偏平回転だ円体状介在物を有する厚板の軸対称曲げ*

土田 栄一郎^{*1}, 荒居 善雄^{*1}, 鄭 穎^{*2}

Stresses in a Thick Plate Containing an Oblate Spheroidal Inclusion Under Axisymmetric Bending

Eiichiro TSUCHIDA^{*3}, Yoshio ARAI and Ying ZHENG^{*3} Saitama University, Department of Mechanical Engineering,
255 Shimo Ohkubo, Saitama-shi, Saitama, 338-8570 Japan

The paper presents an axisymmetric solution for the stresses and displacements in an elastic thick plate containing an oblate spheroidal inclusion under axisymmetric bending around the z axis. The related spherical cavity and inclusion problems were solved by Tsuchida et al. in 1975. by using Papcovich-Neuber displacement potentials. We extended the method to spheroidal inclusion problem.

Key Words: Elasticity, Micromechanics, Stress Concentration, Thick Plate, Inclusion, Oblate Spheroidal Inclusion

1. はじめに

近年, FRP, 繊維強化金属(MMC), セラミックス, 傾斜機能材料などの新材料が開発され, さまざまな用途に用いられている。このような複合材料の強度は介在物の大きさ, 弾性係数, 形状, 作用する荷重の種類などに大きく依存する。したがって, この応力集中の現象を解明することは, 機械, 構造物の強度設計上, 非常に重要な課題となっている。

介在物を有する弾性体の問題は, Goodier⁽¹⁾(1933), Edwards⁽²⁾(1951), Eshelby⁽³⁾(1957), Fox⁽⁴⁾(1960), Mura⁽⁵⁾(1971), Asaro と Barnett⁽⁶⁾(1975)等, 多くの研究者によって研究されてきた。厚板内に球か, あるいは球状介在物が存在し, 種々の荷重を受ける問題については, 1959 年 Ling が Michell の重調和関数を用いて, 球かを有する厚板の二軸一様引張問題⁽⁷⁾を解析したのを始めとし, 球かあるいは球状介在物を有する厚板の軸対称問題⁽⁹⁾, 非軸対称問題ならびに偏心球かを有する厚板の問題等が解析され, 設計上有用な結果

が導かれてきた。だ円体状空か, 介在物の問題も 1949 年 Sadowsky と Sternberg⁽⁹⁾が回転だ円体状空かをもつ無限体の一軸引張りを解析したのを始めとして, その後多くの研究者によって解析されている。球か, 球状介在物を有する厚板の軸対称曲げの問題⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾について 1975 年土田らにより Papcovich-Neuber の変位関数を用いて解析されてきた。また著者らは偏平回転だ円体状空かあるいは介在物を有する円柱⁽¹²⁾, 半無限体⁽¹³⁾, 厚板⁽¹⁴⁾, 2 個の偏平回転だ円体状空かを有する無限体⁽¹⁵⁾について解析してきた。

本研究は, 厚板内に偏平回転だ円体状介在物が存在し, 無限遠方において, 軸対称曲げ荷重を受ける問題を三次元弾性論に基いて厳密に解析したものである。

解析においては, Papcovich-Neuber の変位関数 φ_0, φ_3 を用い, 回転だ円体調和関数および円柱調和関数を与え, 異なる座標系で表された解を互いに座標変換することによって, 介在物境界面の境界条件と厚板上下面の境界条件を同時に満足させた。さらに, 理論解に基づいて数値計算を行い, 介在物近傍の応力分布ならびに最大応力に及ぼす介在物の大きさ, 形状比および剛性率比による影響を明らかにした。

* 原稿受付 2001 年 10 月 9 日。

^{*1} 正員, 埼玉大学工学部(〒338-8570 さいたま市下大久保 255)。^{*2} 埼玉大学大学院。

E-mail: tsuchida@mech.saitama-u.ac.jp

2. 解析方法

図1に示すように、板厚の半分の単位長さとし、すべての長さの基準にとり、偏平回転だ円体状介在物の長軸、短軸の長さおよび焦点間距離をそれぞれ $2a$, $2b$, $2c$ とし、母材および介在物の横弾性係数をそれぞれ G , $\bar{G}$ また、ポアソン比を ν , $\bar{\nu}$ とする。偏平回転だ円体状介在物の中心 O を座標原点として円柱座標 (r, θ, z) と偏平回転だ円体座標 (α, β, γ) を用い、両座標の間には次のような関係がある。

$$\begin{aligned} r &= c \cosh \alpha \sin \beta = c \bar{\xi} \bar{\eta} \\ \theta &= \gamma \\ z &= c \sinh \alpha \cos \beta = c \xi \eta \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで $\xi = \sinh \alpha$, $\bar{\xi} = \cosh \alpha$, $\eta = \cos \beta$, $\bar{\eta} = \sin \beta$ である。

