球形介在物を含む材料に主応力が作用する場合の平均弾塑性挙動*

何 菊 文^{*1}, 佐々木 敏 彦^{*2}
広 瀬 幸 雄^{*3}, 林 政^{*4}

Average Elastic-Plastic Behavior of a Composite Material with Spherical Inhomogeneities in the Condition of Axial Stress

Juwen HE, Toshihiko SASAKI^{*5},
Yukio HIROSE and Zheng LIN^{*5} Department of Materials Science and Engineering, Kanazawa University,
Kakuma-machi, Kanazawa-shi, Ishikawa, 920-1192 Japan

Study by Y. Hirose and Z. Lin *et al.* (1994) can be applied to discuss the average elastic-plastic behavior of the composite material subjected only to axial stress. This composite material is composed of matrix and spherical inhomogeneities of isotropic perfect ideal elastic plastic materials. The volume of any inhomogeneity is very smaller than that of matrix, and the inhomogeneities fit tightly against the matrix. The criteria when the inhomogeneity becomes plastic first was found. It is shown that the yield stress of composite material σ_{50} increases with the increment of the total volume fraction of the inhomogeneities f when the shear elasticity of the inhomogeneities μ^* is bigger than that of matrix μ . The overall stress at the first yielding is obtained.

Key Words: Residual Stress, Elastic-Plastic Behavior, Enforced Material, Elastic Module, Inhomogeneity

1. 結 言

材料の弾塑性挙動については、これまでにさまざまな研究が行われている。Hashin, Z.と Shtrikman, S.は多相材料の弾性挙動について⁽¹⁾, また Hutchinson, J. W.は f. c. c. 金属の塑性応力-ひずみ関係について考察し, 多結晶体金属と混合材料の弾塑性特性について報告した⁽²⁾⁽³⁾。また Iwakuma, T.と Nemat-Nasser, S.は多結晶体金属および複合材料の有限な弾塑性変形について研究した⁽⁴⁾⁽⁵⁾。著者らは等価介在物の手法とマトリックスの方法を利用し, Mori-Tanaka の定理⁽⁶⁾に基づいて, 楕円体の介在物のみを含む材料の力学的挙動を表す一般式を提案し⁽⁷⁾, さらに純粋せん断応力状態の場合で球形介在物を含む材料の弾塑性挙動について考察する⁽⁸⁾とともに, ベキ関数の弾塑性的な挙動についても報告した⁽⁹⁾。さらに実用材への適用例として, X線応力測定法の基礎理論にマイクロメカニックスの理論を組み込み, $(\alpha+\gamma)$ 二相ステンレス鋼について塑性ひずみの定量化を報告した⁽¹⁰⁾。また斎藤ら⁽¹¹⁾⁻⁽¹⁶⁾は界面現象を考慮することにより粒子及び繊維強化複合材料の力学特性を評価し, 田谷ら⁽¹⁷⁾⁽¹⁸⁾は短繊維複合材料の三層構造内部での微視的構造が材料の力学的挙動に及ぼす影響を検討した。

他方, 介在物を含む材料に対しては, 材料全体の降伏応力を測定することができるが, 介在物と母相のどちらが最初に降伏するかを判断することは容易ではない。また, 材料全体の降伏応力と介在物の降伏応力または母相の降伏応力との関係についてはあまり検討がなされていないのが現状である。

そこでこれらの問題を解決するために, 本論文では等価介在物の手法⁽¹⁹⁾とマトリックスの方法を利用して, 球

形介在物を含む材料の弾塑性挙動について検討する。なお本研究で対象とする材料は, 母相, 介在物ともに均質等方の弾完全塑性体であるとする。

2. 球形介在物を含む材料に主応力が作用する場合の平均弾塑性挙動

2.1 一般式⁽¹⁰⁾ 母相と介在物の弾性定数をそれぞれ $\bar{C}, \bar{C}^*$ とする。この物体にマクロ応力 $\bar{\sigma}^0$ が作用し塑性ひずみが発生した場合を考える。材料が母相のみで介在物が含まれていない場合には, 材料全体に均一ひずみ $\bar{\epsilon}^0$ が発生し次の構成式が成り立つ。

$$\bar{\sigma}^0 = \bar{C}(\bar{\epsilon}^0 - \bar{\epsilon}^P) \quad \dots \dots \dots (1)$$

ここに $\bar{\epsilon}^P$ は塑性ひずみを表す。介在物が存在する場合, 母相と介在物間の相互作用により付加的な応力が生じ, 母相と介在物の応力は $\bar{\sigma}^0$ と異なる。このときの母相および介在物の相応力をそれぞれ $\bar{\sigma}_M, \bar{\sigma}_I$ とし, また母相および介在物の相応力とマクロ応力との差, すなわちミクロ応力をそれぞれ $\bar{\sigma}_m, \bar{\sigma}_\alpha$ とする。このときミクロ応力は次の釣合条件を満足する。

$$(1-f)\bar{\sigma}_m + f\bar{\sigma}_\alpha = 0 \quad \dots \dots \dots (2)$$

ここに f は母相に対する介在物の体積率である。また, Mori-Tanaka の定理⁽⁶⁾により, f が有限であるような複合材料内に発生する応力は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_M &= \bar{\sigma}^0 + \bar{\sigma}_m = \bar{C}(\bar{\epsilon}^0 + \bar{\epsilon}_m - \bar{\epsilon}_M^P) \\ \bar{\sigma}_I &= \bar{\sigma}^0 + \bar{\sigma}_\alpha = \bar{C}^*(\bar{\epsilon}^0 + \bar{\epsilon}_m + \bar{\epsilon}_I' - \bar{\epsilon}_I^P) \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (3)$$

