ポリマの粘塑性大変形挙動に関する 熱・力学的モデリングとシミュレーション*

(第2報, 流れ則に基づく尖り点モデルとその FEM 解析)

村上 大介^{*1}, 小林 誠 一^{*2}鳥垣 俊和^{*2}, 志澤 一之^{*3}

A Thermomechanical Modeling and Simulation of Viscoplastic Large Deformation Behavior for Polymeric Materials (2nd Report, Vertex Model Based on Flow Rule and Its Finite Element Analysis)

Daisuke MURAKAMI, Seiichi KOBAYASHI,
Toshikazu TORIGAKI and Kazuyuki SHIZAWA^{*4}^{*4} Department of Mechanical Engineering, Keio University,
3-14-1 Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama-shi, Kanagawa, 223-8522 Japan

In the previous paper, a strain rate tensor is introduced into free energy and a thermodynamic force conjugate to this rate is newly defined. On the basis of the principle of increase of entropy and one of maximal entropy production rate, a non-coaxial constitutive equation associated with a plastic deformation rate is derived as a flow rule in which a dissipation function plays the role of plastic potential. Material moduli in this equation, however, are still not expressed as functions of hardening law. In this paper, the constitutive equation is newly generalized into corner theory which permits an existence of a vertex on dissipation surface. A non-coaxial angle of a plastic deformation rate is related to the non-coaxial angle of a stress rate by use of strain rate sensitivity. Furthermore, a finite element analysis is carried out for a plane strain tension of homopolymer. Some remarkable numerical results of strain localization for homopolymer are discussed in detail.

Key Words: Plasticity, Constitutive Equation, High Polymer Materials, Large Deformation, Finite Element Method, Non-Coaxiality, Viscoplasticity, Vertex, Shear Band

1. 緒 言

ポリプロピレン(PP)のようなポリマにおいては、室温または低変形速度におけるひずみ速度依存性すなわち粘塑性、ならびに初期降伏直後からのひずみの局所化⁽¹⁾とひずみ硬化に伴う局所化領域の伝ば⁽¹⁾⁽²⁾(図1)などの力学的特性がある。従来、粘塑性変形挙動は通常の流れ理論に基づく共軸塑性構成式あるいは変形理論に基づく非共軸塑性構成式⁽³⁾⁽⁴⁾に適用される硬化則に、単に相当塑性ひずみ速度を引数として取り込むことでモデル化されることが多い⁽⁵⁾⁽⁶⁾。しかし、このようなモデリングには次のようないくつかの問題点が挙げられる(表1)。まず、共軸構成式が適用された平面ひずみ引張解析では、拡散くびれが大きく進展してもせん断帯の局所化が発生しないことなど、実際の現象との不一致が指摘されている⁽⁷⁾。次に、変形理論に基づく非共軸構成式⁽³⁾⁽⁴⁾では、比例負荷からの逸脱

および負荷から弾性除荷への遷移を連続的に表現することは難しい⁽⁶⁾⁽⁷⁾。一方、コーナ理論に基づく非共軸構成式⁽⁸⁾⁽⁹⁾には上述の問題はないが、材料係数が多くその同定には難がある⁽⁷⁾。また通常の塑性構成式にひずみ速度硬化則を適用することは熱力学的に矛盾する⁽¹⁰⁾。さらに非共軸構成式⁽³⁾⁽⁴⁾⁽⁸⁾⁽⁹⁾には両辺における大きさが一致しないという数理的矛盾がある⁽¹⁰⁾。

これらの問題点を解決すべく著者らは前報⁽¹⁰⁾で、全自由エネルギー⁽¹¹⁾の引数に内部変数として塑性ひずみ速度テンソルを導入し、それに共役な内力を定義した。この内力のなす仕事率を陽に表示した Clausius-Duhem の不等式から、エントロピー増大則および最大エントロピー生成速度の原理⁽¹²⁾に基づいて粘塑性構成式を導出した結果、熱・力学的体系から導出した粘塑性構成式に対してのみひずみ速度硬化則が適用可能であること、熱・力学的体系に整合する粘塑性構成式は散逸関数を塑性ポテンシャルとする流れ

