粘性流体を含む多層多孔質軸対称殻の動的応力と変形*

権田 岳^{*1}, 竹園 茂男^{*2}, 埜 克己^{*2}Dynamic Stress and Deformation of Multi-Layered Poroelastic Shells
of Revolution Saturated in Viscous FluidTakeshi GONDA^{*3}, Shigeo TAKEZONO and Katsumi TAO^{*3} Department of Mechanical Engineering, Toyohashi University of Technology,
Tempaku-cho, Toyohashi-shi, Aichi, 441-8580 Japan

This paper describes an analytical formulation and a numerical solution of the dynamic problems of multi-layered porous shells of revolution saturated in viscous fluid. Each layer has different porosity and void diameter. The equations of motion and the relations between the strains and displacements are derived by extending the Sanders elastic shell theory. As the constitutive relations, the consolidation theory of Biot for models of fluid-solid mixtures is employed. The flow of viscous fluid through a porous elastic solid is governed by Darcy's law. On the boundary surface of each layer, it is assumed that there is no flow resistance and the fluid pressure and the fluid flow are continuous. The fluid flow equations and deformation equations of shells are numerically solved using the finite difference method. As a numerical example, the simply supported three-layered truncated conical shell under a semi-sinusoidal internal load with respect to time is analyzed. Numerical computations are carried out by changing porosity and mean void diameter of each layer, and the variations of pore pressure, displacements and internal forces with time are discussed.

Key Words: Structural Analysis, Poroelastic Shells, Multi-Layered Material, Dynamic Response, Fluid Pressure, FDM

1. 緒 言

焼結金属やコンクリートなどは多孔質体からなり、フィルタ材料、軸受材料、建設材料等として広範な用途を持っている。また、心臓、血管、横隔膜などの生物学的構造物も流体に満たされた多孔質弾性体として取扱うことができる。このような内部の空けき中を流体で満たされた多孔質体では、圧力こう配により流体が浸透する際に、流体の粘性の影響により、変形速度が高いほどひずみ速度依存性を示すようになる。Jayaraman⁽¹⁾をはじめ、倉茂ら⁽²⁾⁽³⁾、Okunoら⁽⁴⁾、Taber⁽⁵⁾⁽⁶⁾らは、多孔質平板内や円筒内および円筒殻体内の流体と固体の連成問題を取扱い、著者らもこれまで、均質材料から成る多孔質弾性殻について、一般軸対称薄肉殻あるいは厚肉殻の静的および動的応答問題を扱ってきた⁽⁷⁾⁽⁸⁾。しかしながら近年、製法の進歩に伴い、多孔質体内の空孔の大きさやその分布密度が異なる層を任意に重ねた多孔質体も見られるようになってきた。

そこで、本研究では、空孔の半径とその分布密度が各層ごとに異なる多孔質材料から成る多層殻の動的応答問題を取扱った。殻の運動方程式には、Sanders, Jr. の理論式⁽⁹⁾に慣性項を加えたものを用い、構成関係には、殻体内に浸透した流体圧力の影響を考慮した M. A. Biot の構成式⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾を採用した。また、多孔質内の流体の支配方程式には、Darcy の法則を用いた。導かれた基礎式の数値解法には差分法を適用した。

2. 基 礎 式

図1に示すように、対称軸から殻の中央面上の任意点 P までの距離を R とし、殻の中央面の形を $R = R(\xi)$ で与えると、中央面の点 P における無次元曲率 $\omega_\xi (= a/R_s)$, $\omega_\theta (= a/R_\theta)$, および無次元半径 $r (= R/a)$ の間には、次の関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \omega_\xi &= -(\gamma' + \gamma^2)/\omega_\theta, \omega_\theta = \sqrt{1 - (\gamma')^2}/r \\ \omega'_\theta &= \gamma(\omega_\xi - \omega_\theta), r''/r = -\omega_\xi \omega_\theta \\ \gamma &= r'/r, \xi = s/a, (\quad)' = d(\quad)/d\xi \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (1)$$

