局所破壊解析法による複数分布する
低サイクル疲労き裂の進展挙動解析*高 垣 昌 和^{*1}, 中 村 俊 哉^{*2}Analysis of Multiply Distributed Cracks Propagation
under Low Cycle Fatigue Based on Local Approach of FractureMasakazu TAKAGAKI^{*3} and Toshiya NAKAMURA^{*3} Institute of Industrial Science, University of Tokyo,
4-6-1 Komaba, Meguro-ku, Tokyo, 153-8505 Japan

Some types of fatigue loading such as thermal fatigue may result in possible distribution of many cracks that are oriented in random directions. Numerical simulation of the fatigue crack propagation as well as stress analysis by conventional finite element method for such a situation requires huge amount of time and computational resources. The objective of the present study is to resolve this difficulty by employing the local approach of fracture based on continuum damage mechanics (CDM). The anisotropic damage variable developed in the authors' previous study is applied to represent a fatigue crack. Following the normal CDM approach with this damage variable and assumptions on crack opening/closing and damage evolution, numerical simulations are conducted for low cycle fatigue crack propagation behavior of a plate with single and two cracks. The results show good agreement with the experiments. Finally, propagations of multiply distributed cracks under low cycle fatigue loading are simulated to demonstrate the potential applicability of the present approach.

Key Words: Low Cycle Fatigue, Finite Element Method, Fracture Mechanics, Damage Mechanics, Local Approach of Fracture

1. 序 論

高温環境や腐食環境下で稼動する構造物や機器には熱疲労などにより複雑に分布する多数のき裂が生じる可能性がある。このような損傷を有した部材に対して、地震等による低サイクル疲労の外的負荷がかかると損傷の相互干渉により短時間にき裂が進展して事故につながる可能性がある。このため、複雑に分布するき裂の損傷評価を行う必要があるものと考えられる。

従来、き裂の進展評価を有限要素法で行う場合、応力解析を実施した結果に対して破壊力学を適用してき裂進展解析を行うといった手順で行われた。このような手法では、多数のき裂を個々に評価することは膨大な計算時間とコストがかかり困難である。

著者らは損傷力学の局所破壊解析法⁽¹⁾を適用することにより巨視的き裂が任意方向に存在する部材の簡易応力解析について検討を行った⁽²⁾。本研究ではこの解析法を適用することにより複雑分布する多数のき裂

を含む劣化構造物の低サイクル疲労き裂進展解析を容易に行うことが可能となるものと考えた。それぞれのき裂進展は損傷変数の発展則を定めることにより表現することができる。しかし、局所破壊解析法は主にクリープ⁽³⁾、延性破壊、脆性破壊⁽¹⁾に関して研究が行われ、疲労破壊に対する適用例は少ない。また、複数の疲労き裂進展挙動を扱っている研究例は著者の知るところではない。

低サイクル疲労き裂進展を解析するためには弾塑性損傷構成則が必要である。低サイクル疲労ではき裂が開閉口するため、構成則における降伏関数はその効果を表現できなければならない。そこで、損傷変数をパラメータとして含む降伏関数を考えるとともに、き裂の開閉口の条件について検討する。

すなわち本研究では複雑分布する複数き裂を有する構造の疲労き裂進展解析法を開発するため、前報⁽²⁾で提案した巨視的き裂に対する損傷変数を用いて異方性損傷構成則と疲労き裂伝ば則を記述する。この構成則を有限要素法に適用して複数き裂の進展を解析し、さらに低サイクル疲労き裂進展試験を実施することにより本解析法の妥当性を検討した。最後に複雑に分布するき裂の疲労進展解析を行った。

* 原稿受付 2001 年 5 月 28 日。

^{*1} 正員, 東京大学生産技術研究所(☎ 153-8505 東京都目黒区駒場 4-6-1)。^{*2} 正員, 航空宇宙技術研究所(☎ 181-0015 三鷹市大沢 6-13-1)。