本研究では、軸対称の場合、Papcovich-Neuber あるいは Boussinesq の変位関数として二つの調和関数 (φ_0, φ_3) を用いる。

$$\begin{aligned} 2Gu_x &= \frac{\partial}{\partial x}(\varphi_0 + z\varphi_3) \\ 2Gu_y &= \frac{\partial}{\partial y}(\varphi_0 + z\varphi_3) \\ 2Gu_z &= \frac{\partial}{\partial z}(\varphi_0 + z\varphi_3) - 4(1-\nu)\varphi_3 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 G は横弾性係数、 ν はポアソン比である。偏平回転だ円体状介在物の境界面で完全接着であるとすれば、境界条件は以下になる。

- (i) 厚板上下面 $z = \pm 1$ において
 $(\sigma_z)_{z=\pm 1} = (\tau_{zr})_{z=\pm 1} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$
 (ii) 介在物境界面 $\alpha = \alpha_0$ において
 $(u_\alpha)_{\alpha=\alpha_0} = (\bar{u}_\alpha)_{\alpha=\alpha_0}, (u_\beta)_{\alpha=\alpha_0} = (\bar{u}_\beta)_{\alpha=\alpha_0}$

Fig. 1 Coordinate system

$$(\sigma_\alpha)_{\alpha=\alpha_0} = (\bar{\sigma}_\alpha)_{\alpha=\alpha_0}, (\tau_{\alpha\beta})_{\alpha=\alpha_0} = (\bar{\tau}_{\alpha\beta})_{\alpha=\alpha_0} \quad \dots\dots\dots (4)$$

(iii) 無限遠方 $r \rightarrow \infty$ において

$$\sigma_x = \sigma_y = kz, \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで $k = 3/2M$ であり、“ $-$ ”の記号は介在物に関する諸量を表す。

そこで、境界条件(i), (ii), (iii)を満足する解を導くために、母材領域および介在物領域の変位関数 φ_0, φ_3 に次のような調和関数を与える。

母材領域 ($\alpha > \alpha_0$) において

$$[I] \left\{ \begin{aligned} \varphi_0 &= -\frac{(1-2\nu)}{12(1+\nu)} kc^3 \xi \eta (2\xi^2 \eta^2 - 3\bar{\xi}^2 \bar{\eta}^2) \\ \varphi_3 &= -\frac{k}{4(1+\nu)} c^2 (2\xi^2 \eta^2 - \bar{\xi}^2 \bar{\eta}^2) \end{aligned} \right. \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$[II] \left\{ \begin{aligned} \varphi_0 &= k \sum_{m=0}^{\infty} A_m q_{2m+1}(\xi) P_{2m+1}(\eta) \\ \varphi_3 &= k \sum_{m=0}^{\infty} B_m q_{2m}(\xi) P_{2m}(\eta) \end{aligned} \right. \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$[III] \left\{ \begin{aligned} \varphi_0 &= k \int_0^\infty \phi_1(\lambda) J_0(\lambda r) \sinh(\lambda z) d\lambda \\ \varphi_3 &= k \int_0^\infty \lambda \phi_2(\lambda) J_0(\lambda r) \cosh(\lambda z) d\lambda \end{aligned} \right. \quad \dots\dots\dots (8)$$

介在物領域 ($\alpha < \alpha_0$) において

$$[IV] \left\{ \begin{aligned} \varphi_0 &= k \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n p_{2n+1}(\xi) P_{2n+1}(\eta) \\ \varphi_3 &= k \sum_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n p_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta) \end{aligned} \right. \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで $A_m, B_m, \bar{A}_n, \bar{B}_n, \phi_1(\lambda), \phi_2(\lambda)$ は境界条件により決定される未定係数および未知関数であり、 $P_n(\eta)$ は n 次のルジャンドル関数であり、 $p_n(\xi), q_n(\xi)$ は n 次の第一種および第二種変形ルジャンドル関数であり、 $q_n(\xi) = i^{n+1} Q_n(i\xi)$, $p_n(\xi) = (-i)^n P_n(i\xi)$, $J_n(\lambda r)$ は n 次の第一種ベッセル関数である。

変位関数 [I] より導かれる変位および応力を偏平回転だ円体座標で表すと以下のようにになる。

$$\begin{aligned} \frac{2Gu_\alpha}{kh\bar{\xi}} &= -\frac{c^3}{5(1+\nu)} [(\xi^2 - 1 + \nu\bar{\xi}^2)P_3(\eta) \\ &\quad + \{(4\nu - 1)\xi^2 + 1 - \nu\}P_1(\eta)] \\ \frac{2Gu_\beta}{kh\bar{\eta}} &= \frac{c^3\xi}{15(1+\nu)} [\{\bar{\xi}^2 + (\xi^2 - 1)\nu\}P_3'(\eta) \\ &\quad + \{3\bar{\xi}^2 - \nu(2\xi^2 + 3)\}P_1'(\eta)] \\ \frac{\sigma_\alpha}{kc^2h^4} &= -c^3\xi^3 \left\{ \frac{8}{63}P_5(\eta) + \left(\frac{2}{5}\xi^2 + \frac{2}{45}\right)P_3(\eta) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{2}{5}\xi^2 + \frac{6}{35}\right)P_1(\eta) \right\} \\ \frac{\sigma_\beta}{kc^2h^4} &= c^3\xi\bar{\xi}^3 \left\{ \frac{8}{63}P_5(\eta) + \left(\frac{2}{5}\xi^2 + \frac{4}{9}\right)P_3(\eta) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{3}{5}\xi^2 + \frac{3}{7}\right)P_1(\eta) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r}{k} &= c\xi P_1(\eta) \\ \frac{\tau_{\theta\beta}}{kc^2h^4\xi\bar{\eta}} &= c^3\xi^2\left\{\frac{8}{315}P_5'(\eta)+\left(\frac{2}{15}\xi^2+\frac{4}{45}\right)\right. \\ &\quad \times P_3'(\eta)+\left(\frac{1}{5}\xi^2+\frac{3}{35}\right)P_1'(\eta)\Big\} \\ &\quad \dots\dots\dots(10) \end{aligned}$$