ここに、 s は子午線方向の長さであり、 a は代表長さである。

2・1 粘性流体の支配方程式 多孔質体の空けきを通過する粘性流体の流れは、Darcy 則によって支配される。平面応力状態のもとで、子午線方向と円周方

* 原稿受付 2001 年 6 月 4 日。

^{*1} 正員、豊橋技術科学大学大学院 (〒441-8580 豊橋市天伯町字雲雀ヶ丘 1-1)。^{*2} 正員、豊橋技術科学大学。

E-mail: gonda@takezono.mech.tut.ac.jp

向の流体の速度こう配は殻厚方向のものと比べて十分小さく無視できると仮定し、粘性流体を非圧縮性とする。図2のように n 層から成る多層殻の内側から i 番めの層(任意の層)を添字 i で表すと、粘性流体の支配方程式は次のようになる⁽⁶⁾⁽¹¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} K_i \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (\Delta P_f) &= \frac{\partial}{\partial t} (\Delta P_f) \\ &+ C_i \frac{\partial}{\partial t} \{ (\Delta \varepsilon_{em} + \Delta \varepsilon_{om}) + \zeta (\Delta \kappa_\xi + \Delta \kappa_\theta) \} \\ C_i &= \alpha_i B_i / \beta_i, K_i = k_i / \beta_i \mu_f \\ \beta_i &= \frac{\alpha_i^2}{\lambda_{ri} + 2\mu_{ri}} + \frac{1}{M_{ci}}, k_i = \frac{1}{8} f_i r_{pi}^2 \\ B_i &= \frac{2\mu_{ri}}{\lambda_{ri} + 2\mu_{ri}} = \frac{1-2\nu_i}{1-\nu_i}, \alpha_i = 1 - \frac{C_m}{C_{pi}} \\ M_{ci} &= \frac{1}{C_m(\alpha_i - f_i)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 P_f ：流体圧力、 K ：殻体の浸透率、 C ：固体と流体の連成に関する係数、 k ：固有浸透率、 λ_r, μ_r ：ラーメ定数、 C_m, C_p ：多孔質体を構成する材料の圧縮率、および多孔質体の圧縮率、 μ_f ：流体の粘性係数、 r_p ：空孔の半径、 f ：空けき率、 ν ：ポアソン比、 α ：材料の圧縮率に関する係数、 $\varepsilon_{em}, \varepsilon_{om}$ ：殻の中央面のひずみ、 $\kappa_\xi, \kappa_\theta$ ：殻の曲率の変化量、 Δ ：増分、 t ：時間である。

多層殻では、隣接する各層の境界面において、流体圧力および境界面を通過する流量の連続性から、 $\zeta = \zeta_{i-1}$ で次の式を満たす必要がある。

$$\left. \begin{aligned} (\Delta P_f)_i &= (\Delta P_f)_{i-1} \\ \frac{k_i}{\mu_f} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta P_f) \right]_i &= \frac{k_{i-1}}{\mu_f} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta P_f) \right]_{i-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 $\zeta = \zeta_{i-1}$ は殻の内側から $(i-1)$ 番めの層と i 番めの層の間の境界面の ζ 座標値である。

また、殻の内外表面 ($\zeta = \pm h/2$) の境界条件は以下のようなになる。

Fig. 1 Coordinates and notations

Fig. 2 Multi-layered shell element

$$\zeta = \zeta_0 = -h/2 :$$

$$\Delta P_f = \Delta P_{in} \text{ (表面が浸透性の場合)}$$

$$\partial(\Delta P_f)/\partial \zeta = 0 \text{ (表面が不浸透性の場合)}$$

$$\zeta = \zeta_n = h/2 :$$

$$\Delta P_f = -\Delta P_{out} \text{ (表面が浸透性の場合)}$$

$$\partial(\Delta P_f)/\partial \zeta = 0 \text{ (表面が不浸透性の場合)}$$

ここで、 h は殻厚であり、 P_{in}, P_{out} はそれぞれ、殻の内外表面の圧力を表す。

2.2 殻の変形の方程式 回転対称殻の運動方程式ならびにひずみと中央面の変位・回転との関係には、Sanders, Jr.の殻理論式⁽⁹⁾を採用する。これらの基礎式は、既発表の論文中的諸式⁽¹²⁾と同一なので、ここでは列挙するにとどめる。

○殻の運動方程式：

$$\left. \begin{aligned} a \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (r \Delta N_\xi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta \bar{N}_{\xi\theta}) - r' \Delta N_\theta \right] + \omega_\xi \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (r \Delta M_\xi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta \bar{M}_{\xi\theta}) - r' \Delta M_\theta \right] \\ + \frac{1}{2} (\omega_\xi - \omega_\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta \bar{M}_{\xi\theta}) + r a^2 \left[\Delta P_\xi - \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta U_\xi) \right] &= 0 \\ a \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta N_\theta) + \frac{\partial}{\partial \xi} (r \Delta \bar{N}_{\xi\theta}) + r' \Delta \bar{N}_{\xi\theta} \right] + \omega_\theta \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta M_\theta) + \frac{\partial}{\partial \xi} (r \Delta \bar{M}_{\xi\theta}) + r' \Delta \bar{M}_{\xi\theta} \right] \\ + \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} [(\omega_\theta - \omega_\xi) \Delta \bar{M}_{\xi\theta}] + r a^2 \left[\Delta P_\theta - \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta U_\theta) \right] &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (r \Delta M_\xi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta \bar{M}_{\xi\theta}) - r' \Delta M_\theta \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta M_\theta) + \frac{\partial}{\partial \xi} (r \Delta \bar{M}_{\xi\theta}) + r' \Delta \bar{M}_{\xi\theta} \right] \\ - a r (\omega_\xi \Delta N_\xi + \omega_\theta \Delta N_\theta) + r a^2 \left[\Delta P_\xi - \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta W) \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ここで、慣性項に含まれる ρ は殻体の平均密度であり、次式で表される。ただし、 ρ_i は i 番目の層の密度である。

$$\rho = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n \rho_i (\zeta_i - \zeta_{i-1}) \quad \dots\dots\dots (5)$$