E-mail: mtak@iis.u-tokyo.ac.jp

2. 異方性弾塑性損傷構成則

2・1 異方性降伏関数 損傷力学では欠陥を含む材料の構成則について検討されているが、塑性変形領域では巨視的き裂による降伏応力の変化を考慮する必要がある。損傷力学では通常、健全材の構成式の応力を実質応力で置換する。そこで、本研究でもそれに従い、前報で定義した実質応力 $\sigma^{(2)}$ を用いて Miss の降伏関数 F を書き換えた。

$$F = \frac{1}{2}(\sigma\sigma) - \frac{1}{3}R^2 = 0 \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 R は健全材の降伏応力である。前報で定義した損傷テンソル $D^{(2)}$ は、き裂の方向性に起因する異方性を示すので、これにより降伏関数においてき裂による力学的な異方性を表現できる。

さらに後述のき裂開閉口条件と組合わせることにより、損傷変数の値を変化させ(開口時: $0 < D < 1$, 閉口時: $D = 0$)、引張りと圧縮に対する降伏応力の変化を表現できるものと考えた。

ここで、前報で検討した損傷テンソルおよび実質応力を示しておく。 x_1, x_2, x_3 座標系においてき裂に垂直な方向ベクトルを n とするとき裂を表現するための損傷テンソルは、

$$D = Dn \otimes n \dots\dots\dots (2)$$

なお、損傷変数 D は、き裂面に垂直な面に対する剛性低下を表すパラメータであり、き裂による面積欠損率である。一方、実質応力 σ は、損傷テンソルを用いて

$$\sigma = (I - D)^{-1/2} \sigma (I - D)^{-1/2} \dots\dots\dots (3)$$

のように表せる。実質応力 σ を4階の変換テンソル M を用いて書き換えると

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{ij} &= \tilde{M}_{ijkl} \sigma_{kl} \\ \tilde{M}_{ijkl} &= \Phi_{ik} \Phi_{jl}, \Phi_{ij} = (I_{ij} - D_{ij})^{-1/2} \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\tilde{M}_{ijkl}$ は損傷効果テンソル⁽⁴⁾と呼ばれている。

2・2 き裂開閉口条件 単軸の引張圧縮を考えるとき裂などの損傷により引張過程で剛性が低下し圧縮過程ではき裂の閉口により剛性は健全材と同等になる。き裂を含む損傷材の応力解析を行う上で、疲労など圧縮過程が存在する負荷を考える場合、き裂の開閉口の効果が無視できなくなる。つまり、引張過程ではき裂が開口し、損傷材の剛性は低下する。一方、圧縮過程ではき裂の閉口に伴って剛性が回復する。したがって、き裂開口時には損傷変数は、そのときの損傷状態を表す値を取り、閉口時には損傷変数が零となる。

これまで損傷力学において提案されているき裂開閉口の判定法は、垂直応力成分⁽⁴⁾や垂直ひずみ成分⁽⁵⁾の

正負をパラメータとしている。これらは負荷が弾性範囲であれば、き裂の開閉口時と閉口時の応力ひずみ状態に大きな変化がないためき裂問題は無いと考えられる。しかし、低サイクル疲労では、塑性変形が伴うため、開口時、閉口時、それぞれの応力ひずみ状態が異なる。そこで、新たな開閉口条件としてき裂面法線方向の応力とひずみの二つのパラメータの適用を考える。

以下で述べるようなき裂の閉口を判定するき裂間ひずみ ϵ_{DM} と開口を判定するき裂面応力 σ_{DM} を仮定した。損傷構成則を用いて有限要素解析を行う際、ひとつの巨視的き裂を複数の要素により表現しているが、各要素に対して想定したき裂の傾きが θ のき裂を想定した要素の単軸引張圧縮を考える。負荷によって生じる要素の各ひずみ成分から座標変換によってき裂面に対し垂直方向のひずみ ϵ_v が計算できる。本研究では損傷要素を擬似的に相当すると考えていることから開口変位に相当するき裂間ひずみ ϵ_{DM} は、 ϵ_v と等価であると考えることができる。 xy 座標系において平面応力場の場合、 x 軸に対して角度 θ (図1参照)のき裂における、 ϵ_{DM} は式(5)のように表せる。

$$\begin{aligned} \epsilon_{DM} = \epsilon_v &= \frac{1}{2}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) - \frac{1}{2}(\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy})\cos 2\theta \\ &\quad - \frac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\theta \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