また、直角座標では

$$\begin{aligned} 2Gu_x &= \frac{1-\nu}{(1+\nu)}kzx, \quad 2Gu_y = \frac{1-\nu}{(1+\nu)}kyz \\ 2Gu_z &= -\frac{k}{2(1+\nu)}\{(1-\nu)(x^2+y^2)+2\nu z^2\} \\ \sigma_x &= \sigma_y = kz \quad \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \\ &\quad \dots\dots\dots(11) \end{aligned}$$

となる。

また、変位関数[II], [III]より与えられる応力は無限遠方ですべて、零となっている。したがって、無限遠方における境界条件(iii)は自動的に満足される。

まず、厚板上下面における境界条件(i)を満足させ

るために、偏平回転だ円体調和関数と円柱調和関数との関係式

$$\begin{aligned} q_n(\xi)P_n(\eta) &= c \int_0^\infty J_0(\lambda r)j_n(\lambda c)e^{-\lambda z}d\lambda \quad (z>0) \\ q_n(\xi)P_n(\eta) &= (-1)^n c \int_0^\infty J_0(\lambda r)j_n(\lambda c)e^{\lambda z}d\lambda \\ &\quad (z<0) \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

を用いて変位関数[II]をベッセル関数を含む積分形で表すと

$$\begin{aligned} [\text{II}^*] \Big\{ \begin{aligned} \varphi_0 &= k \sum_{m=0}^\infty A_m \int_0^\infty J_0(\lambda r)j_{2m+1}(\lambda c)e^{-\lambda z}d\lambda \\ \varphi_3 &= k \sum_{m=0}^\infty B_m \int_0^\infty J_0(\lambda r)j_{2m}(\lambda c)e^{-\lambda z}d\lambda \end{aligned} \right. \\ &\quad (z>0) \dots\dots\dots(13) \end{aligned}$$

となる。

変位関数[I], [II*], [III]から各応力成分を求め、厚板上面の境界条件(i)を満足させる、また、 $z<0$ についても関係式(12)を用いて変換し、同様にして厚板下面の境界条件を満足させると

$$\begin{aligned} \pm\left(\frac{\sigma_z}{k}\right)_{z\pm 1} &= \int_0^\infty \lambda^2 \left[\phi_1(\lambda) \sinh \lambda + \phi_2(\lambda) \{ \lambda \cosh \lambda - 2(1-\nu) \sinh \lambda \} + \sum_{m=0}^\infty c \left\{ A_m j_{2m+1}(\lambda c) + \frac{1}{\lambda} B_m \right. \right. \\ &\quad \times (\lambda + 2 - 2\nu) j_{2m}(\lambda c) \Big\} e^{-\lambda} \Big] J_0(\lambda r) d\lambda = 0 \dots\dots\dots(14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tau_{zr}}{k}\right)_{z\pm 1} &= \int_0^\infty \lambda^2 \left[-\phi_1(\lambda) \cosh \lambda + \phi_2(\lambda) \{ (1-2\nu) \cosh \lambda - \lambda \sinh \lambda \} + \sum_{m=0}^\infty c \left\{ A_m j_{2m+1}(\lambda c) + \frac{1}{\lambda} B_m \right. \right. \\ &\quad \times (\lambda + 1 - 2\nu) j_{2m}(\lambda c) \Big\} e^{-\lambda} \Big] J_1(\lambda r) d\lambda = 0 \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

となる。

ここで、式(14), (15)にHankelの逆変換を施し、未知関数 $\phi_1(\lambda)$, $\phi_2(\lambda)$ を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} \phi_1(\lambda) &= \sum_{m=0}^\infty c \{ A_m j_{2m+1}(\lambda c) f_1(\lambda) + B_m j_{2m}(\lambda c) f_2(\lambda) \}, \quad \phi_2(\lambda) = \sum_{m=0}^\infty c \{ A_m j_{2m+1}(\lambda c) f_3(\lambda) + B_m j_{2m}(\lambda c) f_4(\lambda) \} \\ &\quad \dots\dots\dots(16) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} f_1(\lambda) &= \frac{3-4\nu-2\lambda-e^{-2\lambda}}{\sinh 2\lambda-2\lambda}, \quad f_2(\lambda) = \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)-2\lambda^2}{\lambda(\sinh 2\lambda-2\lambda)}, \quad f_3(\lambda) = \frac{2}{\sinh 2\lambda-2\lambda}, \quad f_4(\lambda) = \frac{3-4\nu+2\lambda+e^{-2\lambda}}{\lambda(\sinh 2\lambda-2\lambda)} \\ &\quad \dots\dots\dots(17) \end{aligned}$$