$N_\varepsilon, N_\theta, N_{\varepsilon\theta}$ および $M_\varepsilon, M_\theta, M_{\varepsilon\theta}$ は図 1 に示すように、殻の単位長さ当たりの合応力および合モーメントであり、 $P_\varepsilon, P_\theta, P_\zeta$ は殻の単位面積当たりの分布荷重である。また、 $\bar{N}_{\varepsilon\theta}, \bar{M}_{\varepsilon\theta}$ は修正面内せん断力および修正ねじりモーメントで、次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \Delta \bar{N}_{\varepsilon\theta} &= (\Delta N_{\varepsilon\theta} + \Delta N_{\theta\varepsilon})/2 \\ &\quad + [(1/R_\theta) - (1/R_\varepsilon)](\Delta M_{\varepsilon\theta} - \Delta M_{\theta\varepsilon})/4 \\ \Delta \bar{M}_{\varepsilon\theta} &= (\Delta M_{\varepsilon\theta} + \Delta M_{\theta\varepsilon})/2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

なお、殻の境界に作用する単位長さ当たりの有効面内せん断力と有効横せん断力を $\hat{N}_{\varepsilon\theta}, \hat{Q}_\varepsilon$ とし、次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} \Delta \hat{N}_{\varepsilon\theta} &= \Delta \bar{N}_{\varepsilon\theta} + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{R_\theta} - \frac{1}{R_\varepsilon} \right) \Delta \bar{M}_{\varepsilon\theta} \\ \Delta \hat{Q}_\varepsilon &= \frac{1}{ar} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (r \Delta M_\varepsilon) + 2 \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta \bar{M}_{\varepsilon\theta}) - r' \Delta M_\theta \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

○中央面のひずみと変位の関係：

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varepsilon_{\varepsilon m} &= \frac{1}{a} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta U_\varepsilon) + \omega_\varepsilon \Delta W \right] \\ \Delta \varepsilon_{\theta m} &= \frac{1}{a} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta U_\theta) + \gamma \Delta U_\varepsilon + \omega_\theta \Delta W \right] \\ \Delta \varepsilon_{\varepsilon \theta m} &= \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta U_\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta U_\theta) - \gamma \Delta U_\theta \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

○曲率の変化量と変位の関係：

$$\left. \begin{aligned} \Delta \kappa_\varepsilon &= \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta \Phi_\varepsilon) \\ \Delta \kappa_\theta &= \frac{1}{a} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta \Phi_\theta) + \gamma \Delta \Phi_\varepsilon \right\} \\ \Delta \kappa_{\varepsilon\theta} &= \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta \Phi_\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta \Phi_\theta) \right. \\ &\quad \left. - \gamma \Delta \Phi_\theta + \frac{1}{2a} (\omega_\varepsilon - \omega_\theta) \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta U_\varepsilon) - \frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta U_\theta) - \gamma \Delta U_\theta \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ただし、中央面の回転 $\Phi_\varepsilon, \Phi_\theta$ は

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Phi_\varepsilon &= \frac{1}{a} \left[-\frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta W) + \omega_\varepsilon \Delta U_\varepsilon \right] \\ \Delta \Phi_\theta &= \frac{1}{a} \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta W) + \omega_\theta \Delta U_\theta \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

○殻厚中央面から ζ の距離にある点のひずみ：

$$\{\Delta \varepsilon\} = \{\Delta \varepsilon_m\} + \zeta \{\Delta \kappa\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \{\Delta \varepsilon\} &= \{\Delta \varepsilon_\varepsilon, \Delta \varepsilon_\theta, \Delta \varepsilon_{\varepsilon\theta}\}^T \\ \{\Delta \varepsilon_m\} &= \{\Delta \varepsilon_{\varepsilon m}, \Delta \varepsilon_{\theta m}, \Delta \varepsilon_{\varepsilon \theta m}\}^T \\ \{\Delta \kappa\} &= \{\Delta \kappa_\varepsilon, \Delta \kappa_\theta, \Delta \kappa_{\varepsilon\theta}\}^T \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

