資源の追加と削減に基づく並列分散最適化法の収束性の改善*

三木光範^{*1}, 廣安知之^{*1}, 池田大樹^{*2}Improvement of the Convergence in the Distributed Optimization
by Resource Addition and Reduction MethodMitsunori MIKI, Tomoyuki HIROYASU^{*3} and Taiju IKEDA^{*3}Department of Knowledge Engineering, Doshisha University,
1-3 Tatara, Miyakodani, Kyo-Tanabe-shi, Kyoto, 610-0321 Japan

The distributed optimization method by resource addition and reduction, which is called the DORAR method, is a new optimization method for the minimization of the total resource of systems, and it has been found to be suitable for parallel processing and very robust for initial solutions. The only parameter in the method is the amount of the small additional resource used for increasing the resources of the elements of a system. It has been found that the amount of the additional resource can be determined from the required accuracy of final results. However, the problem on slow convergence still remains. This paper introduces three improvements for adjusting the additional resource aiming its fast convergence and the high accuracy of the converged solutions. One is the gradual reduction of the additional resource, one is the utilization of the sensitivity information, and one is the adaptation of the additional resource using the history of the resource reduction. These improvements are tested for optimizing truss structures and their effectiveness is examined.

Key Words: Optimum Design, Distributed Algorithm, Parallel Optimization, DORAR Method

1. はじめに

近年, 並列計算機の発達に伴い, 最適化アルゴリズムを並列化する試みが行われている¹⁾。しかしながら, 従来の最適化手法は本質的に逐次処理の部分を多く含み, 並列化は容易ではない。このため, 新しい並列最適化のアルゴリズムを考える場合には, 自律分散の概念²⁾が有効であると思われる。自律分散システムとは, システム全体がそれより規模の小さいサブシステムから構成され, それぞれのサブシステムはシステム全体がうまく機能するように自律して挙動するシステムである。

前報^{3), 4)}では, このような自律分散の概念に基づく並

列分散最適化アルゴリズムである資源追加削減法 (Distributed Optimization by Resource Addition and Reduction Method, 以下 DORAR 法と略記する) を提案した。また, アルゴリズムの正当性の数学的検証も行った⁵⁾。DORAR 法は, 局所ルールに基づく最適設計のための新たなアルゴリズムであり, 資源最小化問題に定式化できる連続変数の非線形最適化問題を並列計算機で解くために開発された。この方法には, 複数の制約条件を容易に扱える, および任意の初期値から収束するロバスト性を有するといった特徴がある。しかしながら, 設計点を制約条件に近づける処理を反復することで最適化を達成するというアルゴリズムの原理上, 収束まで計算の繰り返しを要するという問題点があり, その改善のための研究は行われていない。本論文では, 収束性の向上およびより厳密な最適解を得るためのいくつかの手法の提案を行う。そして, 提

* 原稿受付 2000 年 11 月 22 日。

^{*1} 正員, 同志社大学工学部 (〒610-0321 京田辺市多々羅都谷 1-3)。

^{*2} 同志社大学大学院。

E-mail: mmiki@mail.doshisha.ac.jp

案した手法の有効性を離散システム最適化問題に適用することで検討する。

2. 資源の追加と削減に基づく分散最適化法

2.1 資源追加削減法 (DORAR 法) の概略 ここでは、離散的な要素を有するシステムの最適化問題を考える。目的は、システム全体として必要な資源の最小化であり、それは各要素の資源の和で表される。システムには要求される機能が種々の制約条件として課せられている。それらは複数の全体制約条件と複数の局所制約条件である。すなわち、式(1)のように定式化できる資源最小化問題を考える。

$$\begin{aligned} \text{Minimize } R &= \sum_{i=1}^N R_i \\ \text{Subject to} \\ g_{ik} &\leq 0 \quad (i=1, \dots, N; k=1, \dots, n_i) \\ G_j &\leq 0 \quad (j=1, \dots, m) \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 R はシステムの全資源、 R_i は要素 i の資源、 N は要素数、 g_{ik} は要素 i の k 番目の局所制約、 G_j は j 番目の全体制約である。