このひずみが正から負になるときにき裂が開口すると仮定する。つまり、 $0 < D \leq D_{CR}$ (D_{CR} : 損傷変数の臨界値)の値を取る損傷変数 D が零となる。低サイクル疲労においては、圧縮時に接触しているき裂面の領域でも塑性変形が生じるため、次のサイクルでは、無負荷状態でも塑性変形量に相当するひずみが残存するため、 ϵ_{DM} の値が零であってもき裂は閉口しない。次のサイクルの圧縮過程においてき裂が開口するのは、 $\epsilon_{DM} + \epsilon_{CR} = 0$ になったときと考えた。ここで ϵ_{CR} は、直前のサイクルの圧縮過程においてき裂閉口後に生じた ϵ_{DM} と同方向の塑性ひずみである。

一方、き裂の開口の判定は、

$$\begin{aligned} \sigma_{DM} &= \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\cos 2\theta \\ &\quad - \frac{1}{2}\tau_{xy}\sin 2\theta \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

のような σ_{DM} の正負により行う。これは、圧縮過程において塑性変形が生じた場合、次の引張過程で応力が正值を取っていても ϵ_{DM} が負値のままであるため、き裂面応力を用いる。垂直ひずみのみで判定するとき裂面の応力が正值であっても閉口していることになる。

したがって、き裂の開口は、式(6)の応力が負から正に変化する際に起こると考えた。

2.3 損傷構成則の導出 前報で示した式(7)の弾性損傷構成則をもとに先の異方性降伏関数ならびに非線形等方硬化則、移動硬化則を適用し一般的な塑性力学の手法に従って構成則を導出する。まず、弾性損傷構成則は、

$$\sigma^e = \tilde{M}^{-1} : C_0^e : \tilde{M}^{-T} : \epsilon^e = \tilde{C}^e \epsilon^e \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 C_0^e 、 $\tilde{C}^e$ は、それぞれ健全材の弾性係数テンソルと損傷の影響を考慮した弾性係数テンソルである。また、 $\tilde{M}^{-1}$ は先述の損傷効果テンソルのインバースである⁽²⁾。

次に Prager の適合条件を示す。

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} \{d\sigma\} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\} \{d\alpha\} + \frac{\partial F}{\partial R} dR + \left\{ \frac{\partial F}{\partial D} \right\} \{dD\} = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 α は背応力、 R は非線形等方硬化則における降伏曲面の大きさである。

本研究では Chaboche⁽⁶⁾による非線形等方硬化則ならびに Armstrong, Frederick⁽⁷⁾による非線形移動硬化則を適用した。それぞれの硬化則は下式のように表されている。

$$\dot{R} = b(R_s - R)\bar{\epsilon}^p \quad (\text{初期値: } R_0) \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\dot{\alpha}_{ij} = \frac{2}{3} c \dot{\epsilon}_{ij}^p - \frac{2}{3} \gamma \alpha_{ij} \bar{\epsilon}^p \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 $\bar{\epsilon}^p$ は相当塑性ひずみ速度、 R_0 は初期降伏応力である。また、 b 、 R_s 、 c 、 γ はそれぞれ硬化則の材料定数である。

式(7)～(10)および結合流れ則より弾塑性損傷構成則は、次のように導かれる。

$$\{d\sigma\} = \left([\tilde{C}^e] - \frac{[\tilde{C}^e] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [\tilde{C}^e]}{K} \right) \{d\epsilon\}$$

Fig. 1 Direction of crack propagation

$$\frac{2[\tilde{C}^e] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} \left(\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} [dM^{-T}] \{\bar{\sigma}\} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial D} \right\} \{dD\} \right)}{K} + 2[dM^{-T}] \{\bar{\sigma}\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

ただし、 $\bar{\sigma}$ は実質応力であり、 K は下式のように示される。

$$K = -\frac{\partial F}{\partial R} b(R_s - R) \frac{\{\sigma\}^T \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}}{\sigma_{eq}} + \frac{2}{3} c \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} - \frac{2}{3} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \gamma \{\alpha\} \frac{\{\alpha\}^T \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}}{\sigma_{eq}} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [\tilde{C}^e] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで、 σ_{eq} はMisesの相当応力である。