であり、 $\{\}^T$ は転置行列を表す。なお、せん断ひずみにはテンソルひずみを用いた。

本研究では構成関係に、殻体内部に浸透した流体の圧力を考慮している M. A. Biot の式を用いると、平面応力状態における多孔質弾性体の応力と流体圧力 P_f の関係は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \{\Delta \sigma\} &= [D] \{ \{\Delta \varepsilon_m\} + \zeta \{\Delta \kappa\} \} - \{\Delta \sigma_f\} \\ \Delta P_f &= M_c (\Delta v - \alpha \Delta \varepsilon) \\ \Delta v &= (\Delta \varepsilon - \Delta \varepsilon_f) f \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \{\Delta \sigma\} &= \{\Delta \sigma_\varepsilon, \Delta \sigma_\theta, \Delta \sigma_{\varepsilon\theta}\}^T \\ [D] &= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \\ \{\Delta \sigma_f\} &= B \alpha \{\Delta P_f, \Delta P_f, 0\}^T \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここで、 ε と ε_f はそれぞれ固体と流体の体積ひずみであり、 v は多孔質体の単位体積当たりの孔に浸透する流体の体積である。なお E は多孔質体の縦弾性係数である。

上式より、多層殻の単位長さ当たりの合応力および合モーメントは次のようになる。

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \Delta N \\ \Delta M \end{array} \right\} &= \{\Delta N_\varepsilon, \Delta N_\theta, \Delta \bar{N}_{\varepsilon\theta}, \Delta M_\varepsilon, \Delta M_\theta, \Delta \bar{M}_{\varepsilon\theta}\}^T \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \begin{array}{l} \Delta \sigma \\ \Delta \sigma_\zeta \end{array} \right\} d\zeta = \sum_{i=1}^n \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \left\{ \begin{array}{l} \Delta \sigma \\ \Delta \sigma_\zeta \end{array} \right\} d\zeta \\ &= \left[\begin{array}{cc} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{B} & \bar{C} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \Delta \varepsilon_m \\ \Delta \kappa \end{array} \right\} \\ &\quad - \{\Delta N_f, \Delta N_f, 0, \Delta M_f, \Delta M_f, 0\}^T \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

上式において、 $\bar{A} \sim \bar{C}$ は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{A} &= \int_{-h/2}^{h/2} [D] d\zeta = \sum_{i=1}^n [D_i] \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} d\zeta \\ &= \sum_{i=1}^n [D_i] (\zeta_i - \zeta_{i-1}) \\ \bar{B} &= \int_{-h/2}^{h/2} [D] \zeta d\zeta = \sum_{i=1}^n [D_i] \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \zeta d\zeta \\ &= \sum_{i=1}^n [D_i] \left\{ \frac{1}{2} (\zeta_i^2 - \zeta_{i-1}^2) \right\} \\ \bar{C} &= \int_{-h/2}^{h/2} [D] \zeta^2 d\zeta = \sum_{i=1}^n [D_i] \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \zeta^2 d\zeta \\ &= \sum_{i=1}^n [D_i] \left\{ \frac{1}{3} (\zeta_i^3 - \zeta_{i-1}^3) \right\} \\ [D_i] &= \frac{E_i}{1-\nu_i^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_i & 0 \\ \nu_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu_i \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (16)$$

また, N_f, M_f はそれぞれ流体圧力による合応力, 合モーメントを示し, 次式によって多孔質内の流体圧力から計算できる.

$$\left. \begin{aligned} \Delta N_f &= \int_{-h/2}^{h/2} \alpha B \Delta P_f d\zeta = \sum_{i=1}^n \alpha_i B_i \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \Delta P_f d\zeta \\ \Delta M_f &= \int_{-h/2}^{h/2} \alpha B \zeta \Delta P_f d\zeta = \sum_{i=1}^n \alpha_i B_i \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \zeta \Delta P_f d\zeta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

以上で 23 個の未知数, $\Delta N_\varepsilon, \Delta N_\theta, \Delta \bar{N}_{\varepsilon\theta}, \Delta M_\varepsilon, \Delta M_\theta, \Delta \bar{M}_{\varepsilon\theta}, \Delta N_f, \Delta M_f, \Delta U_\varepsilon, \Delta U_\theta, \Delta W, \Delta \varepsilon_{\varepsilon m}, \Delta \varepsilon_{\theta m}, \Delta \varepsilon_{\varepsilon\theta m}, \Delta \chi_\varepsilon, \Delta \chi_\theta, \Delta \chi_{\varepsilon\theta}, \Delta \Phi_\varepsilon, \Delta \Phi_\theta, \Delta \sigma_\varepsilon, \Delta \sigma_\theta, \Delta \sigma_{\varepsilon\theta}, \Delta P_f$ に対し, 式(4), (8)~(10), (13), (15), (17)の 23 個の式が用意できたことになる.