ここに $\bar{\epsilon}_m$ は母相のミクロひずみ, $\bar{\epsilon}_I'$ は母相と介在物のミクロひずみの差であり, $\bar{\epsilon}_M^P, \bar{\epsilon}_I^P$ はそれぞれ母相および介在物の相塑性ひずみを表している。ここで等価介在物法⁽¹⁹⁾を適用することで次式が得られる。

* 原稿受付 2001年3月21日。

^{*1} 金沢大学大学院(〒920-1192 金沢市角間町)。^{*2} 正員, 金沢大学大学院自然科学研究科。^{*3} 金沢大学大学院自然科学研究科。^{*4} 北京航空材料研究院(〒100095 北京市海淀区環山村)。

E-mail: sasakit@kenroku.kanazawa-u.ac.jp

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_i &= \bar{C}^* [\bar{C}^{-1} (\bar{\sigma}^0 + \bar{\sigma}_m) + \bar{\varepsilon}' - \Delta \bar{\varepsilon}^P] \\ &= \bar{C} [\bar{C}^{-1} (\bar{\sigma}^0 + \bar{\sigma}_m) + \bar{\varepsilon}' - \Delta \bar{\varepsilon}^P - \bar{\varepsilon}^*] \dots \dots \dots (4)\end{aligned}$$

ここに $\bar{\varepsilon}^*$ は eigen ひずみであり, また $\Delta \bar{\varepsilon}^P$ は次式のように $\bar{\varepsilon}_I^P$ と $\bar{\varepsilon}_M^P$ との差で定義される.

$$\Delta \bar{\varepsilon}^P = \bar{\varepsilon}_I^P - \bar{\varepsilon}_M^P \dots \dots \dots (5)$$

また, 各々の塑性ひずみは次式を満足する⁽²⁰⁾.

$$\left. \begin{aligned}\bar{\varepsilon}^P &= (1-f)\bar{\varepsilon}_M^P + f\bar{\varepsilon}_I^P \\ (1-f)\bar{\varepsilon}_m^P + f\bar{\varepsilon}_\alpha^P &= 0 \\ \bar{\varepsilon}_M^P &= \bar{\varepsilon}^P + \bar{\varepsilon}_m^P \\ \bar{\varepsilon}_I^P &= \bar{\varepsilon}^P + \bar{\varepsilon}_\alpha^P\end{aligned}\right\} \dots \dots \dots (6)$$

なお $\bar{\varepsilon}^P$ は複合材料全体の平均的な塑性ひずみ, すなわちマクロ塑性ひずみを表している. また $\bar{\varepsilon}_m^P, \bar{\varepsilon}_\alpha^P$ はそれぞれ母相および介在物のミクロ塑性ひずみである. さて介在物が楕円体形状を持つ場合には, $\bar{\varepsilon}'$ は次式となる.

$$\bar{\varepsilon}' = \bar{S} (\Delta \bar{\varepsilon}^P + \bar{\varepsilon}^*) \dots \dots \dots (7)$$

$\bar{S}$ は Eshelby テンソルであり, 介在物の形状および母相のポアソン比から決定される⁽²¹⁾. 最終的に母相および介在物の応力は次式となる.

$$\left. \begin{aligned}\bar{\sigma}_M &= \bar{\sigma}^0 + \bar{\sigma}_m = \bar{\sigma}^0 - f\bar{X} \\ \bar{\sigma}_I &= \bar{\sigma}^0 + \bar{\sigma}_\alpha = \bar{\sigma}^0 + (1-f)\bar{X}\end{aligned}\right\} \dots \dots \dots (8)$$

ここで $\bar{X}$ は次式で与えられ,

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \bar{C} (\bar{S} - \bar{I}) \bar{C} - (\bar{C} - \bar{C}^*) \bar{S} - f(\bar{S} - \bar{I}) \bar{I} \\ &\times [(\bar{C} - \bar{C}^*) \bar{C}^{-1} \bar{\sigma}^0 + \bar{C}^* \Delta \bar{\varepsilon}^P] \dots \dots \dots (9)\end{aligned}$$

$\bar{I}$ は単位テンソルである.

ここで介在物が球状かつ等方性材料である場合について考えると, 式(8)においてマクロ応力 $\bar{\sigma}^0$ が主応力と一致する場合は相応力 $\bar{\sigma}_M$ と $\bar{\sigma}_I$ のせん断成分が 0 となるため⁽²⁰⁾, 次式のように表すことができる.