2.4 損傷発展則 損傷発展則は、損傷力学における熱力学理論から導出されたもの⁽⁸⁾を拡張して適用をする。低サイクル疲労に対する発展式は、弾塑性損傷における Helmholtz の自由エネルギーをもとに次式のように定式化されている。

$$\frac{\partial D}{\partial N} = \frac{\Delta \bar{\sigma}_{eq}^2}{4ES} \Delta \epsilon_s \quad \dots\dots\dots (13)$$

ただし、 $\Delta \bar{\sigma}_{eq}$ は実質応力に基づく Mises 形の相当応力の範囲である。 $\Delta \epsilon_s$ は相当塑性ひずみ範囲であり、 E は縦弾性係数、 S は損傷に対する材料の強さである。

一方、巨視的き裂の進展方向は Lemaitre⁽¹⁰⁾によると図1のように実質応力の最大引張応力 $\bar{\sigma}_{vmax}$ の方向に対し垂直な面とされている(図1における角度 ϕ)。なお、き裂を構成する要素内でき裂の進展方向が変化した場合、損傷テンソルに代入するき裂の方向は、近似的に要素内で想定したき裂の端点を結んだ方向であるものとした。

以上のような弾塑性損傷構成則と損傷発展則を汎用の有限要素コードに導入することにより低サイクル疲労による巨視的なき裂が複数存在する部材の進展解析を行った。

3. 疲労き裂進展解析(単一き裂)

3.1 低サイクル疲労き裂伝ば試験 先の損傷発展則における材料定数 S を決定し、あわせて弾塑性損傷構成則を組み込んだ有限要素コードによる妥当な解が得られるかを検証するため、単一き裂の低サイクル疲労き裂伝ば試験を実施した。

疲労き裂伝ば試験には平板試験片(平行部:高さ25 mm, 幅40 mm, 板厚4 mm)を用いた。また、供試材はオーステナイト系ステンレス鋼 SUS 304 である。試験片中央には初期き裂として3.0 mmの予き裂を与えている。試験条件は、変位制御により公称ひずみ

範囲0.5%相当の負荷を完全両振りで与えた。また、試験片の温度制御は、先に行っていない。また、き裂長さの測定にはCCDカメラを用いて画像解析により算出した。

3.2 単一き裂モデルの解析 低サイクル疲労き裂進展解析の妥当性の検証および損傷発展則の材料定数 S を決定するため、低サイクル疲労き裂伝ば試験と同条件にて解析を行った。図2のように解析モデルは、3.1節の試験片平行部を表したもので、要素は8節点四辺形平面応力要素である。また、初期き裂である3.0 mmは損傷要素を用いて表現している。さらに負荷条件は、試験と同様の疲労負荷を与えた。材料定数は表1に示す。ここで得られた解析結果と試験結果からき裂長さとサイクル数の関係を比較し材料定数

Table 1 Condition of analysis

Young's Modulus	210.0 GPa
Poisson's Ratio	0.3
Initial Yield Stress	$R_0=290.0$ MPa
Non-linear Isotropic Hardening Parameter	$R_s=600.0$ MPa $b=0.8$
Non-linear Kinematic Hardening Parameter	$c=2200.0$ MPa $\gamma=0.8$
Initial Crack Length	8.0 mm
Initial Damage	Damage Parameter : $D=0.99$ Angle of Crack : $\theta=0.0$

Fig. 2 Analysis model

Fig. 3 Crack length-cycles number at single crack

S を決定した。

3.3 材料定数の決定と解析手法の妥当性 はじめに損傷発展則の材料定数 S を決定するためにいくつかの値で解析を行い、試験結果と比較した。それぞれのき裂長さとサイクル数の関係は図3のようになった。これより $S=3.0$ のときに最もよい一致がみられた。また、このときの2000サイクルめの引張ピークにおける y 軸方向の応力コンター図(図4)を見るとき裂先端の応力集中が表現されている。図4に示したようにき裂と想定された損傷要素の応力ならびにひずみをみると応力が小さくなっているにもかかわらずひずみが大きくなっている(要素の変形が大きくなっている)。これは、き裂の開口変位に相当するひずみが生じたとみなすと、き裂の開口状態を表しているものと考えられる。