である。

次に介在物境界面における境界条件(ii)を満足させるために、円柱調和関数と偏平回転だ円体調和関数との関係式

$$\begin{aligned} J_0(\lambda r) \cosh(\lambda z) &= \sum_{n=0}^\infty (4n+1) j_n(\lambda c) p_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta) \\ J_0(\lambda r) \sinh(\lambda z) &= \sum_{n=0}^\infty (4n+3) j_n(\lambda c) p_{2n+1}(\xi) P_{2n+1}(\eta) \end{aligned} \dots\dots\dots(18)$$

を用いて変位関数[III]を書き改めると

$$[\text{III}^*] \Big\{ \begin{aligned} \varphi_0 &= k \sum_{n=0}^\infty \alpha_n p_{2n+1}(\xi) P_{2n+1}(\eta) \\ \varphi_3 &= k \sum_{n=0}^\infty \beta_n p_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta) \end{aligned} \right. \dots\dots\dots(19)$$

となる。

ここで

$$\begin{aligned}\alpha_n &= c(4n+3) \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ A_m \int_0^{\infty} f_1(\lambda) j_{2m+1}(\lambda c) j_{2n+1}(\lambda c) d\lambda + B_m \int_0^{\infty} f_2(\lambda) j_{2m}(\lambda c) j_{2n+1}(\lambda c) d\lambda \right\} \\ \beta_n &= c(4n+1) \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ A_m \int_0^{\infty} \lambda f_3(\lambda) j_{2m+1}(\lambda c) j_{2n}(\lambda c) d\lambda + B_m \int_0^{\infty} \lambda f_4(\lambda) j_{2m}(\lambda c) j_{2n}(\lambda c) d\lambda \right\}\end{aligned}\quad (20)$$

そこで、変位関数 [I], [II], [III*], [IV] より変位と応力成分を求め、介在物境界面の境界条件式 (ii) を満足させると、次のようになる。

(i) 変位 $(u_a)_{a=a_0} = (\bar{u}_a)_{a=a_0}$ より

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \left[k_{A1} A_n + k_{B1} B_n + k_{B2} B_{n+1} + k_{a1} \alpha_n + k_{\beta 1} \beta_n + k_{\beta 2} \beta_{n+1} - \frac{1}{F} (\bar{k}_{A1} \bar{A}_n + \bar{k}_{B1} \bar{B}_n + \bar{k}_{B2} \bar{B}_{n+1}) \right] P_{2n+1}(\eta) \\ = \frac{c^3}{5(1+\nu)} \left[(\xi_0^2 - 1 + \nu \bar{\xi}_0^2) P_3(\eta) + \{(4\nu - 1)\xi_0^2 + 1 - \nu\} P_1(\eta) \right]\end{aligned}\quad (21)$$

(ii) 変位 $(u_\beta)_{a=a_0} = (\bar{u}_\beta)_{a=a_0}$ より

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \left[l_{A1} A_n + l_{B1} B_n + l_{B2} B_{n+1} + l_{a1} \alpha_n + l_{\beta 1} \beta_n + l_{\beta 2} \beta_{n+1} - \frac{1}{F} (\bar{l}_{A1} \bar{A}_n + \bar{l}_{B1} \bar{B}_n + \bar{l}_{B2} \bar{B}_{n+1}) \right] P'_{2n+1}(\eta) \\ = -\frac{c^3 \xi_0}{15(1+\nu)} \left[\{\bar{\xi}_0^2 + (\xi_0^2 - 1)\nu\} P'_3(\eta) + \{3(\xi_0^2 + 1) - \nu(2\xi_0^2 + 3)\} 3P'_1(\eta) \right]\end{aligned}\quad (22)$$

(iii) 応力 $(\sigma_a)_{a=a_0} = (\bar{\sigma}_a)_{a=a_0}$ より

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \left[s_{A1} A_{n-1} + s_{A2} A_n + s_{A3} A_{n+1} + s_{B1} B_{n-1} + s_{B2} B_n + s_{B3} B_{n+1} + s_{B4} B_{n+2} + s_{a1} \alpha_{n-1} + s_{a2} \alpha_n + s_{a3} \alpha_{n+1} + s_{\beta 1} \beta_{n-1} \right. \\ \left. + s_{\beta 2} \beta_n + s_{\beta 3} \beta_{n+1} + s_{\beta} \beta_{n+2} - (\bar{s}_{A1} \bar{A}_{n-1} + \bar{s}_{A2} \bar{A}_n + \bar{s}_{A3} \bar{A}_{n+1} + \bar{s}_{B1} \bar{B}_{n-1} + \bar{s}_{B2} \bar{B}_n + \bar{s}_{B3} \bar{B}_{n+1} \right. \\ \left. + \bar{s}_{B4} \bar{B}_{n+2}) \right] P_{2n+1}(\eta) = c_3 \xi_0^3 \left[\frac{8}{63} P_5(\eta) + \left(\frac{2}{5} \xi_0^2 + \frac{2}{45} \right) P_3(\eta) - \left(\frac{2}{5} \xi_0^2 + \frac{6}{35} \right) P_1(\eta) \right]\end{aligned}\quad (23)$$