Fig. 1 Plastic instability of polymeric materials

* 原稿受付 2001 年 5 月 18 日。

^{*1} 学生員, 慶應義塾大学大学院 (〒223-8522 横浜市港北区日吉 3-14-1)。

^{*2} 正員, 日産自動車(株)総合研究所車両交通研究所 (〒237-8523 横須賀市夏島町 1)。

^{*3} 正員, 慶應義塾大学理工学部。

E-mail: shizawa@mech.keio.ac.jp

Table 1 Problems of conventional constitutive equations

	Items to be satisfied in constitutive equation	Conventional theories		
		F	D	C
1	Prediction of shear band formation under plane strain tension	I	P	P
2	Continuous transition from loading to unloading	P	I	P
3	Representation of deviation from proportional loading	P	I	P
4	Simplicity of identification of material moduli	P	P	I
5	Thermodynamic validity of application to strain rate hardening law	I	I	I
6	Magnitude agreement of both sides of constitutive equation	P	I	I

F:J2-flow theory, D:J2-deformation theory, C:J2-corner theory, P:Possible, I:Impossible

則に基づいているにもかかわらず非共軸形となること、ならびに粘塑性構成式の非共軸性は材料のひずみ速度依存性由来していることを示した。しかし、構成式の非共軸性と散逸曲面の尖り点に対する考察、材料係数を相当量などで具体化する方法およびFEM解析に基づく本構成式の妥当性に関する検討についての詳細は述べられていない。

そこで本報では、散逸曲面上における塑性変形速度、応力および応力速度の方向などの幾何学的関係を考察することにより、上述の粘塑性構成式を散逸曲面上における尖り点構成式として一般化する。さらに応力-応力速度のなす角と応力-塑性変形速度のなす角との関係をひずみ速度感度指数の関数を用いてモデル化することにより、構成式がその両辺の大きさの一致条件を満足するようにその具体形を決定する。さらに、小林・岡田⁽¹⁾によるゴム低充てんPP材の実験結果から得られる硬化則を用いて大変形FEM解析を平面ひずみ引張荷重下で行う。その解析結果から、流れ則に基づく本尖り点粘塑性構成式がせん断帯形成を予測可能であることをはじめ、表1に挙げたすべての項目を満足することを示す。また、初期降伏直後からのひずみの局所化とせん断帯をとまなう局所化領域の伝播が、再現可能であることを明らかにする。さらに、実験結果と解析結果の比較から本構成式の妥当性を確認する。

2. 非共軸粘塑性構成式

2章では、前報⁽¹⁰⁾で示した非共軸粘塑性構成式の導出過程の概略をまとめておく。ポリマにおいては、塑性変形の素過程を転位運動に関係づけることはできない。そこで、共回転応力速度のスピンには、材料非依存性スピンをを用いる。この場合、変形こう配 $\mathbf{F}$ は次のように分解される。

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{x}\mathbf{U}_x^e\mathbf{U}_x^p \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $\mathbf{R}$ は剛体回転の直交テンソル、 $\mathbf{U}$ は右ストレッチテンソル、 $\mathbf{U}_x^e$ および $\mathbf{U}_x^p$ は一般的な直交テンソル $\mathbf{x}$ に対応する弾性および塑性ストレッチである。このとき、現配置から $\mathbf{x}$ だけ戻した第二中間配置 $\beta_{(m)}$ において、ひずみおよびひずみ速度は状態量と非状態量に弾・塑性分解されるため、 $\beta_{(m)}$ を構成式の参照配置にとる。以降、記号 $_{(m)}$ を付した量は第二中間配置で表示されたものとする。全自由エネルギー $\bar{\Psi}$ の引数に内部変数として塑性変形尺度の速度 $\dot{\mathbf{E}}_{(m)}^p$ すなわち塑性変形速度テンソルを導入すると、 $\bar{\Psi}$ の関数形は次式のように表される。

$$\bar{\Psi} = \bar{\Psi}(\theta, \bar{\mathbf{E}}_{(m)}, \bar{\mathbf{p}}_{(m)}; \dot{\mathbf{E}}_{(m)}^p) \quad \dots\dots\dots (2)$$