DORAR 法のアルゴリズムは、次の手順で示される。

- 1) 各要素は局所制約条件を基にその資源余裕を評価し、局所資源余裕とする。
- 2) 各要素は全体制約条件を基にその資源余裕を評価し、それらに責任係数を乗じたものをその要素の全体制約資源余裕とする。責任係数は感度情報を交換しない場合には、一定値 (要素数の逆数) とするのが妥当である。
- 3) 手順 1), 2) の資源余裕の最小値を各要素の臨界資源余裕とし、それを削減する。この処理を資源削減処理と呼ぶ。
- 4) 各要素に一定の微少な資源 (以下、 ΔR と略記する) を追加する。この処理を資源追加処理と呼ぶ。
- 5) 手順 1) から 4) を繰り返すことにより最適解を得る。

DORAR 法のアルゴリズムの詳細は、前報³⁾を参照されたい。

2.2 DORAR 法の特徴と問題点 離散システムの最適設計問題を分散的に解くための方法として提案された DORAR 法の特徴は次のようなものである。

- 自律分散の概念に基づく並列処理に適した分散最適化アルゴリズムである。
- 人為的に扱うパラメータは ΔR のみであり、その設定は比較的容易である。
- システムに課せられた複数の制約条件を扱うことができる。
- 任意の初期値からも収束し、最適解を得ることができる。

これまで DORAR 法は、電気回路および離散構造物最適設計問題に適用され、その有効性が検証されている^{3), 4), 5)}。しかしながら、アルゴリズムの収束性や最適解の精度に関する研究は行われていない。本論文では、収束性や最適解の精度の改善を目的とした種々のアルゴリズムの提案を行う。

3. 力学的離散システムへの適用

3.1 最適化の対象 最適化の対象として図 1 に示す離散的要素から成る 8 節点 15 部材のトラス構造の最小体積設計問題を考える。使用材料は簡単のため、縦弾性係数 10GPa の線形弾性体とする。目的は体積の最小化であり、したがって、DORAR 法における資源はここでは各部材の体積となる。この問題は同一材料の場合には構造の重量を最小にする問題と等価である。制約条件は、局所制約条件として部材の引張、圧縮応力および座屈強度を考え、全体制約条件として一つの節点変位を考える。

Fig. 1 A 15-member truss structure

部材は中実円形断面とし、設計変数は部材の体積である。負荷荷重は図 1 に示すとおり、節点 4,6 および 8 にそれぞれ 2kN ずつ水平荷重を負荷した。応力制約における限界値を引張 40MPa, 変位制約として節点 8 の変位を 0.006m 以下とした。

乱数を用いて 8 節点 15 部材トラス構造物の各部材の円形断面の半径を与えた初期値を 5 種類設定した。それらの初期値の断面積分布を図 2 に示す。初期値における全体の体積は最小 $1.43 \times 10^{-2} m^3$, 最大 $2.76 \times 10^{-2} m^3$ であった。

Fig. 2 Initial distributions of the sectional areas of the members

3.2 最適化の結果 図 2 に示した 5 種類の初期値を対象として、最適化を行った。資源追加処理における ΔR の大きさは、その時点でのシステムの全資源量、すなわちトラスの全体積の 0.1% および 0.01% の一定値とした。よって、資源追加処理によって 1 ステップごとに、15 部材トラス構造物全体にそれぞれ 1.5%, 0.15% の資源が付加されることになる。著しい相違を持つ初期値から最適化を行ったにもかかわらず、全て発散せず、良好な収束過程を示した。得られた最適解は 2 種類であった。それらの解の断面積分布を図 3 に示す。

初期値 4 のみが解 B に収束し、それ以外は解 A に収束した。解 A は大域的最適解であると考えられる。

ここでは、DORAR 法における唯一のパラメータである ΔR が収束に及ぼす影響を検証する。代表的な例として、初期値 1 および初期値 2 に関する 10000 ステップまでの資源履歴を図 4 および図 5 に示す。全体積は計算の初期段階で急速に減少し、そののち緩慢な変化過程に入ることがわかる。図 4 および図 5 より、 ΔR の大きさは、収束性や最適解の精度に多大な影響を及ぼすものであることがわかる。すなわち、 ΔR が大きければ収束性は向上するが、解の精度は低くなる。一方、 ΔR を小さくすれば収束は遅れるが、解の精度の向上を実現できる。次節では、収束性の向上と最適解の精度向上の両者をめざした方法を提案する。