(iv) 応力 $(\tau_{a\beta})_{a=a_0} = (\bar{\tau}_{a\beta})_{a=a_0}$ より

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \left[t_{A1} A_{n-1} + t_{A2} A_n + t_{A3} A_{n+1} + t_{B1} B_{n-1} + t_{B2} B_n + t_{B3} B_{n+1} + t_{B4} B_{n+2} + t_{a1} \alpha_{n-1} + t_{a2} \alpha_n + t_{a3} \alpha_{n+1} + t_{\beta 1} \beta_{n-1} \right. \\ \left. + t_{\beta 2} \beta_n + t_{\beta 3} \beta_{n+1} + t_{\beta} \beta_{n+2} - (\bar{t}_{A1} \bar{A}_{n-1} + \bar{t}_{A2} \bar{A}_n + \bar{t}_{A3} \bar{A}_{n+1} + \bar{t}_{B1} \bar{B}_{n-1} + \bar{t}_{B2} \bar{B}_n + \bar{t}_{B3} \bar{B}_{n+1} \right. \\ \left. + \bar{t}_{B4} \bar{B}_{n+2}) \right] P'_{2n+1}(\eta) = -c^3 \xi_0^2 \left[\frac{8}{315} P'_5(\eta) + \left(\frac{2}{15} \xi_0^2 + \frac{4}{45} \right) P'_3(\eta) + \left(\frac{1}{5} \xi_0^2 + \frac{3}{35} \right) P'_1(\eta) \right]\end{aligned}\quad (24)$$