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_M &= \left[\frac{K - \alpha(K - K^*)}{A}, \frac{\mu - \beta(\mu - \mu^*)}{B} \right] \bar{\sigma}^0 \\ &- f \left[\frac{3(\alpha - 1)KK^*}{A}, \frac{2(\beta - 1)\mu\mu^*}{B} \right] \Delta \bar{\varepsilon}^P \dots \dots \dots (10)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_I &= \left[\frac{K^*}{A}, \frac{\mu^*}{B} \right] \bar{\sigma}^0 + (1-f) \left[\frac{3(\alpha - 1)KK^*}{A}, \frac{2(\beta - 1)\mu\mu^*}{B} \right] \Delta \bar{\varepsilon}^P \\ &\dots \dots \dots (11)\end{aligned}$$

この場合の応力場およびひずみ場は次のように簡単に表すことが可能であり,

$$\bar{\sigma}^T = (\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z), \quad \bar{\varepsilon}^T = (\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z), \dots \dots \dots (12)$$

また材料全体の応力-ひずみ関係式は次式となる⁽⁷⁾.

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^P &= \left[\frac{K - (1-f)\alpha(K - K^*)}{3KA}, \frac{\mu - (1-f)\beta(\mu - \mu^*)}{2\mu B} \right] \bar{\sigma}^0 \\ &+ f(1-f) \left[\frac{(\alpha - 1)(K - K^*)}{A}, \frac{(\beta - 1)(\mu - \mu^*)}{B} \right] \Delta \bar{\varepsilon}^P \\ &\dots \dots \dots (13)\end{aligned}$$

ここに, A, B, α および β は,

$$\left\{ \begin{aligned}A &= K - [\alpha - f(\alpha - 1)](K - K^*), \\ B &= \mu - [\beta - f(\beta - 1)](\mu - \mu^*).\end{aligned}\right. \dots \dots \dots (14)$$

$$\alpha = \frac{1+\nu}{3(1-\nu)}, \quad \beta = \frac{2(4-5\nu)}{15(1-\nu)} \dots \dots \dots (15)$$

で表される定数であり, $K = \lambda + 2\mu/3$, $K^* = \lambda^* + 2\mu^*/3$ である. また, λ, μ は母相のラーメ定数, λ^*, μ^* は介在物のラーメ定数, ν は母相のポアソン比である. なお $0 < \nu < 0.5$ より, α および β の範囲はそれぞれ $1/3 < \alpha < 1$, $2/5 < \beta < 8/15$ となる. (Appendix 参照)

2.2 両相が共に弾性挙動を示す場合 母相と介在物がいずれも弾性領域にある場合, それらの塑性ひずみ $\bar{\varepsilon}_I^P$ と $\bar{\varepsilon}_M^P$ は 0 となり, また式(5)および(6)より, その塑性ひずみの差および材料全体の塑性ひずみは共に 0 となるため, 式(13)は,

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}^0 &= \left[\frac{3KA}{K - (1-f)\alpha(K - K^*)}, \frac{2\mu B}{\mu - (1-f)\beta(\mu - \mu^*)} \right] \bar{\varepsilon} \\ &\dots \dots \dots (16)\end{aligned}$$

となる. 上式は $\bar{\sigma}^0$ と $\bar{\varepsilon}$ が線形関係にあることを示している. すなわち, 母相と介在物がいずれも弾性領域にある場合, 材料全体も弾性挙動を示すことを表している.

一方, このとき, 式(10)および式(11)は

$$\bar{\sigma}_M = \left[\frac{K - \alpha(K - K^*)}{A}, \frac{\mu - \beta(\mu - \mu^*)}{B} \right] \bar{\sigma}^0 \dots \dots (17)$$

$$\bar{\sigma}_I = \left[\frac{K^*}{A}, \frac{\mu^*}{B} \right] \bar{\sigma}^0 \dots \dots \dots (18)$$

となる. 式(17)および式(18)は $\bar{\sigma}_M$ と $\bar{\sigma}_I$ が共に $\bar{\sigma}^0$ と線形関係にあることを示している. ここで,

$$\left\{ \begin{aligned}\bar{\sigma}_M^T &= (\sigma_{Mx} \quad \sigma_{My} \quad \sigma_{Mz}) \\ \bar{\sigma}_I^T &= (\sigma_{Ix} \quad \sigma_{Iy} \quad \sigma_{Iz}) \\ \bar{\sigma}^0^T &= (\sigma_x^0 \quad \sigma_y^0 \quad \sigma_z^0)\end{aligned}\right. \dots \dots \dots (19)$$

と置くと, 式(17)および式(18)は

$$\left\{ \begin{aligned}\sigma_{Mx} &= \left\{ \frac{K - \alpha(K - K^*)}{3A} + \frac{2\mu - \beta(\mu - \mu^*)}{3B} \right\} \sigma_x^0 + \left\{ \frac{K - \alpha(K - K^*)}{3A} - \frac{\mu - \beta(\mu - \mu^*)}{3B} \right\} \sigma_y^0 \\ &\quad + \left\{ \frac{K - \alpha(K - K^*)}{3A} - \frac{\mu - \beta(\mu - \mu^*)}{3B} \right\} \sigma_z^0 \\ \sigma_{My} &= \left\{ \frac{K - \alpha(K - K^*)}{3A} - \frac{\mu - \beta(\mu - \mu^*)}{3B} \right\} \sigma_x^0 + \left\{ \frac{K - \alpha(K - K^*)}{3A} + \frac{2\mu - \beta(\mu - \mu^*)}{3B} \right\} \sigma_y^0 \\ &\quad + \left\{ \frac{K - \alpha(K - K^*)}{3A} - \frac{\mu - \beta(\mu - \mu^*)}{3B} \right\} \sigma_z^0 \\ \sigma_{Mz} &= \left\{ \frac{K - \alpha(K - K^*)}{3A} - \frac{\mu - \beta(\mu - \mu^*)}{3B} \right\} \sigma_x^0 + \left\{ \frac{K - \alpha(K - K^*)}{3A} - \frac{\mu - \beta(\mu - \mu^*)}{3B} \right\} \sigma_y^0 \\ &\quad + \left\{ \frac{K - \alpha(K - K^*)}{3A} + \frac{2\mu - \beta(\mu - \mu^*)}{3B} \right\} \sigma_z^0\end{aligned}\right.$$