3. 無次元方程式

一般に非軸対称問題を解析するには, 各変数を θ 方向にフーリエ級数で表し, その係数を定めれば良い. そこで, 2 章に示した 23 個の変数と分布荷重をフーリエ級数に展開する. 紙面の都合上, これらのうち既発表の論文⁽¹²⁾に記されていないもののみを次に示す(係数には, 対応する小文字を用いる).

$$\begin{aligned} &\{\Delta P_f, \Delta N_f, \Delta M_f\} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{\sigma_0 h}{a} \Delta p_f^{(m)}, \sigma_0 h \Delta n_f^{(m)}, \frac{\sigma_0 h^3}{a} \Delta m_f^{(m)} \right\} \\ &\quad \times \cos m\theta \end{aligned} \dots\dots\dots (18)$$

ここで, σ_0 は代表応力である.

これらのフーリエ展開式を前述の式(2)に代入し,

フーリエ係数に関する対応する式を作ると, 粘性流体の無次元支配方程式となり, また殻の変形に対しては, 上述の 23 個の式から, 順次未知数を消去することにより, 変位増分 $\Delta u_\varepsilon^{(m)}, \Delta u_\theta^{(m)}, \Delta w^{(m)}$ および曲げモーメント増分 $\Delta m_\varepsilon^{(m)}$ に関する 4 元連立 2 階微分方程式が得られる.

粘性流体の支配方程式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Delta p_f^{(m)}}{\partial (\zeta/h)^2} &= \frac{h^2}{a K_i} \sqrt{\frac{E_m}{\rho}} \left[\Delta p_f^{(m)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{a C_i}{E_m h} \left\{ (\Delta \dot{e}_{\varepsilon m}^{(m)} + \Delta \dot{e}_{\theta m}^{(m)}) + \frac{\zeta}{a} (\Delta \dot{k}_{\varepsilon}^{(m)} + \Delta \dot{k}_{\theta}^{(m)}) \right\} \right] \end{aligned} \dots\dots\dots (19)$$

殻の運動方程式:

$$\begin{aligned} A_1 \{Z\}'' + A_2 \{Z\}' + A_3 \{Z\} \\ = A_4 \{N_f\}' + A_5 \{N_f\} + A_6 \{\ddot{Z}\} + A_7 \{p\} \end{aligned} \dots (20)$$

ただし,

$$\begin{aligned} \{Z\} &= \{\Delta u_\varepsilon^{(m)}, \Delta u_\theta^{(m)}, \Delta w^{(m)}, \Delta m_\varepsilon^{(m)}\}^T \\ \{N_f\} &= \{\Delta n_f^{(m)}, \Delta m_f^{(m)}\}^T \\ \{p\} &= \{\Delta p_\varepsilon^{(m)}, \Delta p_\theta^{(m)}, \Delta p_\zeta^{(m)}\}^T \end{aligned}$$

なお, $(\dot{}), (\ddot{})$ はそれぞれ, $\partial()/\partial \tau, \partial^2()/\partial \tau^2$ を表しており, τ は無次元時間 $[\tau = (E_m/\rho)^{1/2} t/a]$, E_m は多孔質体を構成する材料の縦弾性係数である. ここで, $A_1 \sim A_3$ および A_4, A_5 は, それぞれ, 殻の形状と ν_i の値から定まる 4×4 の定数行列⁽¹³⁾ および 4×2 の定数行列である. また, A_6, A_7 はそれぞれ, 慣性項と荷重項を与えるための 4×4 および 4×3 の行列である. $A_4 \sim A_7$ は次の形で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} A_4 &= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{B_1}{C_1} \\ 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^2 \gamma \left(1 - \frac{C_2}{C_1}\right) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_7 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A_5 &= \begin{bmatrix} 0 & \gamma \left\{ -\frac{B_1}{C_1} + \frac{B_2}{C_1} - \lambda^2 \omega_\varepsilon \left(1 - \frac{C_2}{C_1}\right) \right\} \\ -\frac{m}{r} & -\frac{m}{r} \left\{ -\frac{B_2}{C_1} + \lambda^2 \omega_\theta \left(1 - \frac{C_2}{C_1}\right) \right\} \\ -(\omega_\varepsilon + \omega_\theta) & \omega_\varepsilon \frac{B_1}{C_1} + \omega_\theta \frac{B_2}{C_1} + \lambda^2 \left(\omega_\varepsilon \omega_\theta - \frac{m^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{C_2}{C_1}\right) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

ここに, $\lambda = h/a$ であり, B_1, B_2 はそれぞれ $\bar{B}/(ahE_m)$ の (1, 1), (1, 2) 成分である. また C_1, C_2 はそれぞれ $\bar{C}/(h^3 E_m)$ の (1, 1), (1, 2) 成分である.