ただし、記号 $(\bar{})$ を付した量は非状態量であり、 θ は温度、 $\bar{\mathbf{E}}_{(m)}$ は変形尺度を含む全ひずみ、 $\bar{\mathbf{p}}_{(m)}$ は単位面積当たりに供給される熱量である。式(2)を物質時間微分することにより、次のような熱力学的力が定義される。

$$\left. \begin{aligned} -H &\equiv \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \theta}, & \bar{\mathbf{T}}_{(m)} &\equiv \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\mathbf{E}}_{(m)}} \\ -\bar{\mathbf{g}}_{(m)} &\equiv \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\mathbf{p}}_{(m)}}, & \bar{\mathbf{M}}_{(m)} &\equiv \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \dot{\mathbf{E}}_{(m)}^p} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

なお、記号 $(\bar{})$ を付した量は、Jacobian: $J \equiv \det \mathbf{F}$ を乗じた量であり、 H はエントロピー、 $\bar{\mathbf{T}}_{(m)}$ はKirchhoff応力、 $\bar{\mathbf{g}}_{(m)}$ は単位温度当たりの温度こう配: $\bar{\mathbf{g}}_{(m)} \equiv J \nabla_{(m)} \theta / \theta$ であり、 $\bar{\mathbf{M}}_{(m)}$ は塑性変形速度 $\mathbf{D}_{(m)}^p (= \dot{\mathbf{E}}_{(m)}^p)$ に共役な新たな内力である。次に、エネルギー方程式とエントロピー不等式から供給熱の項を消去することにより、内部変数のなす仕事率が陽に表示された次式のようなClausius-Duhemの不等式が得られる。

$$\bar{\Phi} = -(\dot{\Psi} + H\dot{\theta}) + \bar{\mathbf{T}}_{(m)} \cdot \mathbf{D}_{(m)} + \bar{\mathbf{M}}_{(m)} \cdot \dot{\mathbf{D}}_{(m)}^p \geq 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 Φ は散逸関数、 Ψ は自由エネルギーの保存部分である。ただし、本研究では、Fourierの法則で表

される熱流束に関する構成式の導出を目的としないので、式(4)では $\bar{g}_{(m)}$ の項を省略している。次に、Green-Zerna の手法⁽¹³⁾ を用いて式(4)を可逆部分と非可逆部分に分離する。可逆部分からは通常の弾性構成式が得られる。その結果、式(4)には次のように散逸仕事率のみが残る。

$$\Phi = T'_{(m)} \cdot D'_{(m)} + M'_{(m)} \cdot \dot{D}'_{(m)} \geq 0 \quad (5)$$

なお、式(5)の両辺には J^{-1} が乗じられていることに注意されたい。また、ポリマの場合、厳密には塑性変形による体積変化を無視できないが、本研究ではこの効果は考えないものとする。したがって、塑性変形速度には金属材料と同様に偏差部分のみが存在するとして $D'_{(m)} = D'_{(m)}$ と表している。以降、記号()' を付した2階のテンソル量は偏差部分を表すものとする。式(5)に対して最大エントロピー生成速度の原理⁽¹²⁾ を適用すれば、 Φ を塑性ポテンシャルとする流れ則として次式のような連立塑性構成式が得られる。

$$\begin{cases} D'_{(m)} = \frac{\hat{\lambda}}{1+\hat{\lambda}} \frac{\partial \Phi}{\partial T'_{(m)}} \quad (6) \\ \dot{D}'_{(m)} = \frac{\hat{\lambda}}{1+\hat{\lambda}} \frac{\partial \Phi}{\partial M'_{(m)}} \quad (7) \end{cases}$$