Fig. 3 Converged solutions

Fig. 4 Histories of the total volume from initial config. 1 with constant ΔR

Fig. 5 Histories of the total volume from initial config. 2 with constant ΔR

Fig. 7 Histories of the total volume from initial config. 2 with constant ΔR and with decreasing ΔR

4. 収束性および最適解の精度を向上させる方法

4.1 追加資源の低減処理の提案とその有効性の検証
前章では、追加資源 ΔR の大きさが収束性や最適解の精度に多大な影響を及ぼすことを検証した。そこで、 ΔR の初期値を大きく設定し、その後、段階的に低減させる処理を提案する。これにより、収束性、最適解の精度の両者の向上が期待できる。 ΔR の初期値は全資源量の 0.1% とし、システムの総資源量の変化が緩慢になったとき、すなわち総資源量の変化率が一定値以下（経験的に 1.0×10^{-4} に設定）となったときに 1/10 に低減させるものとした。

図 2 に示す 5 種類の初期値から、提案する ΔR の段階的な低減処理を適用して最適化を行うことで、提案の有効性を検証する。代表的な例として、初期値 1 および初期値 2 の 750 ステップまでの資源履歴をそれぞれ図 6 および図 7 に示す。

Fig. 6 Histories of the total volume from initial config. 1 with constant ΔR and with decreasing ΔR

図 4 と図 6、図 5 と図 7 をそれぞれ比較すると、 ΔR を 0.01% の一定値としたときの 10000 ステップにおける最適解の精度を、 ΔR の段階的な低減処理を用いると 500 ステップ程度の繰り返し計算で実現できることがわかる。よって、 ΔR を段階的に低減させる処理は、収束性の改善および解の精度向上の両者を実現するためには極めて有効であることがわかった。

4.2 感度情報の交換による責任係数の適応的变化

4.2.1 責任係数の適応的变化 DORAR 法では、課せられた制約条件の分類を行う。この分類により、各要素は自律分散的に挙動することが可能となる。制約条件については、システムを構成する各要素が単独で資源を変化させた結果、満たすことのできるものを局所制約条件と定義し、それ以外を全体制約条件とする。全体制約条件はシステム全体に課せられた制約で、そのシステムを構成する要素全体で満たされるべき制約であると考えられる。そのため、要素は全体制約条件に対する資源余裕に対しては、責任係数を乗じ、これを改めて資源余裕とする。責任係数とは、全体制約条件を達成するためのシステム内における要素の責任の重さ、すなわち、システムにおけるその要素の重要度を示すものであると考えられる。従来の DORAR 法では、要素間の情報交換の頻度を減らすため、要素間の重要度は一定と考え、責任係数は要素数の逆数としていた。

本節では、各要素の全体制約条件に関する感度をその要素の重要度を示す情報とし、それを要素間で交換することで、システムの状態に応じて最適な責任係数を与えることを目標とするアルゴリズムの提案を行う。要素間で交換する情報は全体制約に関する感度のみで

あり、各要素の局所制約に関する感度は交換しない。感度情報を用いると、各要素の資源を微量変化させたときのシステムの応答を推定することが可能である。この手法は、要素が利用する情報量を増加させるため、収束の加速が期待できるが、システムを構成する全ての要素の感度情報を必要とするため、要素間における情報交換の頻度が増加するという問題点がある。

要素の全体制約に関する感度情報から責任係数を決定するための基本的な考えは、制約条件に対する感度の高い要素ほど削減される資源量は小さくし、また、感度の低い要素ほど削減される資源量を大きくするというものである。

要素 i の j 番目の全体制約 G_j に関する感度 S_{ij} は式(2)のように表すこととする。感度解析した結果、各要素の状態が制約を満たす方向に遷移すると考えられる場合、感度 S_{ij} は負となる。

$$S_{ij} = \frac{\partial G_j}{\partial R_i} \quad (2)$$

ここではまず、システムの状態が制約条件を満たしている場合を考える。この場合では、設計解が可能領域内にあることから、資源削減処理において各要素の資源は削減される。感度 S_{ij} が負のときは、要素 i の責任係数 α_{ij} は式(3)のように感度の逆数に比例した値とする。これは、重要度の高い要素の資源の削減量は、他の要素と比較して相対的に小さくするという考えに基づくものである。感度 S_{ij} が正のときは、その要素の資源は制約を満たすためには不要であると考えられ、その要素は全ての資源を削減される。

$$\alpha_{ij} = \frac{S_{ij}^{-1}}{\sum_{i=1}^N \min(0, S_{ij}^{-1})} \quad (S_{ij} \leq 0) \quad (3)$$