4. 数値計算法

流体と固体の連成問題を数値解析するために, まず, ひずみ速度を零と仮定し, 与えられた境界条件のもとで殻内の流体圧力増分の分布を求める. そして求めた流体圧力をもとに, 連成している回転対称殻の基礎式を解き,

変位, ひずみの各増分値を求める。続いて, 得られたひずみ増分を用いて再び流体圧力増分の分布を計算し, 先に求めた流体圧力増分と比較し収束判定を行う。以上の手順を収束が認められるまで繰返し行い, 荷重増分に対する流体圧力増分の分布, 殻の変位増分, 応力増分, ひずみ増分などを求める。なお, 殻の運動方程式の解法, ならびに流体圧力の方程式の解法には差分法を用い, 慣性項には Houbolt の後退差分式⁽¹⁴⁾を適用する。また, 厚さ方向の積分については, Simpson の 1/3 則を用いる。任意時刻の解は, これらの各計算段階の増分を積分することによって求められる。

5. 数値解析例

炭化けい素セラミックスの空孔の半径とその分布密度(空げき率)が異なる 3 種類の層から成る両端単純支持の多孔質せつ頭円すい殻に, 時間に対して半正弦波状の衝撃内圧が作用する問題を取り上げた(図 3)。殻壁内は粘性流体で満たされており, 殻の内外表面は浸透性とした。三層は殻厚方向に, 各々 $-0.5 \leq \zeta/h \leq -0.05$, $-0.05 \leq \zeta/h \leq 0.05$, $0.05 \leq \zeta/h \leq 0.5$ で構成され, 各層の空孔半径が一定で空げき率が異なる場合(例題 1)と空げき率が一定で空孔半径が異なる場合(例題 2)を取り上げた(表 1, 2)。

せつ頭円すい殻の形状諸量は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} a &= R_1, \quad \xi = s/L, \quad r = 1 + \frac{s}{R_1} \sin \psi \\ r' &= \sin \psi, \quad \gamma = \frac{R_1 \sin \psi}{R_1 + s \sin \psi} \\ \omega_\xi &= \omega'_\xi = 0, \quad \omega_\theta = \frac{R_1 \cos \psi}{R_1 + s \sin \psi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

境界条件は, 殻の両支持端(点 A, C)では

Table 1 f and r_p for each layer (Example 1)

ζ/h	Case1	Case2	Case1&2
$-0.5 \sim -0.05$	$f=0.3$	$f=0.1$	$r_p=10\mu\text{m}$
$-0.05 \sim 0.05$	0.2	0.2	$10\mu\text{m}$
$0.05 \sim 0.5$	0.1	0.3	$10\mu\text{m}$

Fig. 3 Truncated conical shell and load

$$\Delta U_\xi = \Delta U_\theta = \Delta W = \Delta M_\xi = 0 \dots\dots\dots (23)$$

計算に用いた材料物性に関するパラメータは次のとおりである。

炭化けい素の物性値:

$$E_m = 370 \text{ GPa}, \quad \rho_m = 3.2 \text{ g/cm}^3, \quad \nu = 0.16$$

流体の物性値:

$$\rho_f = 0.85 \text{ g/cm}^3, \quad \mu_f = 0.2 \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

多孔質体の物性値(i 番めの層):

$$E_i = E_m(1 - f_i)^2, \quad \rho_i = \rho_m(1 - f_i) + \rho_f f_i$$

$$\alpha_i = 1 - (C_m/C_{pi}) = 1 - (1 - f_i)^2$$

$\dots\dots\dots (24)$

差分点数は, 子午線方向に 101, 殻厚方向には各層ごとに順に 19, 5, 19 の計 43 の格子点を採用し, 時間増分 Δt は $0.1 \mu\text{s}$ とした。これらの値は解の収束性と計算時間を考慮して決定した。

5・1 例題 1(各層の空げき率が異なる場合)

表 1 に示すように, 空孔の半径を各層とも $r_p = 10 \mu\text{m}$ とし, 空げき率を殻の内表面側から $f = 0.3, 0.2, 0.1$ の順に配した三層せつ頭円すい殻(Case 1)と, その逆に殻の内表面側から $f = 0.1, 0.2, 0.3$ の順に配した殻(Case 2)の 2 種類を取り上げ, $f = 0.3, 0.1$ の単層殻の場合と合わせ比較した。

計算結果を図 4~8 に示す。図中, 実線, 破線, および一点鎖線, 二点鎖線は, 各々 Case 1, Case 2 の三層多層殻および, $f = 0.3, 0.1$ の単層殻の結果を示す。また図中の無次元化に用いた代表応力 σ_0 には, 曲率半径 R_1 の円筒殻に内圧 P_0 が静的に作用するときの円周方向応力 $\sigma_0 = P_0 R_1 / h$ を使用している。