ただし、 $\hat{\lambda}$ は Lagrange の未定乗数である。次に、式(6)および(7)において Φ をその引数 $T'_{(m)}$ と $M'_{(m)}$ が作る二次のスカラー不変量 $J_2 (\equiv \text{tr } T'^2_{(m)})$, $J_{2a} (\equiv \text{tr } T'_{(m)} M'_{(m)})$ および $J_{2b} (\equiv \text{tr } M'^2_{(m)})$ の多項式で表現すると、次のような連立非共軸粘塑性構成式が得られる。

$$D'_{(m)} = \mu_1 T'_{(m)} + \mu_2 M'_{(m)} \quad (8)$$

$$\dot{D}'_{(m)} = \mu_2 T'_{(m)} + \mu_3 M'_{(m)} \quad (9)$$

ここで、各係数は次式で定義される。

$$\mu_1 \equiv \frac{2\hat{\lambda}}{1+\hat{\lambda}} \frac{\partial \Phi}{\partial J_2}, \quad \mu_2 \equiv \frac{\hat{\lambda}}{1+\hat{\lambda}} \frac{\partial \Phi}{\partial J_{2a}}, \quad \mu_3 \equiv \frac{2\hat{\lambda}}{1+\hat{\lambda}} \frac{\partial \Phi}{\partial J_{2b}} \quad (10)$$

さらに、式(8)および式(9)から $M'_{(m)}$ を消去し、

$D'_{(m)}$ をその n 次導関数を用いて表現すれば、

$$D'_{(m)} = \zeta_0 T'_{(m)} + \zeta_1 \dot{T}'_{(m)} + \zeta_2 \ddot{T}'_{(m)} + \dots + \zeta_{n-1} \overset{[n-1]}{T}'_{(m)} + \zeta_n \overset{[n]}{D}'_{(m)} \quad (11)$$

となる。ここで、 $\overset{[n]}{A}$ は A の n 次導関数である。応力速度が時間に対して急変しない問題を扱うとすれば、応力の2階以上の高階微分項および $D'_{(m)}$ の n 階微分項は十分小さいとして無視できる。したがって、次式のような非共軸粘塑性構成式および $M'_{(m)}$ と応力・応力速度の関係が得られる。

$$D'_{(m)} = \zeta_0 T'_{(m)} + \zeta_1 \dot{T}'_{(m)} \quad (12)$$

$$M'_{(m)} = \frac{1}{\mu_2} \{ (\zeta_0 - \mu_1) T'_{(m)} + \zeta_1 \dot{T}'_{(m)} \} \quad (13)$$

以上より、塑性ひずみ速度テンソルとそれに共役な内力による散逸仕事率を考慮した熱・力学的理論では、粘塑性構成式は必然的に非共軸性を有することになる。

3. 尖り点モデル

現配置に戻して表示した式(12)において、塑性変形速度を応力方向とそれに垂直な方向に直交分解(図2)すれば、

$$D'_{(m)} = a_1 T' + a_2 \left(\dot{T}' - \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} T' \right) \quad (14)$$

と表される。ここで、 $\dot{T}'$ は $\dot{x}x^T$ をスピンにもつ共回転応力速度であり、また、

$$a_1 \equiv \zeta_0 + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} a_2, \quad a_2 \equiv \zeta_1 \quad (15)$$

である。さらに、相当応力 σ および相当応力速度 $\dot{\sigma}$ はそれぞれ

$$\sigma \equiv \sqrt{\frac{3}{2} T' \cdot T'} \quad (16)$$

$$\dot{\sigma} \equiv \sqrt{\frac{3}{2} \dot{T}' \cdot \dot{T}'} \quad (17)$$

と定義される。式(14)は流れ則を表す式(6)および式

Fig. 2 Orthogonal decomposition of $D'_{(m)}$

Fig. 3 Vertex on dissipation surface

(7)から得られたものであるから、 D^p は必ず散逸曲面の法線方向を向く(図3)。したがって、散逸曲面には尖り角 β で表される尖り点が形成され、 D^p の向きは尖り点を中心とする円すいの母線方向となる。この場合、尖り角 β と応力-塑性変形速度のなす角 δ の間には、 $\beta + \delta = \pi/2$ という関係が常に成り立つ。また、応力-応力速度のなす角 α は次式のように定義される。

$$\cos \alpha \equiv \frac{\mathbf{T}' \cdot \dot{\mathbf{T}}'}{\sqrt{\mathbf{T}' \cdot \mathbf{T}'} \sqrt{\dot{\mathbf{T}}' \cdot \dot{\mathbf{T}}'}} \quad \dots\dots\dots (18)$$