$$\dots\dots\dots (17a)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{lx} &= \left\{ \frac{K^*}{3A} + \frac{2\mu^*}{3B} \right\} \sigma_x^0 + \left\{ \frac{K^*}{3A} - \frac{\mu^*}{3B} \right\} \sigma_y^0 + \left\{ \frac{K^*}{3A} - \frac{\mu^*}{3B} \right\} \sigma_z^0 \\ \sigma_{ly} &= \left\{ \frac{K^*}{3A} - \frac{\mu^*}{3B} \right\} \sigma_x^0 + \left\{ \frac{K^*}{3A} + \frac{2\mu^*}{3B} \right\} \sigma_y^0 + \left\{ \frac{K^*}{3A} - \frac{\mu^*}{3B} \right\} \sigma_z^0 \\ \sigma_{lz} &= \left\{ \frac{K^*}{3A} - \frac{\mu^*}{3B} \right\} \sigma_x^0 + \left\{ \frac{K^*}{3A} - \frac{\mu^*}{3B} \right\} \sigma_y^0 + \left\{ \frac{K^*}{3A} + \frac{2\mu^*}{3B} \right\} \sigma_z^0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18a)$$

となる。

一方、 σ_s を材料の降伏応力とすると、ミーゼスの降伏条件は

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_s^2 \dots\dots\dots (20)$$

となる⁽²²⁾⁽²³⁾。ここで、 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ は主応力である。

2・3 母相が最初に降伏する場合 σ_{s1} を母相の降伏応力とすると、母相が降伏し始めるとき、降伏条件の式(20)が満足される。このとき、母相の応力を $\overline{\sigma_{MC}}^T = (\sigma_{MCx} \ \sigma_{MCy} \ \sigma_{MCz})$ 、材料全体の応力を $\overline{\sigma_c}^T = (\sigma_{cx}^0 \ \sigma_{cy}^0 \ \sigma_{cz}^0)$ とすると、式(20)より、母相の降伏条件は

$$(\sigma_{MCx} - \sigma_{MCy})^2 + (\sigma_{MCy} - \sigma_{MCz})^2 + (\sigma_{MCz} - \sigma_{MCx})^2 = 2\sigma_{s1}^2 \dots\dots\dots (21)$$

となる。したがって、 $\Delta\epsilon^P = 0$ を式(10)に代入し、さらに式(21)に代入すると、

$$\begin{aligned} & (\sigma_{cx}^0 - \sigma_{cy}^0)^2 + (\sigma_{cy}^0 - \sigma_{cz}^0)^2 + (\sigma_{cz}^0 - \sigma_{cx}^0)^2 \\ &= \frac{2B^2}{[\mu - \beta(\mu - \mu^*)]^2} \sigma_{s1}^2 \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

を得る。

σ_{s0} を材料全体の降伏応力とし、材料全体が降伏し始めるとき、材料全体の降伏条件は

$$(\sigma_{cx} - \sigma_{cy})^2 + (\sigma_{cy} - \sigma_{cz})^2 + (\sigma_{cz} - \sigma_{cx})^2 = 2\sigma_{s0}^2 \dots\dots\dots (23)$$

となる。物体の降伏条件は、外力が作用している状態で材料内のある点が塑性変形を起こし始めるときに、応力が満足すべき条件である⁽²²⁾。母相中の点も材料全体に含まれるから、 $\overline{\sigma_c}^0$ と $\overline{\sigma_c}$ は等しく、したがって式(22)と式(23)より次式が成立する。

$$\sigma_{s0} = \frac{B}{\mu - \beta(\mu - \mu^*)} \sigma_{s1} = \left[1 - \frac{f(1-\beta)(\mu - \mu^*)}{(1-\beta)\mu + \beta\mu^*} \right] \sigma_{s1} \dots\dots\dots (24)$$