図5は、試験と解析における y 軸方向の公称応力-公称ひずみ線図(荷重-変位線図と同等)を比較したものである。予測応力値にいくぶん実験結果との差が見られるものの、き裂の開閉口と塑性変形を伴う応力ひずみ応答は本モデルでおおむね表現できている。しかしながら、本実験においては、き裂開閉口点は求めているので、本研究で提案するき裂の開閉口判定方法に関しては、不合理な結果を与えないことはわかるも

Fig. 4 Contour of σ_y (2000 cycles)

Fig. 5 Stress-strain cycles (crack length 20.0 mm)

の、従来の判定手法との精度の比較など、その妥当性の定量的な検討は今後の課題としたい。さらに、より一般化した多軸応力場での開閉口判定や損傷発展則、降伏点や硬化挙動などについて検討することにより、より精密なモデルを構築していく必要があると考えている。

4. 疲労き裂進展解析(複数き裂)

4.1 複数き裂モデルの解析 これまで、損傷力学に基づいて異方性を考慮した弾塑性損傷構成則を検討し、き裂進展挙動を表現するため損傷発展則についても検討してきた。さらに、単一き裂を有した平板の単軸負荷に対する低サイクル疲労き裂伝ば試験より損傷発展則の材料定数を決定した。そこで、単一き裂の解析により決定した材料定数をもとに複数き裂に対する応力解析ならびに損傷進展挙動の評価を実施し、得られた結果と複数き裂の低サイクル疲労き裂伝ば試験結果の比較を行い本研究により提案する損傷評価法の妥当性を検証する。なお、解析条件ならびに疲労試験条件は3章と同一とし、損傷発展則の材料定数を $S=3.0$ とした。ただし、初期き裂長さは 4.0 mm である。また、き裂の配置は図6、表2に示すとおりである。

4.2 解析結果 本解析で得られた結果よりき裂の進展挙動を比較するため、図7、8に2000サイクルめの解析結果において損傷変数が臨界値 ($D=0.99$) に達した要素を塗りつぶした解析モデルの例を示し

た。また、同サイクルの結果をあわせて示したモデル図と写真(実験結果)のスケールは同一である。き裂間隔の異なる2種類の解析と試験結果を比較したところ、両条件とも解析によるき裂進展量が試験よりも少なくなっている。また、図7のき裂の進展方向に関しては、き裂は水平方向に進展するが、互いに先端が近くなるとそれぞれのき裂先端に向かって回り込むように進展方向が変化している。この挙動は実験結果と一致する。き裂間隔が大きい図8のモデルでは試験結果よりも進展量が小さいが、図7のような進展方向の変化はない。この挙動は、やはり実験結果と一致する。

一方、き裂が並列(H 10 W 0)に存在する場合、試験では二つのき裂は同様に伸びるのではなく片方のき裂が停留した。しかし、解析では2本のき裂は、均等に進展している。これは実際の材料のき裂進展をミクロ的に見た場合、微小欠陥や介在物によるき裂成長にばらつきが存在するためと考えられる。本解析ではこのようなばらつきを考慮していないために完全に対称な

Fig. 7 Behavior of crack propagation (Analysis No. H 2.5 W 15)

Fig. 8 Behavior of crack propagation (Analysis No. H 10 W 20)

Table 2 Arrangement of initial crack

Analysis No.	Hight between Cracks	Crack Center Width
	H mm	W mm
H2.5W15	2.5	15.0
H0W15	0	15.0
H10W20	10.0	20.0
H10W0	10.0	0

Fig. 6 Analysis model (two cracks)

結果が得られたものとする。最後に、き裂が水平方向(H 0 W 15)に存在する場合にはそれぞれ同一平面上に進展している。これは、試験結果と解析結果は一致している。

さらに、各き裂配置におけるき裂進展を比較したものを図9に示す。ただし、ここで示したき裂長さは2本の長さの平均である。き裂を段違いに配置した解析の図9(a), (b)では、き裂の相互干渉により進展速度の変化をよく捉えているものの、き裂間隔が大きいほど試験結果の進展速度に比べて遅くなる傾向があった。なお、図9(b)の実験の結果には進展速度が大きく変化する点があるが、これはき裂先端が試験片端面に達したためである。また、図9(c)はき裂が水平に並んでいる場合であるが、き裂が成長するに従って2本のき裂が近づくため、進展速度が速くなる。本解析法ではこの点をよく表現できている。図9(d)をみるとき裂が平行に配置されたことによる進展速度の低下