さらに、 $\mathbf{T}' \cdot \dot{\mathbf{T}}' = \bar{\sigma} \dot{\bar{\sigma}}$ となることを考慮して、式(16)および式(17)を式(18)に代入すれば

$$\cos \alpha = \dot{\bar{\sigma}} / \bar{\sigma} \quad \dots\dots\dots (19)$$

となる。以上より、式(14)は以下のように尖り点構成式として一般化される。

$$\mathbf{D}^p = \dot{\bar{\epsilon}}^p \{ (\cos \delta) \mathbf{m}' + (\sin \delta) \mathbf{l}' \} \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここで、応力方向テンソル $\mathbf{m}'$ と応力に垂直な方向テンソル $\mathbf{l}' (\mathbf{m}' \perp \mathbf{l}')$ はそれぞれ

$$\mathbf{m}' \equiv \frac{3}{2} \frac{\mathbf{T}'}{\bar{\sigma}}, \quad \mathbf{l}' \equiv \frac{3}{2} \frac{1}{\bar{\sigma} \sin \alpha} \left(\dot{\mathbf{T}}' - \frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma}} \mathbf{T}' \right) \quad \dots\dots\dots (21)$$

と定義される。また、相当塑性ひずみ速度 $\dot{\bar{\epsilon}}^p (= \dot{\bar{\epsilon}}^p)$ は

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p \equiv \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{D}^p \cdot \mathbf{D}^p} \quad \dots\dots\dots (22)$$

であるから、式(20)の両辺の大きさは常に一致することが容易に理解できる。

一方、前報で示したように、変形理論による非共軸構成式：

$$\mathbf{D}^p = \frac{3}{2} \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^p}{\bar{\sigma}} \mathbf{T}' + \frac{3}{2} \frac{1}{H_s} \left(\dot{\mathbf{T}}' - \frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma}} \mathbf{T}' \right) \quad \dots\dots\dots (23)$$

の両辺を二乗すれば

$$\dot{\bar{\epsilon}}^{p2} = \dot{\bar{\epsilon}}^{p2} + (1/H_s)^2 (\bar{\sigma}^2 - \dot{\bar{\sigma}}^2) \quad \dots\dots\dots (24)$$

となり両辺の大きさが一致しない。ここで、 $H_s \equiv \bar{\sigma} / \dot{\bar{\epsilon}}^p$ である。コーナ理論による構成式においても、両辺の大きさは一致しない。したがって、従来の非共軸構成式は数理的に矛盾していることがわかる。これに対して、ここで得られた式(20)にはこの矛盾は存在しない。

さて、式(20)は二つの未知係数 $\cos \delta$ および $\sin \delta$ を含むので、未知係数を一義的に決定できない。そこで、次のような考察に基づいて $\sin \delta$ を具体化することを試みる。図3より、 α が単調増加する場合、 $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ では、 D^p が $\dot{\mathbf{T}}'$ に引張られ δ は単調増加し、 $\alpha = \pi/2$ では $\delta = \delta_{\max}$ となる。一方、 $\pi/2 \leq \alpha \leq \pi$ では D^p は $\dot{\mathbf{T}}'$ とは逆方向に引張られ δ は単調減少する。なお、図3より δ は $0 \leq \delta \leq \pi/2$ および $\delta \leq \alpha$ を満たす。

また、ひずみ速度感度が小さいほどせん断帯形成が早まること⁽⁶⁾を考慮して、本報では、 $\sin \delta$ を次のようにモデル化する。

$$\left. \begin{aligned} \sin \delta &= k(m) \sin \alpha \\ k(m) &= \begin{cases} p_1 \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{m}{p_2} \right) & \text{for } 0 \leq m < p_2 \\ p_1 [\tanh \{ -p_3 (m - p_2) \} + 1] & \text{for } p_2 \leq m \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (25)$$

ここでは、 $p_1 = \sin(\pi/8)$ 、 $p_2 = 0.0001$ および $p_3 = 10$ とする。これらの値および関数 $k(m)$ は本解析と過去の解析例⁽⁶⁾⁽¹⁴⁾におけるせん断帯モード、ひずみ値、ひずみ速度値などを参考にして決定した。式(25)より式(20)および式(21)は次式のように具体化される。