母相は弾完全塑性体と考えているので、母相降伏後の応力は $\overline{\sigma_{MC}}^T = (\sigma_{MCx} \ \sigma_{MCy} \ \sigma_{MCz})$ で一定である。よって式(10)より、

$$\begin{aligned} \overline{\sigma_M} &= \left[\frac{K - \alpha(K - K^*)}{A}, \frac{\mu - \beta(\mu - \mu^*)}{B} \right] \overline{\sigma^0} \\ &\quad - f \left[\frac{3(\alpha-1)KK^*}{A}, \frac{2(\beta-1)\mu\mu^*}{B} \right] \overline{\Delta\epsilon^P} = \overline{\sigma_{MC}} \\ \therefore \overline{\Delta\epsilon^P} &= \left[\frac{K - \alpha(K - K^*)}{3f(\alpha-1)KK^*}, \frac{\mu - \beta(\mu - \mu^*)}{2f(\beta-1)\mu\mu^*} \right] \overline{\sigma^0} \\ &\quad - \left[\frac{A}{3f(\alpha-1)KK^*}, \frac{B}{2f(\beta-1)\mu\mu^*} \right] \overline{\sigma_{MC}} \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

を得る。母相が降伏してから次に介在物が降伏するまでは、塑性変形は母相のみに存在し、介在物は弾性挙動を示すことから $\overline{\epsilon_I^P} = 0$ となり、次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} \therefore \overline{\Delta\epsilon^P} &= -\overline{\epsilon_M^P}, \quad \overline{\epsilon^P} = (1-f)\overline{\epsilon_M^P} = -(1-f)\overline{\Delta\epsilon^P} \\ (\because \overline{\Delta\epsilon^P} &\equiv \overline{\epsilon_I^P} - \overline{\epsilon_M^P}, \quad \overline{\epsilon^P} \equiv (1-f)\overline{\epsilon_M^P} + f\overline{\epsilon_I^P}) \end{aligned} \dots\dots\dots (26)$$

ここに、 $\overline{\epsilon_M}$ および $\overline{\epsilon_I}$ はそれぞれ母相、介在物の平均ひずみ場を表している。式(25)および式(26)を式(13)に代入すると、次式の応力-ひずみ関係式を得る。

$$\begin{aligned} \overline{\sigma^0} &= \left[\frac{3f(\alpha-1)KK^*}{(\alpha-1)K - (1-f)\alpha K^*}, \frac{2f(\beta-1)\mu\mu^*}{(\beta-1)\mu - (1-f)\beta\mu^*} \right] \overline{\epsilon} \\ &\quad - (1-f) \left[\frac{\alpha K^* - (\alpha-1)K}{(\alpha-1)K - (1-f)\alpha K^*}, \frac{\beta\mu^* - (\beta-1)\mu}{(\beta-1)\mu - (1-f)\beta\mu^*} \right] \overline{\sigma_{MC}} \end{aligned} \dots\dots\dots (27)$$

式(27)および式(16)は応力-ひずみ線図上において傾きの異なる 2 本の直線が降伏点でつながっていることを示している。また式(27)の右辺第一項の係数は母相が降伏後の材料全体の平均硬化速度率を表している。

式(25)を式(11)に代入することで、介在物の応力は次式のように得られる。

$$\overline{\sigma_I} = \frac{1}{f} \overline{\sigma^0} - \frac{1-f}{f} \overline{\sigma_{MC}} \dots\dots\dots (28)$$

次に介在物の降伏応力を σ_{s2} とし、介在物が降伏する場合について考える。このとき、式(20)の降伏条件が満足されるので、介在物の応力を $\overline{\sigma_{IC}}^T = (\sigma_{ICx} \ \sigma_{ICy} \ \sigma_{ICz})$ 、

材料の応力を $\overline{\sigma_U}^T = (\sigma_{ux}^0 \ \sigma_{uy}^0 \ \sigma_{uz}^0)$ とすると、式(20)より、

$$(\sigma_{ICx} - \sigma_{ICy})^2 + (\sigma_{ICy} - \sigma_{ICz})^2 + (\sigma_{ICz} - \sigma_{ICx})^2 = 2\sigma_{s2}^2 \dots\dots\dots (29)$$

となり、介在物の降伏条件が得られる。

その後、材料の応力は増加して、介在物が降伏し始める。このとき、介在物の降伏条件(式(29))が満足される。したがって、式(29)を式(28)に代入すると

$$\overline{\sigma_U}^0 = (1-f)\overline{\sigma_{MC}} + f\overline{\sigma_{IC}} = \overline{\sigma_{MC}} + f(\overline{\sigma_{IC}} - \overline{\sigma_{MC}}) \dots\dots\dots (30)$$

となり、材料全体の最大応力 $\overline{\sigma_U}^0$ が得られる。

介在物も弾完全塑性体と考えているので、介在物が降伏後も応力は $\overline{\sigma_{IC}}^T = (\sigma_{ICx} \ \sigma_{ICy} \ \sigma_{ICz})$ で一定なので、材料の最大応力 $\overline{\sigma_U}^0$ は変化しない。

2・4 介在物が最初に降伏する場合 介在物が最初に降伏する場合、降伏条件の式(29)が初めに満足される。

このときの材料全体の応力を $\overline{\sigma_c}^T = (\sigma_{cx}^0 \ \sigma_{cy}^0 \ \sigma_{cz}^0)$ とする。 $\Delta\epsilon^P = 0$ を式(11)に代入して、さらに降伏条件

の式(29)に代入すると、

$$\begin{aligned} (\sigma_{c^*x}^0 - \sigma_{c^*y}^0)^2 + (\sigma_{c^*y}^0 - \sigma_{c^*z}^0)^2 + (\sigma_{c^*z}^0 - \sigma_{c^*x}^0)^2 &= \frac{2B^2}{\mu^{*2}} \sigma_{s2}^2 \\ \dots \dots \dots (31) \end{aligned}$$