ここで

$$\begin{aligned}k_{A1} &= q'_{2n+1}(\xi_0), \quad k_{B1} = \frac{c(2n+1)}{(4n+1)} \{ \xi_0 q'_{2n}(\xi_0) - (3-4\nu) q_{2n}(\xi_0) \}, \quad k_{B2} = \frac{2c(n+1)}{(4n+5)} \{ \xi_0 q'_{2n+2}(\xi_0) \\ &\quad - (3-4\nu) q_{2n+2}(\xi_0) \} \\ l_{A1} &= -q_{2n+1}(\xi_0), \quad l_{B1} = -\frac{c\xi_0}{(4n+1)} q_{2n}(\xi_0) (2n-3+4\nu), \quad l_{B2} = -\frac{c\xi_0}{(4n+5)} q_{2n+2}(\xi_0) (2n+6-4\nu) \\ s_{A1} &= -\frac{(2n+1)(2n)}{(4n+1)(4n-1)} \{ (2n-1) q_{2n-1}(\xi_0) - \xi_0 q'_{2n-1}(\xi_0) - \bar{\xi}_0^2 q'_{2n-1}(\xi_0) \} \\ s_{A2} &= \frac{1}{(4n+5)(4n+1)} \{ \{(4n+5)(4n+1)\xi_0^2 + (8n^2+12n+3)\} \bar{\xi}_0^2 q'_{2n+1}(\xi_0) - 2(4n^2+6n+1) \\ &\quad \times \xi_0 q'_{2n+1}(\xi_0) + (2n+2)(2n+1) q_{2n+1}(\xi_0) \} \\ s_{A3} &= \frac{(2n+3)(2n+2)}{(4n+7)(4n+5)} \{ \bar{\xi}_0^2 q'_{2n+3}(\xi_0) + \xi_0 q'_{2n+3}(\xi_0) + (2n+4) q_{2n+3}(\xi_0) \} \\ s_{B1} &= \frac{c(2n+1)(2n)(2n-1)}{(4n+1)(4n-1)(4n-3)} [\xi_0 \bar{\xi}_0^2 q'_{2n-2}(\xi_0) + \{ \xi_0^2 - 2(1-\nu) \bar{\xi}_0^2 \} q'_{2n-2}(\xi_0) - 2(n-1)(1-2\nu) \xi_0 q_{2n-2}(\xi_0)] \\ s_{B2} &= \frac{c(2n+1)}{(4n+5)(4n+1)(4n-1)} [\{(4n+5)(4n-1)\xi_0^2 + 3(4n^2+4n-1)\} \xi_0 \bar{\xi}_0^2 q'_{2n}(\xi_0) \\ &\quad - \{(4n^2+4n-2)\xi_0^2 + 2(1-\nu)\{(4n+5)(4n-1)\xi_0^2 + 3(4n^2+4n-1)\} \bar{\xi}_0^2 \} q'_{2n}(\xi_0) \\ &\quad - 2n\{(4n^2+2n-3)(1-2\nu) - 2\nu(4n+5)(4n-1)\xi_0^2\} \xi_0 q_{2n}(\xi_0)] \\ s_{B3} &= \frac{2c(n+1)}{(4n+7)(4n+5)(4n+1)} [\{(4n+7)(4n+1)\xi_0^2 + 3(4n^2+8n+2)\} \xi_0 \bar{\xi}_0^2 q'_{2n+2}(\xi_0) \\ &\quad - \{(4n^2+8n+1)\xi_0^2 + 2(1-\nu)\{(4n+7)(4n+1)\xi_0^2 + 3(4n^2+8n+2)\} \bar{\xi}_0^2 \} \xi_0 q'_{2n+2}(\xi_0) \\ &\quad \times \bar{\xi}_0^2 q'_{2n+2}(\xi_0) + (2n+3)\{(4n^2+10n+3)(1-2\nu) - 2\nu(4n+7)(4n+1)\xi_0^2\} \xi_0 q_{2n+2}(\xi_0)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{B4} &= \frac{c(2n+4)(2n+3)(2n+2)}{(4n+9)(4n+7)(4n+5)} [\xi_0 \bar{\xi}_0^2 q_{2n+4}'(\xi_0) + \{\xi_0^2 - 2(1-\nu) \bar{\xi}_0^2\} q_{2n+4}'(\xi_0) + (2n+5)(1-2\nu) \xi_0 q_{2n+4}(\xi_0)] \\
t_{A1} &= -\frac{4n(n-1)}{(4n+1)(4n-1)} q_{2n-1}'(\xi_0) \\
t_{A2} &= -\frac{1}{(4n+5)(4n+1)} [\{ (4n+5)(4n+1) \xi_0^2 + 4n(2n+3) \} q_{2n+1}'(\xi_0) - (4n+5)(4n+1) \xi_0 q_{2n+1}(\xi_0)] \\
t_{A3} &= -\frac{(2n+5)(2n+3)}{(4n+7)(4n+5)} q_{2n+3}'(\xi_0) \\
t_{B1} &= \frac{c(2n)(2n-1)}{(4n+1)(4n-1)(4n-3)} [2(2-\nu-n) \xi_0 q_{2n-2}'(\xi_0) + 2(n-1)(1-2\nu) q_{2n-2}(\xi_0)] \\
t_{B2} &= \frac{c}{(4n+5)(4n+1)(4n-1)} [\{ (1-2\nu-2n)(4n+5)(4n-1) \xi_0^2 - 6n(4n^2+4n-2) + 2(1-\nu) \\
&\quad \times (4n^2+6n-1) \} \xi_0 q_{2n}'(\xi_0) + \{ 4(1-\nu)n(4n+5)(4n-1) \xi_0^2 + 6(1-2\nu)n(4n^2+4n-2) \} q_{2n}(\xi_0)] \\
t_{B3} &= -\frac{c}{(4n+7)(4n+5)(4n+1)} [\{ (2n+4-2\nu)(4n+7)(4n+1) \xi_0^2 + 3(4n^2+8n+1)(2n+3) \\
&\quad + 2(1-\nu)(4n^2+6n-1) \} \xi_0 q_{2n+2}'(\xi_0) - \{ 2(1-\nu)(2n+3)(4n+7)(4n+1) \xi_0^2 + 3(1-2\nu) \\
&\quad \times (2n+3)(4n^2+8n+1) \} q_{2n+2}(\xi_0)] \\
t_{B4} &= \frac{c(2n+4)(2n+3)}{(4n+9)(4n+7)(4n+5)} [(2\nu-2n-7) \xi_0 q_{2n+4}'(\xi_0) + (2n+5)(1-2\nu) q_{2n+4}(\xi_0)]
\end{aligned}$$

となる。

ここで、 $\xi_0 = \sinh \alpha_0$ 、 $''''$ はそれぞれの変数による微分を表す。 $\Gamma = \bar{G}/G$ は、介在物と母体の剛性率比を表し、 $\Gamma=0$ は空かを、 $\Gamma=\infty$ は剛体介在物を表す。

また、 $k_{a1}, k_{\beta 1}, k_{\beta 2}, l_{a1}, l_{\beta 1}, l_{\beta 2}, s_{ai}, s_{\beta j}, t_{ai}, t_{\beta j}$ ($i=1\sim 3, j=1\sim 4$) はそれぞれ $k_{A1}, k_{B1}, k_{B2}, l_{A1}, l_{B1}, l_{B2}, s_{Ai}, s_{Bj}, t_{Ai}, t_{Bj}$ に含まれる第二種変形ルジャンドル関数 $q_n(\xi_0)$ を第一種ルジャンドル関数 $p_n(\xi_0)$ に置き換えたものである。同様に $\bar{k}_{a1}, \bar{k}_{\beta 1}, \bar{k}_{\beta 2}, \bar{l}_{a1}, \bar{l}_{\beta 1}, \bar{l}_{\beta 2}, \bar{s}_{ai}, \bar{s}_{\beta j}, \bar{t}_{ai}, \bar{t}_{\beta j}$ ($i=1\sim 3, j=1\sim 4$) も $q_n(\xi_0)$ を $p_n(\xi_0)$ に置き換え、 ν を $\bar{\nu}$ に置き換えたものである。