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^p &= \frac{3}{2} \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^p}{\bar{\sigma}} \sqrt{1 - (k \sin \alpha)^2} \mathbf{T}' \\ &+ \frac{3}{2} \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^p}{\bar{\sigma}} k \left(\dot{\mathbf{T}}' - \frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma}} \mathbf{T}' \right) \quad \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

次に、通常の変形弾性構成式と粘塑性構成式(26)より弾粘塑性構成式を導出する。現配置で表示した共回転弾性構成式は

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{C}^e : \mathbf{D}^e = \mathbf{C}^e : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p) \quad \dots\dots\dots (27)$$

のように表せる。ここで、 $\mathbf{C}^e$ は通常の4階弾性定数テンソルであり、 $\mathbf{D}^e$ は弾性変形速度テンソルである。式(26)を式(27)へ代入すれば、次式ようになる。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{T}} &= \mathbf{C}^e : \mathbf{D} - 2\mu \left\{ \frac{3}{2} \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^p}{\bar{\sigma}} \sqrt{1 - (k \sin \alpha)^2} \mathbf{T}' \right. \\ &+ \left. \frac{3}{2} \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^p}{\bar{\sigma}} k \left(\dot{\mathbf{T}}' - \frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma}} \mathbf{T}' \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

ここで、応力速度の偏差部分は全応力速度および応力速度の静水圧部分を用いて

$$\dot{\mathbf{T}}' = \dot{\mathbf{T}} - \frac{3\lambda + 2\mu}{3} (\text{tr } \mathbf{D}) \mathbf{I} \quad \dots\dots\dots (29)$$

と書き直せる。ここで λ および μ はLamé定数である。また、相当応力の物質時間微分は $\dot{\bar{\sigma}} = \mathbf{m}' \cdot \dot{\mathbf{T}}$ より

$$\dot{\bar{\sigma}} = \frac{3\mu}{\bar{\sigma}} \mathbf{T}' \cdot \mathbf{D} - 3\mu \dot{\bar{\epsilon}}^p \sqrt{1 - (k \sin \alpha)^2} \quad \dots\dots\dots (30)$$

となる。式(29)および式(30)を式(28)に代入して整理すれば、次式のような弾粘塑性構成式が得られる。

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{C}^v : \mathbf{D} - \dot{\bar{\epsilon}}^p \sqrt{1 - (k \sin \alpha)^2} \mathbf{P}' \quad \dots\dots\dots (31)$$

ここで

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^v &= \frac{1}{1 + 3\mu k (\dot{\bar{\epsilon}}^p / \bar{\sigma})} \left[\mathbf{C}^e + 3\mu k \left(\frac{\dot{\bar{\epsilon}}^p}{\bar{\sigma}} \right) \right. \\ &\times \left. \left\{ \frac{(3\lambda + 2\mu)}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 3\mu \frac{\mathbf{T}' \otimes \mathbf{T}'}{\bar{\sigma}^2} \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}' = \mathbf{C}^v : \mathbf{m}' \quad \dots\dots\dots (33)$$

である。式(31)、(32)および式(33)は $\dot{\bar{\epsilon}}^p \rightarrow 0$ のとき、弾性構成式に帰着するため、負荷から除荷への遷移を連続的に表現できることがわかる。

次に安定した FEM 解析を行う準備として、構成式 (31) に接線係数法⁽⁶⁾を適用する。時刻 t と $t + \Delta t$ の間の相当塑性ひずみ増分 $\Delta \bar{\epsilon}^p$ は次式のように表現される。

$$\Delta \bar{\epsilon}^p = \Delta t \left(\frac{\dot{\bar{\epsilon}}_t^p}{1 + \xi_2} + \frac{1}{\xi_1} \frac{\xi}{1 + \xi_2} \mathbf{P}' \cdot \mathbf{D} \right) \quad \dots\dots\dots (34)$$

