, aspect ratios and loads

b/a	b/h	Mechanical		Thermal		Electrical	
		Present	Jonnalagadda ⁽¹¹⁾	Present	Jonnalagadda ⁽¹¹⁾	Present	Jonnalagadda ⁽¹¹⁾
1	10	0.1989	0.1995	0.1408	0.1393	0.1601	0.1628
	100	0.1505	0.1506	0.1213	0.1197	0.1391	0.1395
3	10	0.0140	0.0140	0.0427	0.0425	0.0524	0.0524
	100	0.0061	0.0061	0.0437	0.0431	0.0537	0.0533

Fig. 5 Deflection of square plate under thermal loading (50°C) and electric loading

Fig. 6 Deflection of rectangular plate ($b/a=3$) under thermal loading (50°C) and electric loading

Table 7 Execution time

FE mesh (Degree of freedom)	Time (s)
16×16 (1734)	150.13
10×10 (726)	56.81
8×8 (486)	34.74
4×4 (150)	8.58
2×2 (54)	2.21

単純支持 ($x=0, a$), 他の2対辺固定 ($y=0, b$) の圧電積層板の上面に温度変化 $\theta_0 = T = 50^\circ\text{C}$ を与え, さらに圧電材料の z 軸方向に $E_z = 30 \times 10^6 \text{ V/m}$ の電界を印加した場合の板中央点のたわみ量を示してある。図7は, 板厚比 b/h を4~80と変化させたとき, アスペクト比 b/a の違いによってたわみ量がどのように変化するかを示してある。板厚比の変化によるたわみ量の変化はアスペクト比 $b/a=1$ の場合にもっとも大きく, $b/a=2, 3$ と変化するに従って, その割合は小さくなっている。表6および図7には, Jonnalagadda ら⁽¹¹⁾ の有限要素解も示してある。表6および図7より, 本解析結果が Jonnalagadda らの結果と良く一致しており良好なものであることがわかる。

計算に用いたパーソナルコンピュータはアップル社製 Power Macintosh G 3 (メモリ 512 MB, クロック数 350 MHz) であり, MATLAB を用いて計算を実行した。正方形積層板を $2 \times 2 \sim 16 \times 16$ 分割と変化させたときの計算時間を表7に示してあるが, 比較的短時間で計算を行うことができたと考えている。

4. 結 論

圧電積層板の解析を行うために, せん断変形の影響を考慮した有限要素を提案し, その有効性について検討した。ここでは, 三角形要素の要素面内力と面外変位に関する混合形の剛性行列を作り, これを関係節点の変位に関する通常の剛性行列に変換して, 1 節点当たり 6 自由度の 3 節点三角形要素の関係式を得ている。

圧電積層板に関するいくつかの問題をパーソナルコンピュータを用いて解析し, 他の有限要素解などと比較し, 本要素の有効性を検証した。その結果, せん断変形の影響を考慮した有限要素により圧電積層板に機械的, 熱的および電気的な負荷が作用する場合の特性を, 少ない要素分割数・自由度で実用上十分な精度で解析することができた。また, 負荷の種類にかかわらず, b/h が 40 以下でせん断変形の影響が現れてくるこ

Fig. 7 Center displacement for various length-to-depth and aspect ratios

とが示された。熱的負荷により圧電積層板に生ずるたわみ量を電界の印加により制御する際の振舞いを有限要素解析により示した。今後, 圧電材料を利用した振動制御の解析などに本要素を適用していく予定である。

文 献

- (1) 池田拓朗, 圧電材料学の基礎, (1984), 1-23, オーム社.
- (2) Lai, Z., ほか 3 名, *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, 6-3 (1995), 274-282.
- (3) Straub, F. K. and Merkley, D. J., *Smart Mater. Struct.*, 6-3 (1997), 223-234.
- (4) Yeh, M. K. and Chin, C. Y., *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, 5-7 (1994), 833-840.
- (5) Plentner, B. and Aberamovich, H., *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, 6-11 (1995), 744-756.
- (6) ニューケラス編集委員会, 圧電セラミックスの応用, (1989), 1-10, 学献社.
- (7) Tzou, H. S. and Tseng, C. I., *J. Sound Vib.*, 138-1 (1990), 17-34.
- (8) Ha, S. K., Keilers, C. and Chang, F. -K., *AIAA J.*, 30-3 (1992), 772-780.
- (9) Tauchert, T. R., *J. Thermal Stresses*, 15-1 (1992), 25-37.
- (10) Tang, Y. Y. and Xu, K., *J. Thermal Stresses*, 18-1 (1995), 87-104.
- (11) Jonnalagadda, K. D., Blandford, G. E. and Tauchert, T. R., *Comput. Struct.*, 51-1 (1994), 79-89.
- (12) Mitchell, J. A. and Reddy, J. N., *Int. J. Solids Struct.*, 32-16 (1995), 2345-2367.
- (13) Heyliger, P. and Brooks, S., *J. Appl. Mech.*, 63-12 (1996), 903-910.
- (14) Saravinos, D. A., Heyliger, P. R. and Hopkins, D. A., *Int. J. Solids Struct.*, 34-3 (1997), 359-378.
- (15) 崔正石・野田直剛・芦田文博, 機論, 62-601, A (1996), 135-141.
- (16) 野田直剛・木村晋也, 機論, 65-634, A (1999), 1390-1396.
- (17) 加島裕明・中村康紀, 機論, 66-651, A (2000), 1990-1995.
- (18) Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., *The Finite Element Method*, Vol. 2 Solid Mechanics 5th. ed., (2000), 111, Butterworth-Heinemann.