次に、システムの状態が制約条件を満たしていない場合を考える。この場合では、可能領域外にある設計解を制約内に移動させる必要があり、資源削減処理において各要素の資源は追加されることになる。感度 S_{ij} は負のとき、責任係数 α_{ij} は式(4)のように感度に比例した値とする。これは、重要度の高い要素の資源の追加量は、他の要素と比較して相対的に大きくするという考えに基づくものである。感度 S_{ij} が正のときは、その要

素の資源は制約を満たすための重要度が低いと考えられ、資源削減は行わない。

$$\alpha_{ij} = \frac{S_{ij}}{\sum_{i=1}^N \min(0, S_{ij})} \quad (S_{ij} \geq 0) \quad (4)$$

次に、感度情報の交換による責任係数の適応的变化を用いた設計点の移動を検討する。図8は、2要素の場合において、責任係数を要素数の逆数 ($=1/2$) の一定値とした場合および責任係数の適応的变化を用い最適化を行った場合の資源平面での設計点の移動過程を表している。ここで、現在の設計点は P_i で表されている。観測される有効制約条件は全体制約条件のみとする。

Fig. 8 Movement of design point with variable responsibility factor

責任係数が一定値の場合、要素1の全体資源余裕は線分 $P_0 \cdot Q_a$ で表され、責任係数 $1/2$ を乗じた臨界資源余裕はこの長さの半分となる。一方、要素2の全体資源余裕は線分 $P_0 \cdot Q_b$ で表され、責任係数 $1/2$ を乗じた臨界資源余裕はこの長さの半分となる。これらの臨界資源余裕を削減すると、設計点は線分 $Q_a \cdot Q_b$ の中点である P_1 に移動する。

次に、責任係数の適応的变化を用いた場合を考える。設計点 P_0 付近で考えると、線分 $P_0 \cdot Q_b$ で表される要素2の全体資源余裕は、線分 $P_0 \cdot Q_a$ で表される要素1の全体資源余裕より大きく、このため制約条件 G に対する資源量の感度が設計点 P_0 付近で大きな変化がないと仮定すると、式(3)より要素2の責任係数 α_2 は要素1の責任係数 α_1 より小さくなる。臨界資源余裕は各資源余裕にこれらの責任係数を乗じて計算されるため、要素1の臨界資源余裕は責任係数が $1/2$ のときと比べて小さくなる。一方、要素2の臨界資源余裕は責任係数が $1/2$ のときと比べて大きくなる。この

ため、これらの臨界資源余裕を削減すると設計点は $P1$ より Qb に近くなる。このような状況が生じる場合、最適点 P_{opt} は必ず Qb 側に存在する。このため、責任係数の適応的变化を用いた場合の資源削減に基づく設計点の移動は、責任係数を固定した場合と比較して、より最適設計点に近づくことが分かる。

これとは逆に、設計点 $P0^*$ 付近では最適設計点は Qa^* 側に存在するが、このときは設計点 $P0^*$ では制約条件の要素 1 の資源に対する感度の方が要素 2 に対する感度より小さくなり、設計点は $P1^*$ より Qa^* 側に移動する。こうして、責任係数の適応的变化を用いた場合には、設計点の移動は責任係数が一定値の場合に比べて加速されることになる。

4.2.2 責任係数の適応的变化の有効性の検証
ここでは、感度情報の交換による責任係数の適応的变化の有効性を検討する。追加資源 ΔR は全資源量の 0.1% の一定値とし、提案の有効性を確認するため、 ΔR の低減処理は行わない。責任係数を要素数の逆数の一定値、提案した責任係数の適応的变化を用い最適化を行ったときの 500 ステップまでの資源履歴をそれぞれ図 9 および図 10 に示す。初期値 5 のみが責任係数を変化させると収束性が向上した。しかしながら、初期値 2 および初期値 3 については責任係数を変化させると、責任係数を要素数の逆数の一定値としたときと比較して 40 ステップ付近から収束が遅れることがわかった。