ここで、添字 t は時刻 t における値を示す。また、 ξ_1 および ξ_2 は硬化則が決まれば、それを用いて次式のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &\equiv \sqrt{1 - (k \sin \alpha)^2} \mathbf{P}' \cdot \mathbf{m}' - \left(\frac{\partial \bar{\epsilon}^p}{\partial \bar{\sigma}} \right) \left(\frac{\partial \bar{\epsilon}^p}{\partial \bar{\sigma}} \right)^{-1} \\ \xi_2 &\equiv \theta(\Delta t) \xi_1 \left(\frac{\partial \bar{\epsilon}^p}{\partial \bar{\sigma}} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (35)$$

なお、 θ は応力積分パラメータである。以上より、構成式 (31) は次のように書き改められる。

$$\bar{\mathbf{T}} = \mathbf{C}^{\text{tan}} : \mathbf{D} - \frac{\dot{\bar{\epsilon}}_t^p}{1 + \xi_2} \sqrt{1 - (k \sin \alpha)^2} \mathbf{P}' \quad \dots (36)$$

ここで

$$\mathbf{C}^{\text{tan}} = \mathbf{C}^v - \frac{1}{\xi_1} \frac{\xi_2}{1 + \xi_2} \sqrt{1 - (k \sin \alpha)^2} \mathbf{P}' \otimes \mathbf{P}' \quad \dots\dots\dots (37)$$

である。

4. 大変形 FEM 解析

式 (36) の増分形構成式を Update Lagrange 形式の仮想仕事の原理に代入し、板材に長手方向の強制変位を与えた際の平面ひずみ問題を静的陽解法を用いて FEM 解析する。変形前の解析メッシュ (図 4) は長さ $2L_0$ 、幅 $2(h_0 + \Delta h_0)$ とする。ここで、平均幅は $2h_0$ であり、初期不整 $2\Delta h_0$ は Tvergaard ら⁽¹⁴⁾ と同様に次式で与える。

$$\Delta h_0 = h_0 \left\{ -h_1 \cos \left(\frac{\pi x_1}{L_0} \right) + h_2 \cos \left(\frac{m_w \pi x_1}{L_0} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (38)$$

なお、 h_1 、 h_2 および m_w はそれぞれ不整振幅および波数である。解析モデルの対称性を考慮して、解析領域は図 4 における第 1 象限すなわち解析メッシュ全体の

Fig. 4 A finite element mesh employed in the present analysis

1/4 のみとする。さらに、1/4 部分は四角形単位で x_2 方向に 16、 x_1 方向に 48 分割され、一つの四角形は四つの三角形要素すなわち Crossed triangles 要素で構成される。また解析領域の境界条件は変位 $\mathbf{u}$ と荷重 $\mathbf{P}$ を用いて次のように規定される。

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= 0, P_2 = 0 & \text{at } x_1 = 0 \\ u_2 &= 0, P_1 = 0 & \text{at } x_2 = 0 \\ P_1 &= P_2 = 0 & \text{at } x_2 = h_0 + \Delta h_0 \\ u_1 &= U, P_2 = 0 & \text{at } x_1 = L_0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (39)$$

ここで、 U は強制変位である。また x_1 方向の反力 R は次式で与えられる。

$$R = \frac{1}{2h_0} \int_{-h_0}^{h_0} P_1(L_0, x_2) dx_2 \quad \dots\dots\dots (40)$$

本解析では初期アスペクト比を $L_0/h_0 = 3$ 、不整振幅を $h_1 = 0.00375$ 、 $h_2 = 0.00150$ 、波数を $m_w = 4$ とする。また、ひずみ速度硬化則には次式を用いる⁽¹⁵⁾。

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \dot{\epsilon}_r \operatorname{sgn}(\bar{\sigma}) \left| \frac{\bar{\sigma}}{g(\bar{\epsilon}^p, \dot{\bar{\epsilon}}^p)} \right|^{(1/m)} \quad \dots\dots\dots (41)$$

ここで、 m と $\dot{\epsilon}_r$ はそれぞれひずみ速度感度指数および参照ひずみ速度であり、 g は流れ応力である。なお、強制変位速度は $(\dot{U}/L)/\dot{\epsilon}_r = 1.00$ で与える。また、解析では微小増分を前提とする。