を得る。

物体の降伏条件より前述と同様に $\overline{\sigma_c^0}$ と $\overline{\sigma_c}$ は等しいことから、式(31)および式(23)より次式を得る。

$$\sigma_{s0} = \frac{B}{\mu^*} \sigma_{s2} = \left[1 + \frac{(1-f)(1-\beta)(\mu - \mu^*)}{\mu^*} \right] \sigma_{s2} \quad \dots \dots \dots (32)$$

介在物は弾完全塑性体なので、介在物が降伏した後の応力は $\overline{\sigma_{ic}}^T = (\sigma_{icx}, \sigma_{icy}, \sigma_{icz})$ で一定である。その結果、式(11)より

$$\begin{aligned} \overline{\sigma_i} &= \left[\frac{K^*}{A}, \frac{\mu^*}{B} \right] \overline{\sigma^0} + (1-f) \left[\frac{3(\alpha-1)KK^*}{A}, \frac{2(\beta-1)\mu\mu^*}{B} \right] \\ &\quad \times \Delta \varepsilon^P = \overline{\sigma_{ic}} \\ \therefore \Delta \varepsilon^P &= \left[\frac{A}{3(1-f)(\alpha-1)KK^*}, \frac{B}{2(1-f)(\beta-1)\mu\mu^*} \right] \overline{\sigma_{ic}} \\ &\quad - \left[\frac{1}{3(1-f)(\alpha-1)K}, \frac{1}{2(1-f)(\beta-1)\mu} \right] \overline{\sigma^0} \quad \dots \dots \dots (33) \end{aligned}$$

を得る。介在物が降伏し次に母相が降伏するまでは、塑性変形は介在物のみに存在し、母相は弾性挙動を示すことから、 $\overline{\varepsilon_M^P} = 0$ となり次の関係式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \therefore \Delta \varepsilon^P &= \overline{\varepsilon_i^P}, \quad \overline{\varepsilon^P} = f \overline{\varepsilon_i^P} = f \Delta \varepsilon^P \\ (\because \Delta \varepsilon^P &= \overline{\varepsilon_i^P} - \overline{\varepsilon_M^P}, \quad \overline{\varepsilon^P} = (1-f) \overline{\varepsilon_M^P} + f \overline{\varepsilon_i^P}) \quad \dots \dots \dots (34) \end{aligned}$$

式(33)と式(34)を式(13)に代入すると、応力-ひずみ関係式が次のように得られる。

$$\begin{aligned} \overline{\sigma^0} &= \left[\frac{3(1-f)(\alpha-1)K}{(1-f)\alpha-1}, \frac{2(1-f)(\beta-1)\mu}{(1-f)\beta-1} \right] \overline{\varepsilon} \\ &\quad - f \left[\frac{1}{(1-f)\alpha-1}, \frac{1}{(1-f)\beta-1} \right] \overline{\sigma_{ic}} \quad \dots \dots \dots (35) \end{aligned}$$

式(35)および式(16)は応力-ひずみ線図上において傾きの異なる 2 本の直線が降伏点でつながっていることを示している。また式(35)の右辺第一項の係数は介在物が降伏後の材料全体の平均硬化速度率を表している。

介在物が降伏後の挙動は前節で述べた関係式と同様な方法で求めることができる。最大応力は式(30)と一致する。

3. 解析結果および考察

3.1 母相が最初に降伏する場合 $m = \mu / \mu^*$ と置くと、式(24)は

$$\frac{\sigma_{s0}}{\sigma_{s1}} = 1 - \frac{f(1-\beta)(m-1)}{(1-\beta)m + \beta} \quad \dots \dots \dots (24a)$$

となる。上式より $f = 0$ のとき、 $\sigma_{s0} = \sigma_{s1}$ となり、整合性が認められる。一方、 $m < 1$ のとき、 σ_{s0} が f の増加に伴って増加して $\sigma_{s0} > \sigma_{s1}$ となり、 $m > 1$ のとき、 σ_{s0} が f の増加に伴って減少し、 $\sigma_{s0} < \sigma_{s1}$ となる。

図 1 は母相のポアソン比 $\nu = 0.2$ の場合における

Fig. 1 Relationships between σ_{s1}/σ_{s0} and f at $\nu = 0.2$

Fig. 2 Relationships between σ_{s1}/σ_{s0} and f at $m = 0.01$

σ_{s1}/σ_{s0} と介在物の体積率との関係について整理したものである。これより、 $m > 1$ のとき、 σ_{s1}/σ_{s0} は f の増加に伴って増加し、その際、 m 値が大きいほど、 σ_{s1}/σ_{s0} が増加する割合は大きくなっていることがわかる。また $m < 1$ のとき、 σ_{s1}/σ_{s0} が f の増加に伴って減少し、 m 値が小さいほど、 σ_{s1}/σ_{s0} の減少する割合は大きくなることもわかる。