この原因を検証するために、初期値 2 の 40 ステップ後の図 9 および図 10 における断面積分分布を検証した。図 9 では責任係数は一定値（感度情報は使用していない）であり、図 10 では感度情報に基づく責任係数の適応的变化を用いている。それぞれの 40 ステップ後の断面積分分布を図 11 に示す。これらの 2 種類の断面積分分布から、40 ステップ後の収束解は異なった形状で負荷荷重を支持していることがわかる。すなわち、責任係数の適応的变化を用い最適化を行った 40 ステップ後の収束解は、図 3 に示す解 B と極めて類似した形状で負荷荷重を支持していることがわかる。そのため、40 ステップ以降の最適化に関しても、それらの部材が重要視される結果、大域的最適解への収束が遅れると考えることができる。また、責任係数を一定値とした収束解は、責任係数を変化させて得られた収束解と比較して総資源量は大きいものの、部材の断面積分分布に大きな偏りはないことから、設計空間において解 B との距離が遠い経路で最適化が行われたと考えることができる。

また、初期値 3 についても 40 ステップ後の断面積分分布を比較した結果、初期値 2 と同様のことがわかった。

Fig. 9 Histories of the total volumes with constant responsibility factor

Fig. 10 Histories of the total volumes with variable responsibility factor

With constant responsibility factor   With variable responsibility factor

Fig. 11 Intermediate results (after 40 steps)

次に、40 ステップ以前は各要素の責任係数を要素数の逆数の一定値とし、計算の繰り返しがある程度進行した 40 ステップ以降に責任係数の変化を用いて最適化を行った。500 ステップまでの資源履歴を図 12 に示す。

初期値から責任係数の適応的变化を行うと初期解依存が生じて収束が遅れた初期値 2 および初期値 3 に対しても、収束性が向上することが確認できる。

以上のことから、最適化の計算過程で部材の断面積分布が解 B と類似した断面積分布となった場合、初期値から責任係数の適応的变化を行うと、初期解依存が生じ、収束が遅れることがあると考えられる。よって、計算がある程度進行してから、責任係数の適応的变化を行うことは、初期解依存をなくすために有効であるといえる。

Fig. 12 Histories of the total volumes with constant and variable responsibility factors

4.3 要素の自律的な加速アルゴリズム

4.3.1 収束加速アルゴリズムの提案 DORAR 法では資源余裕の見積もり、資源削減および資源追加の繰り返しでシステムの最適化が達成される。そのため、設計点が最適解と同じ有効制約に近づくとき、最適解を得るまで多くの繰り返し計算を必要とする。その繰り返し計算においては、システムを構成する各要素の資源は規則的かつ単調に変化しているものと思われる。よって、各要素がその変化を把握し、それに基づき自律的に資源を変化させることができれば、収束の高速化が実現できると考えられる。

本節では、収束性の向上を目的として、要素が自己の資源を自律的に変化させ、収束を加速するためのアルゴリズムを提案する。それは、各要素が自己の資源の変化を常に記憶し、その変化が緩慢になるとそれを判断し、大きく資源を変化させる処理である。ここで提案する自律分散的な加速処理を、離散的な各要素が行った結果、システム全体としての最適な状態への収束性の向上が期待できる。

各要素の収束加速アルゴリズムにおいて重要なこと

は、次の二つである。第一に、加速アルゴリズムはシステムの全体情報を必要とせず、各要素が完全に自律的に挙動できなければならない。第二に、加速量をその時点での要素の状態に応じて適応的に決定する必要がある。そのために、加速処理ごとにその有効性を確認する必要がある。