β の値に無関係に境界条件を満足させるために、式(21)～(24)をそれぞれ、 $P_{2n+1}(\eta), P_{2n+1}'(\eta)$ の各係数を等値すれば、 $A_n, B_n, \bar{A}_n, \bar{B}_n$ に関する無限連立一次方程式が得られる。これらを $A_n, B_n, \bar{A}_n, \bar{B}_n$ について解けば、本問題の解は、完全に求められる。

そして、全体の変位および応力各成分は、母材では [I], [II], [III*] を重ね合わせ、介在物では [IV] を用いて得られる。

3. 数値計算および考察

母材と介在物ポアソン比 $\nu = \bar{\nu} = 0.3$ として計算を行った。剛性率比 $\Gamma = \bar{G}/G$ 、形状比 $\bar{s} = b/a$ および介在物の大きさ b を変えて計算した。計算にあたっては、式(19)の a_n, β_n に含まれる積分値が必要となるが、これはシンプソン則によって数値積分を行って求めた。すべての無限級数の収束は良好であるが、介在物が大きくなるとともに次第に悪くなるので、 $A_n, B_n, \bar{A}_n, \bar{B}_n$ を 15 項として連立方程式を解いた。特に $q_n(\xi)$ は漸化式で計算すると $n=30$ までしか計算でき

ない。

介在物が軟らかい場合および硬い場合の代表として、剛性率比 Γ にそれぞれ 0.5, 2 を選び、形状比 $\bar{s} = b/a = 0.5$ として計算した。

なお、数値計算にあたっては、埼玉大学情報処理センターの HITACS-820 を使用した。

応力の対称性を考慮して、板の上半分 ($\varphi = 0^\circ \sim 90^\circ$) について考える。 $\sigma_a, \sigma_\beta, \sigma_r$ は $\varphi = 90^\circ$ に対して逆対称で、 $\tau_{a\beta}$ は対称の分布をする。

まず、介在物境界面上の応力分布を図 2～5 に示す。介在物境界面では β の代わりに球座標の φ を用いた。介在物境界面においては、 φ は β と $\tan \varphi = a/b \tan \beta$ の関係がある。

図 2 は母材側の応力 σ_β の分布である。介在物が軟らかい場合、 σ_β は $\varphi = 0^\circ$ で引張応力の極大値をとり、 $\varphi = 80^\circ$ 付近で引張応力から圧縮応力へ変化する。引張応力場に圧縮応力が生じるのは注目すべき現象である。介在物の大きさが大きいほど、すなわち介在物が自由平面に近づくほど、応力が大きくなる。 $\varphi = 90^\circ$ では $\sigma_\beta = 0$ となる。介在物が硬い場合、板の上半分の σ_β は常に引張応力を示す。介在物の大きさによる影響は、軟らかい場合と同様に $\varphi = 0$ で最も大きく、 $\varphi = 90^\circ$ で零となり、短半軸 b が大きいほど応力は増加する。

図 3 は介在物側の応力 $\bar{\sigma}_\beta$ の分布である。介在物が軟らかい場合、 $\bar{\sigma}_\beta$ は $\varphi = 0^\circ$ で引張応力の極大値をとり、 $\varphi = 83^\circ$ 付近で引張応力から圧縮応力へ変化する。介在物が硬い場合、板の上半分の $\bar{\sigma}_\beta$ は常に引張応力を示す。介在物の大きさが大きいほど応力は大きくなる。図 2, 3 より、介在物が軟らかい場合は母材側に応

Fig. 2 Variation of σ_β with ϕ at the spheroidal interface ($\bar{s} = b/a = 0.5$)

Fig. 5 Variation of $\bar{\sigma}_\gamma$ with ϕ at the spheroidal interface ($\bar{s} = b/a = 0.5$)

Fig. 3 Variation of $\bar{\sigma}_\beta$ with ϕ at the spheroidal interface ($\bar{s} = b/a = 0.5$)

Fig. 6 Variation of σ_β , $\bar{\sigma}_\beta$, σ_γ , $\bar{\sigma}_\gamma$ with z along the y -axis ($\bar{s} = b/a = 0.5$)

Fig. 4 Variation of σ_γ with ϕ at the spheroidal interface ($\bar{s} = b/a = 0.5$)

Fig. 7 Variation of Maximum of σ_β , σ_γ of B and D Point with b ($\bar{s} = b/a = 0.5$)

Fig. 8 Variation of Maximum of $\bar{\sigma}_\theta$, $\bar{\sigma}_r$ of B Point with b ($\bar{s} = b/a = 0.5$)