図 4 に, せつ頭円すい殻が大きく殻厚方向に変動する点 B($s/L = 0.6$)の殻厚方向変位 W と流体圧力 P_f

Fig. 4 Variations of W and P_f at point B with time

の時間的変化を表す。また図5には、時刻 $t=0.20$ ms まで 0.05 ms ごとの時刻における殻厚方向変位 W の子午線方向分布を表す。さらに図6には、 $t=0.075$ ms, $t=0.15$ ms および $t=0.25$ ms における流体圧力の点 B を通る殻厚方向分布を Case 1 と Case 2 について示す。内圧の負荷初期には、殻全体にわたって変位 W の増加とともにひずみが引張りとなり、殻体内の空げきが膨張するため流体圧力 P_f は、内圧を受ける内表面近傍を除いて負の値を示す。 $t=0.075$ ms では、殻の内表面側の層の空げき率が大きい Case 1 は空げき率が小さい Case 2 に比べて殻厚方向の流体圧力の減少が小さい。その後自由振動に入ると、点 B の P_f は、Case 1 の変動振幅のほうが Case 2 に比べて小さくなっている。しかしながら流体圧力に見られる Case 1 と Case 2 の差は、変位成分にはほとんど見られず、時間の経過とともにわずかながら生じる程度である。また、空げき率 $f=0.3, 0.1$ の単層殻の場合と比較すると、空げきを多く含む殻ほど縦弾性係数が小さく、また平均密度が小さくなるために、殻の変位 W は大きく変動周期は長くなり、本例題の多層殻では変位の大きさならびに周期とも、両単層殻の

Fig. 5 Meridional distributions of W Fig. 6 Distributions of P_f through thickness at point B

ほぼ中間の応答を示している。しかしながら流体圧力 P_f に関しては、多層殻と単層殻において、空げき率が異なり、殻の平均密度が変わるため、それらが複雑に影響を及ぼし合うので、多層殻の振幅が単層殻 ($f=0.3, 0.1$) のその中間には来ない。なお図6によると、流体圧力 P_f に界面でわずかながら厚さ方向の変化が見られる。

図7は、殻の点 B が大きく外表面側および内表面側に変位する時刻 $t=0.10$ ms と $t=0.20$ ms における子午線方向応力 σ_ξ と円周方向応力 σ_θ の点 B を通る殻厚方向分布を、Case 1 と Case 2 について示す。また図8には、点 B の合応力 N_θ と合モーメント M_ξ の時間的変化を示す。図7より、各層の空げき率の相違により弾性定数が異なるために、隣接する各層の境界面で応力分布は不連続となる。また、Case 1 と Case 2 の応力分布の相違は、図8に示すように合応力 N_θ にあまり影響を与えないが、合モーメント M_ξ に

Fig. 7 Distributions of σ_ξ and σ_θ through thickness at point B Fig. 8 Variations of N_θ and M_ξ at point B with time

は大きな差となって表れる。また多層殻と空げき率 $f=0.1, 0.3$ の単層殻の場合を比較すると、四者の間には N_θ の振幅にはあまり差がないが、空げき率の相違により縦弾性係数が異なるために、変位 W の振幅の相違は大きくなる(図4)。

5.2 例題2(各層の空孔半径が異なる場合)

表2に示すように、空げき率を各層とも $f=0.2$ とし、空孔半径を殻の内表面側から $r_p=15\mu\text{m}, 10\mu\text{m}, 5\mu\text{m}$ の順に配した三層せつ頭円すい殻(Case3)と、その逆に殻の内表面側から $r_p=5\mu\text{m}, 10\mu\text{m}, 15\mu\text{m}$ の順に配した殻(Case4)の2種類を取り上げ、 $r_p=5\mu\text{m}, 15\mu\text{m}$ の単層殻の場合と合わせ比較した。

計算結果を図9~12に示す。図中、実線、破線、および一点鎖線、二点鎖線は、各々Case3, Case4の三層多層殻および、 $r_p=15\mu\text{m}, 5\mu\text{m}$ の単層殻の結果を

示す。また図中の無次元化に用いた代表応力 σ_0 は、例題1の場合と同様である。

図9は点Bの殻厚方向変位 W と流体圧力 P_f の時間的変化であり、図10は $t=0.15\text{ms}$ および $t=0.25\text{ms}$ における流体圧力 P_f の点Bを通る殻厚方向分布を表す。Case3とCase4の変位の時間的変化にはほとんど差が見られず、 $r_p=15\mu\text{m}$ の単層殻の結果にほぼ近い応答を示す。一方流体圧力 P_f は、内圧の負荷後 $t=0.1\text{ms}$ の間で両者に差が生じているが、これは例題1の空げき率が異なる層の場合(図6の $t=0.075\text{ms}$ における P_f の分布)と同様に、内圧を受ける殻内表面側の層の空孔半径が大きいCase3は、空孔半径が小さいCase4に比べて殻厚方向の流体圧力の減少が小さくなることによる。 $t=0.1\text{ms}$ 以後ではCase3, 4の P_f は一致しているが、図10においても、殻厚中央面では同時刻における両者の流体圧力が一致しているのが見られる。さらに図10より、界面での傾きが大きく変化し、空孔半径の小さい層において殻厚方向に流体圧力の最大を示す位置が存在すること、また $r_p=5\mu\text{m}$ の単層殻の場合とは顕著な差があるこ