収束加速アルゴリズムは、次の手順で示される。

- 1) 各要素は自己の資源の履歴を保持する。すなわち、常に過去の一定ステップ（ここでは経験的に 5 ステップに設定）の資源量を記憶する。
- 2) 設定した一定ステップごとに、保持している資源の履歴を検証する。そこで、資源の変化が緩慢と判断された場合（ステップごとの資源の変化率が一定値以下）は、加速処理を適用する。加速量は自己の前ステップにおける資源量の変化に基づいて決定し、加速量の初期値を前ステップの資源変化量の 2 倍とする。
- 3) 加速処理の後には、必ずその効果を評価する。そのために、各要素は自己に課せられた局所制約条件を用いる。加速処理後に、局所制約条件を満たしている場合は、前ステップにおける加速が有効であると考えることができ、次の加速処理における加速量を順次 2, 3, 4... 倍に増加させる。加速処理後に、局所制約条件を満たさない場合は加速量が過大であると考え、次の加速量を初期値にもどす。

設計空間における設計点の加速処理による移動は次のように考えることができる。すなわち、設計点のこれまでの移動に関する情報から、これから移動するであろう方向が予測でき、その方向に大きく設計点を移動させるものである。

この加速アルゴリズムは、要素間で情報の交換を行う必要がない、および各要素は局所的に加速の効果を検証できるといった特徴を持ち、並列処理に適しているといえる。

4.3.2 収束加速アルゴリズムの有効性の検証 DORAR 法に提案した要素の収束加速アルゴリズムを適用し、図 2 に示す 5 種類の初期値から最適化を行ったときの 500 ステップまでの資源履歴を図 13 に示す。

Fig. 13 Histories of the total volumes
with the convergence acceleration

図9に示す通常のDORAR法による最適化における資源の履歴と比較すると、収束加速アルゴリズムを適用することで、5種類のすべての初期値から収束性の大幅な向上が実現できることがわかる。また、各要素がシステムの状態に応じた加速量を与えるために、分散的かつ適応的に加速の大きさを決定することは収束の高速化には有効であると考えられる。

5. 結論

本研究では、資源の最適な配分問題に帰着される最適化問題を並列分散的に解くための新しい方法として前報で提案されたDORAR法に収束性の改善および最適解の精度向上を目的とした3つの手法の提案を行い、8節点15部材トラス構造物最小体積設計問題に適用することでその有効性を検証した。

得られた結論は以下の通りである。

- 1) 資源追加処理において、各要素に付加する一定の微小な資源 ΔR は収束性や最適解の精度に大きな影響を及ぼすものであることがわかった。すなわち、 ΔR が大きければ、収束の高速化が実現できるが精度が悪い。逆に ΔR が小さければ、最適解の精度向上が実現できるが収束が遅くなることがわかった。
- 2) 全体の資源量の変化量を基準として、追加資源 ΔR

を段階的に低減することで、収束性の改善および最適解の精度向上の両者を実現できた。

- 3) 感度情報を用いた責任係数の適応的变化は、必ずしも良好な結果をもたらすものではないことがわかった。このため、責任係数を一定と考える従来の考え方は有効であった。ただし、ここでの計算例では100回程度の計算の繰返し後から感度情報を用いて責任係数を適応的に変化させることで、収束が加速されることがわかった。これは、責任係数の初期解依存性をなくすためである。これより、最初は責任係数を一定とし、設計解の変化が緩慢となってから責任係数を適応的に変化させる方法が良いと思われる。
- 4) 離散的な各要素が資源の変化を記憶することで、分散的かつ適応的に収束加速を行うアルゴリズムを提案した。各要素が自律分散的な加速を行った結果、システム全体として最適な状態への収束性の向上が実現できた。

参考文献

- 1) Schnabel, R.B., "A View of the Limitations, Opportunities, and Challenges in Parallel Nonlinear Optimization", *Parallel Computing*, Vol.21, pp.875-905, 1995
- 2) 森, 宮本, 井原, "自律分散概念の提案", *電気学会論文誌 C*, Vol.104 No.12, 1987
- 3) 三木光範, 廣安知之, "資源の追加と削減に基づく最適化法", *日本機械学会論文集 A 編*, Vol.66 No.642, pp.1-8, 2000
- 4) M.Miki, "Object-Oriented Optimization of Discrete Structures", *AIAA Journal*, Vol.33 No.10, pp.1940-1945, 1995
- 5) M.Miki, T.Hiroyasu, T.Ikeda, "Parallel Distributed Optimization by Resource Addition and Reduction", *Lecture Notes in Computer Science* 1615, Springer, pp.194-205, 1999