図 2 は $m = 0.01$ で母相のポアソン比 ν を種々の値に変化させた場合において介在物の体積率 f と σ_{s1}/σ_{s0} との関係について整理したものである。これより、 σ_{s1}/σ_{s0} が f の増加に伴って減少し、母相のポアソン比 ν が大きいほど、 σ_{s1}/σ_{s0} の減少する割合は大きくなることがわかる。

3.2 介在物が最初に降伏する場合 前節と同様にし、式(32)は

$$\frac{\sigma_{s0}}{\sigma_{s2}} = 1 + (1-f)(1-\beta)(m-1) \quad \dots \dots \dots (32a)$$

となる。上式より $f = 1$ のとき、 $\sigma_{s0} = \sigma_{s2}$ となり、整合性が認められる。一方、 $m < 1$ のとき、 σ_{s0} が f の増加に伴って増加し、 $\sigma_{s0} < \sigma_{s2}$ となり、 $m > 1$ のとき、 σ_{s0} が f の増加に伴って減少し、 $\sigma_{s0} > \sigma_{s2}$ となる。

Fig. 3 Relationships between σ_{s2}/σ_{s0} and f at $\nu = 0.2$ Fig. 4 Relationships between σ_{s2}/σ_{s0} and f at $m = 0.01$

図3は母相のポアソン比 $\nu = 0.2$ の場合における介在物の体積率 f と σ_{s2}/σ_{s0} との関係を表したものである。これより、 $f=0$ の時は m が小さくなるにつれて、 σ_{s2}/σ_{s0} の値が大きくなり、また f が1に近づくにつれて、いずれの場合も σ_{s2}/σ_{s0} の値は1に収束することがわかる。

図4は $m = 0.01$ で母相のポアソン比 ν を種々変化させた場合について、介在物の体積率 f と σ_{s2}/σ_{s0} との関係について整理したものである。これより、 $f=0$ の場合は ν が大きいほど σ_{s2}/σ_{s0} の値が大きいが、 f の値が1に近づくにつれて、いずれの場合も σ_{s2}/σ_{s0} の値が1に収束することがわかる。

一方、式(30)より $f=0$ のときは $\overline{\sigma}_U^0 = \overline{\sigma}_{MC}$ 、 $f=1$ のときは $\overline{\sigma}_U^0 = \overline{\sigma}_{IC}$ となり、整合性が認められる。また、 $\sigma_{s1} > 0$ かつ $\sigma_{s2} > 0$ より、式(30)、式(29)および式(21)は $\sigma_{s2} > \sigma_{s1}$ のときは材料の最大応力 $\overline{\sigma}_U^0$ が f に比例して増加し、 $\sigma_{s2} < \sigma_{s1}$ のときは $\overline{\sigma}_U^0$ が f に比例して減少することを示している。

3.3 最初に降伏する判定基準 式(24)と式(32)より、母相が最初に降伏する判定基準は次式で表される。

$$t \equiv \frac{\sigma_{s1}}{\sigma_{s2}} < |m - \beta(m-1)| \quad \dots \dots \dots (36)$$

ここで、 $m = \mu/\mu^*$ である。すなわち、式(36)を満足すれば、母相が最初に降伏し、満足しなければ介在物が最初に降伏する。

実際には介在物の降伏応力が不明であるが、式(24)より母相が最初に降伏する場合の材料全体の降伏応力は次式で計算できる。

$$\sigma_{s0} = \left[1 + \frac{f(1-\beta)(1-m)}{m + \beta(1-m)} \right] \sigma_{s1} \quad \dots \dots \dots (24b)$$

また、式(32)より介在物が最初に降伏する場合の材料全体の降伏応力は、次式で計算できる。

$$\sigma_{s0} = \left[1 + \frac{(1-f)(1-\beta)(\mu - \mu^*)}{\mu^*} \right] \sigma_{s2} \quad \dots \dots \dots (32b)$$

4. 結 言

本論文では、等価介在物の手法とマトリックスの方法を利用して、球形介在物を含む材料の弾塑性挙動について検討した。以下にその結果をまとめる。

(1) 母相と介在物が共に弾性挙動を示し、塑性変形をしないとき、材料全体も弾性挙動を示す。このとき、母相と介在物の応力は共に材料全体の応力と線形関係にある。

(2) 母相が最初に降伏する判定基準は式(36)によって得られる。その場合の材料全体の降伏応力 σ_{s0} は式(24b)で求められる。他方、判定基準式(36)が満足されない場合には介在物が最初に降伏し、その場合の σ_{s0} は式(32b)で求められる。

(3) 母相が最初に降伏する場合の材料全体の降伏応力 σ_{s0} と母相の降伏応力 σ_{s1} との関係、および、介在物が最初に降伏する場合の材料全体の降伏応力 σ_{s0} と介在物の降伏応力 σ_{s2} との関係をそれぞれ導出したところ、整合性があることが判明した。一方、母相または介在物のどちらが最初に降伏しても、介在物のせん断弾性係数 μ^* が母相のせん断弾性係数 μ より大きいとき、材料の降伏応力 σ_{s0} が介在物の体積率 f の増加に伴って増加し、母相のポアソン比 ν が大きいほど、 σ_{s0} の増加する割合は大きくなることが判明した。