Table 2 r_p and f for each layer (Example 2)

ζ/h	Case3	Case4	Case3&4
-0.5 ~ -0.05	$r_p=15\mu\text{m}$	$r_p=5\mu\text{m}$	$f=0.2$
-0.05 ~ 0.05	$10\mu\text{m}$	$10\mu\text{m}$	0.2
0.05 ~ 0.5	$5\mu\text{m}$	$15\mu\text{m}$	0.2

Fig. 9 Variations of W and P_f at point B with time

Fig. 10 Distributions of P_f through thickness at point B

Fig. 11 Distributions of σ_ϵ and σ_θ through thickness at point B

Fig. 12 Variations of M_ϵ at point B with time

とがわかる。

図 11 は、殻の点 B が大きく外表面側および内表面側に変位する時刻 $t=0.10$ ms と $t=0.20$ ms における応力 σ_e と σ_o の点 B を通る殻厚方向分布を示す。また図 12 には、点 B の合モーメント M_e の時間的変化を表す。なお点 B の合応力 N_e は、図 9 に示す点 B の W の時間的変化とほぼ同一の応答を示すので、本論文では割愛した。図 11 は、空孔半径が異なっても空げき率が同一であれば、隣接する各層の境界面で応力は連続となることを示している。また図 9~12 から、空げき率が同一で空孔半径が異なる場合には、流体圧力分布の差は大きい、応力分布と変位成分に及ぼす影響は極めて小さいことがわかる。

6. 結 言

本論文では、粘性流体を含む多層多孔質軸対称殻の動的応答問題の解法を示した。多孔質内の粘性流体の支配方程式には Darcy の法則を用い、殻の運動方程式ならびに変位-ひずみ関係式には、Sanders, Jr. の弾性薄肉殻理論に慣性項を加えたものを、構成関係には、殻体内に浸透した流体圧の影響を考慮した M. A. Biot の式を採用した。導かれた基礎式の数値解法には差分法を適用した。

数値解析例として、衝撃内圧を受ける両端単純支持の三層から成る多孔質せつ頭円すい殻に、時間に対して半正弦波状に変化する衝撃内圧が作用する問題を取

扱った。殻の内外表面は浸透性とし、各層の空げき率および空孔の半径を変化させて、殻の応答の相違を調べた。得られた結果より、空げき率が異なる層で構成された多孔質殻では、層の空げき率が変わると、流体圧力および応力の分布に大きな差を生じ、変位や内力成分の応答への影響が見られた。また、空げき率が同じで空孔半径が異なる層で構成された多孔質殻では、流体圧力分布に大きな差を生ずるものの、応力の分布と変位成分にはほとんど影響が見られないことがわかった。

文 献

- (1) Jayaraman, G., *J. Biomech.*, **16**-10 (1983), 833-840.
- (2) Kurashige, M., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **49**-3 (1982), 492-496.
- (3) 倉茂道夫・ほか 2 名, 機論, **60**-574, A (1994), 1425-1429.
- (4) Okuno, A. and Kingsbury, H. B., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **56**-3 (1989), 535-540.
- (5) Taber, L. A., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **59**-3 (1992), 628-634.
- (6) Taber, L. A., *Int. J. Solids Struct.*, **29**-24 (1992), 3125-3143.
- (7) 竹園茂男・ほか 3 名, 機論, **66**-641, A (2000), 164-171.
- (8) 竹園茂男・ほか 2 名, 機論, **67**-653, A (2001), 134-141.
- (9) Sanders, Jr., J. L., *NASA Tech. Rep.*, R-24 (1959), 1-11.
- (10) Biot, M. A., *J. Appl. Phys.*, **12** (1941), 155-164.
- (11) Biot, M. A. and Willis, D. G., *J. Appl. Mech.*, **24** (1957), 594-601.
- (12) 竹園茂男・ほか 2 名, 機論, **54**-498, A (1988), 405-412.
- (13) Budiansky, B. and Radkowski, P. P., *AIAA J.*, **1**-8 (1963), 1833-1842.
- (14) Houbolt, J. C., *J. Aeronaut. Sci.*, **17**-9 (1950), 540-550.