力集中が生じ、逆に介在物が硬い場合は介在物側に応力集中が生じる。図4は母材側の応力 σ_r の分布である。 $\Gamma = 0.5, 2.0$ のいずれの場合においても、板の上半分の σ_r は常に引張応力である。介在物が軟らかい場合、 σ_r の値は大きくなる。

図5は介在物側の応力 $\bar{\sigma}_r$ の分布である。 $\Gamma = 0.5, 2.0$ のいずれの場合においても、板の上半分の $\bar{\sigma}_r$ は常に引張応力である。図4.と逆に介在物が硬い場合、 $\bar{\sigma}_r$ が大きくなる。

図6に z 軸上の応力 $(\sigma_\theta)_{\varphi=0} = (\sigma_r)_{\varphi=0}$, $(\bar{\sigma}_\theta)_{\varphi=0} = (\bar{\sigma}_r)_{\varphi=0}$ の分布を示す。母材側の応力については、介在物が軟らかい場合、最大引張応力は板表面に生じる。板表面の応力および介在物境界面の応力は介在物が大きくなると大きくなる。介在物が硬い場合、板表面での応力および介在物境界面での応力は介在物のない場合の $\sigma_x = kz$ に対して軟らかい場合と対称に分布している。板表面の応力は介在物が大きくなると小さくなる。介在物側の応力は $z=0$ (O点)で零となり、介在物が大きくなるにつれて直線的に増加する。母材側とは逆に介在物が硬い場合のほうが応力値は大きい。

以上の結果より最大引張応力は母材側のB点(0, 0, b)および厚板表面のD点(0, 0, 1)に生じ、介在物側の最大引張応力はB点(0, 0, b)に生ずる、図7, 8にこれらの分布を示す。

図7は、短半軸 b に対して母材側のD点およびB点の最大引張応力を示したものである。B点の最大引張応力は b が大きくなると大きくなる。板表面D点

の最大引張応力は、介在物が軟らかい場合、 b が大きくなると大きくなり、逆に介在物が硬い場合、 b が大きくなると小さくなる。

図8は、介在物側のB点の最大引張応力を示したものである。最大引張応力は b が0.6までは直線的に増加するが、 $b=0.8$ では直線からずれる。

4. 結 言

本研究は、1個の偏平回転だ円体状介在物を有する厚板が無限遠方で二軸一様曲げ荷重を受ける軸対称問題を三次元弾性論に基づいて、厳密に解析したものである。得られた結果を要約すると以下ようになる。

(1) 母材における最大引張応力は介在物に最も近い厚板表面に生じる。引張応力の極大値は介在物境界面上に生じ、介在物が軟らかい場合($\Gamma < 1$)には母材側に、逆に硬い場合($\Gamma > 1$)には、介在物側に生じる。介在物が硬い場合には、介在物に応力が分担されるため母材側の応力集中は緩和される。

(2) 介在物境界面における応力分布は、厚板の $z=0$ の面に対して逆対称であり、中立面で零となる。板の上半分では引張応力、下半分では圧縮応力を生じる。特に、介在物が軟らかい場合($\Gamma < 1$)には $\varphi = 80^\circ \sim 90^\circ$ で圧縮応力を生じる。

(3) z 軸上の母材側の応力は、ほぼ直線的に増加する。介在物側では直線的に増加している。

文 献

- (1) Goodier, J. N., *Trans. ASME*, 55-7(1933), 39-44.
- (2) Edwards, R. H., *J. Appl. Mech.*, 18-1(1951), 19-22.
- (3) Eshelby, J. D., *Proc. R. Soc., A*, 241(1957), 376-396.
- (4) Fox, N., *J. Mech. Appl. Math.*, 13-2(1960), 228-246.
- (5) Kinoshita, N. and Mura, T., *Phys. Stat. Sol. (a)*, 5(1971), 759-768.
- (6) Asaro, R. J. and Barnett, D. M., *J. Mech. Phys. Solids*, 23(1975), 77-83.
- (7) Ling, C. B., *J. Appl. Mech.*, 26-6(1959), 235-240.
- (8) Ling, C. B. and Tsai, C. P., *J. Appl. Mech.*, 27-6(1960), 278-282.
- (9) Sadowsky, M. A. and Sterberg, E., *J. Appl. Mech.*, 14-3(1947), 191-195.
- (10) 土田栄一郎・中原一郎, 機論, 41-352(1975), 3379-3383.
- (11) Tsuchida, E., Takezaki, J., Nakahara, I. and Kodama, M., *Theo. Appl. Mech.*, 26(1976), 137-155.
- (12) 土田栄一郎・内山豊美, 機論, 45-384, A(1979), 455-463.
- (13) 斉藤義之・土田栄一郎, 機論, 48-436, A(1982), 1566-1574.
- (14) 土田栄一郎・八重樫昭徳・中原一郎・小玉正雄, 機論, 48-436, A(1982), 1575-1584.
- (15) Tsuchida, E. and Yomoda, H., *Joint. Sympo. on Eng. Mech.*, (1991), 9-17.