についても十分な一致が見られることがわかった。

5. 複雑分布するき裂への適用

5.1 複雑に分布するき裂の進展解析 これまで、疲労き裂進展解析のための異方性損傷を適用した解析法を提案し、妥当性を検証するために単純な複数き裂モデルを用いて評価を行った。その結果、き裂の進展挙動をよく捉えられることが示された。そこで、一つのモデルケースとして複数のき裂が不規則に分布する損傷モデルの解析を行った。

解析モデルは、平板に対して複数のき裂を不規則に配置して図10のような分布とした。平板モデルの寸法および負荷条件は、これまで実施した解析と同じ条件としている。ただし、初期条件では1本のき裂は四つの損傷要素を用いて表現しているが、個々の損傷要素は、想定しているき裂の角度と同方向にき裂が存在するものとする。

5.2 解析結果 図10のような疲労負荷を500サイクルかけた後のき裂進展状態を図11に示した。③のき裂は、負荷に対して垂直でありかつ平行に伸びるき裂が存在しないため、最もき裂進展量が多い。これに対して⑦、⑧はき裂の配置が平行であるため進展量は小さい。一方、②のき裂は、平行に伸びるき裂が存在するにもかかわらず進展量が多い。これは①のき裂角が異なるため影響が小さかったと考えられ、さらに近接する③のき裂の干渉を受けたものと推測される。④に関しては、負荷方向に平行であるために進展していない。損傷を等方向に取扱ったならば、き裂が進展する結果を得るが、き裂の異方性を考慮したことによりき裂進展がみられない。これは、より現実的な状態を表現できているものとする。

6. 結 論

本研究は、不規則にき裂が分布する部材の低サイクル疲労き裂進展挙動に関する損傷評価を行うため、微

Fig. 9 Crack length-cycles curves

Fig. 10 Analysis model (random distributed cracks)

Fig. 11 Behavior of crack propagation (random distributed cracks)

視的欠陥を主な対象としている損傷力学の概念を巨視的き裂に適用することにより有限要素法を用いた簡易的な解析法の開発を試みたものである。

ここでは、二つのき裂を有する平板モデルの解析を行い、同条件での低サイクル疲労き裂伝ば試験の結果と比較することにより本解析法の妥当性について検討を行った。その結果、解析結果は実験結果とよく一致することがわかった。本手法は、この進展状態を表現できることがわかった。また、モデルケースとして複数のき裂が不規則に分布する損傷モデルの応力解析を行った。その解析結果は、それぞれのき裂の配置に従って定性的に妥当なものが得られたと考えられる。

文 献

- (1) Lemaitre, J., "LOCAL APPROACH OF FRACTURE", *Eng. Fract. Mech.*, 25 (1986), 523-537.
- (2) 高垣昌和・中村俊哉, "損傷力学を適用した巨視的き裂のモデル化", 機論, 67-644, A (2001), 2018-2024.
- (3) Hayhurst, D. R. and Dimmer, P. R., "Estimates of the creep rupture lifetime of structures using the finite element method", *J. Mech. Phys. Solids*, 23 (1975), 335-355.
- (4) 村上澄男, "損傷力学とその最近の発達", 機論, 51-467, A (1985), 1651-1659.
- (5) Lemaitre, J., "COUPLED ELASTO-PLASTIC AND DAMAGE CONTITITIVE EQATIONS", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 51 (1985), 31-49.
- (6) Chaboche, J. L., Dang-Van, K. and Cordier, G., "Modelization of the Strain Memory Effect on the Cyclic Hardening of 316 Stainless Steel", *SMIRT5*, Div. L, (1979).
- (7) Armstrong, P. J. and Erederrick, C. O., "A Mathematical Representation of Multiaxial Bauschinger Effect", *GEGB Report RD/B/N731*, (1966).
- (8) Lemaitre, J., "A Course on Damage Mechanics", (1990), 127-153, Springer.
- (9) Lemaitre, J. and Chaboche, J. L., "Mechanics of solid materials", (1994), 452-548, Cambridge University Press.