(4) 母相または介在物のどちらが最初に降伏しても、材料全体の最大応力 $\overline{\sigma}_U^0$ は母相の降伏応力の分布 $\overline{\sigma}_{MC}$ と介在物の降伏応力の分布 $\overline{\sigma}_{IC}$ に対して線形関係にあることがわかった。また、 $\sigma_{s2} > \sigma_{s1}$ のとき、材料全体の最大応力 $\overline{\sigma}_U^0$ が f に比例して増加し、 $\sigma_{s2} < \sigma_{s1}$ のとき、 $\overline{\sigma}_U^0$ が f に比例して減少することが判明した。

(5) 母相または介在物が最初に降伏するときの材料全体の応力を得た。また、材料全体の応力-ひずみ関係が明らかになった。

最後に、本研究を遂行するにあたり貴重なご討議をいただきました金沢大学大学院自然科学研究科 川岸雄一先生に深く感謝致します。

参 考 文 献

- (1) Hashin, Z. and Shtrikan, S., J. Mech. Phys. Solids 11 (1963), 127-240.
- (2) Hutchinson, J. W., J. Mech. Phys. Solids 12 (1964), 11-24.
- (3) Hutchinson, J. W., Proc. R. Soc. Lond. A319 (1970), 247-272.
- (4) Iwakuma, T. and Nemat-Nasser, S., Proc. R. Soc. Lond. A394 (1984), 87-119.
- (5) Nemat-Nasser, S. and Iwakuma, T., Int. J. Solids Structures 21 (1985), 55-65.
- (6) Mori, T. and Tanaka, K., Acta. Metall, 12, (1973), 571-574.
- (7) Yukio Hirose, Zheng Lin and Toshihiko Sasaki, Journal of Materials Engineering, 139 (1994), 39-46.
- (8) Yukio Hirose, Zheng Lin and Toshihiko Sasaki, Proceedings of the Asian-Pacific Conference on Aerospace Technology and Science. October, (1994), 258-263 Hangzhou, China.
- (9) S. C. Lin, Y. Hirose, T. Mura, Journal of Engineering Materials and Technology. JULY 1994, Vol.116, 359.
- (10) 佐々木敏彦・林政・広瀬幸雄, 機論, 63-606, A(1997), 370-377.
- (11) 斎藤憲司・岩本正治・荒木栄敏・矢野直義, 機論, 58-548, A(1992), 614-620.
- (12) 荒木栄敏・岩本正治・斎藤憲司, 機論, 58-552, A(1992), 1495-1501.
- (13) 斎藤憲司・岩本正治・荒木栄敏・上辻延幸, 機論, 59-563, A(1993), 1702-1708.
- (14) 荒木栄敏・斎藤憲司・岩本正治, 機論, 59-563, A(1993), 1709-1714.
- (15) 荒木栄敏・斎藤憲司, 機論, 62-594, A(1996), 321-327.
- (16) 荒木栄敏・斎藤憲司, 機論, 62-596, A(1996), 937-944.
- (17) 片岡保人・斎藤誠・田谷稔, 機論 63-614, A(1997), 2213-2219.
- (18) 片岡保人・田谷稔, 機論, 65-631, A(1999), 523-529.
- (19) 村・森, “マイクロメカニックス”, (1978), 培風館.
- (20) S. C. Lin, C. C. Yang and T. Mura, J. Solids Structures

Vol. 29. No. 14/15. (1992), 1859-1872.

- (21) J. D. Eshelby: Proc. Roy. Soc. Lond., A241(1957), 376.
- (22) Yongqiu Jiang and Xiaying Mu, Mechanics, Publishing House of Machine Industry, (1981), 29, 25.
- (23) 川田・河本・横堀・宮川, 編集 “材料強度工学ハンドブック”, 24, 朝倉書店.

Appendix

特殊な対称のマトリックス $\bar{A}$ は, 次のように表すことができる.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = \frac{a+2b}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{a-b}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \dots \dots \dots (A1)$$

$\alpha = a+2b$ と $\beta = a-b$ とおくと, 式(A1)は次のように表される.

$$\bar{A} = [\alpha, \beta] = \alpha \bar{I}_1 + \beta \bar{I}_2 \quad \dots \dots \dots (A2)$$

ここで,

$$\bar{I}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{I}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

である. このようなマトリックス $\bar{I}_1$ と $\bar{I}_2$ は, 次のような性質を持つことは明らかである.

$$\left. \begin{aligned} \bar{I}_1 + \bar{I}_2 &= \bar{I} \\ \bar{I}_1 \times \bar{I}_2 &= \bar{I}_2 \times \bar{I}_1 = 0 \\ \bar{I}_1 \times \bar{I}_1 &= \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \times \bar{I}_2 &= \bar{I}_2 \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (A3)$$

ここで, $\bar{I}$ は単位マトリックスである. 式(A3)を利用して, 次のような性質が得られる.

$$\left. \begin{aligned} [1,1] &= \bar{I} \\ [\alpha_1, \beta_1] \pm [\alpha_2, \beta_2] &= [\alpha_1 \pm \alpha_2, \beta_1 \pm \beta_2] \\ [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2] &= [\alpha_1 \times \alpha_2, \beta_1 \times \beta_2] \\ [\alpha, \beta]^{-1} &= \left[\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta} \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots (A4)$$