4.1 軟鋼の解析例 本構成式によってせん断帯が形成されることを確認するとともに、従来の理論による数値計算結果と本理論による結果を比較するために、ポリマよりもひずみ速度感度が低くせん断帯がより明瞭に現れると考えられる軟鋼の大変形解析をまず行う。なお従来のコーナ理論は粘塑性では定式化されていないため、それとの比較は行わない。軟鋼 (Young 率: $E = 200$ GPa, Poisson 比: $\nu = 0.330$) の

Fig. 5 Curves of load versus end-displacement of mild steel

流れ応力は通常どおり次式のような n 乗則で与えることにする。

$$g(\dot{\epsilon}^p) = E\epsilon_r^{-n}(\dot{\epsilon}^p + \epsilon_r)^n \quad \dots\dots\dots (42)$$

ここで、各材料定数は $m=0.001$, $\dot{\epsilon}_t=0.002 \text{ s}^{-1}$, $\epsilon_r=0.002$, $n=0.0625$ である。まず本理論の数値解析的優位性は荷重-伸び線図(図5)に現れる。図5において荷重は $g(0)=E\epsilon_r$ で無次元化されている。変形理論による計算では、最大荷重の後に荷重-伸び曲線はほぼ垂直に下降し、あるひずみ値以上伸びなくなり、計算が停止する。この非現実的な荷重応答の原因は従来から次のように論じられている⁽¹⁶⁾。変形理論を用いた場合、弾性除荷過程では材料の弾性係数よりも小さい弾塑性係数で除荷される。したがって、弾性除荷中に実際より多くのひずみが回復する。このひずみの回復がくびれ部分のひずみの進行と打ち消しあうことによって、荷重の急激な減少が現れる。一方、本理論では弾性除荷は弾性構成式で表現されるため、荷重の急激な減少は現れない。また図6が示すように、流れ

Fig. 6 Shear band formation of the mild steel for the present theory computation at $U/L=0.150$

Fig. 7 Shear band formation of the mild steel for the present theory computation at $U/L=0.150$

Fig. 8 Hardening curves of PP

理論では表現されなかったせん断帯の表現が可能となる。この理由は以下のように考えられる。式(41)においてはあるひずみ値を境に σ の値が g より大きくなるため、 $\dot{\epsilon}^p$ は m が小さい材料の場合ほど急激に大きくなる。したがって、ひずみおよびひずみ速度が加速度的に局所化する。さらに前述のように、式(25)のモデリングでは式(26)の非共軸項の効果が m が小さいほど大きくなるため、ひずみおよびひずみ速度の局所化領域がせん断帯に集中する。なお、式(25)₂ 中の k 値をより大きくなるようにモデル化すれば、せん断帯はより鮮明に現れる。さらに、本コーナ理論は、従来のコーナ理論では解析できなかったひずみ速度依存性材料に対しても適用できる。また従来のコーナ理論⁽⁸⁾⁽⁹⁾を適用した解析例⁽¹⁴⁾と同様に、初期不整の差違がせん断帯のモードに与える影響も表現できる。図7では、 $h_2=0$ とした以外は図6と同じ条件下での解析例であり⁽¹⁴⁾、X形状ではなくひし形状のせん断帯が再現されている。さらに、 k と初期不整という二つの因子によってせん断帯の幅も変化させることができる。以上より、せん断帯の形成速度、モード、幅などはひずみ速度感度と初期不整に強く依存する。したがって、本構成式はせん断帯形成が予測可能であり、かつそのような予測に対して適当なモデルであるといえる。

4・2 ゴム低充てんPPの解析例 小林・岡田⁽¹⁾
によるゴム低充てんPP材(Young率: $E=1.80 \text{ GPa}$, Poisson比: $\nu=0.300$)の実験結果より、式(41)

Fig. 9 Deformed meshes and equivalent viscoplastic strain rate distributions of PP for the present computation

の硬化則における流れ応力の関数形は次式のように特定される。

$$\left. \begin{aligned} g(\bar{\epsilon}^p, \dot{\bar{\epsilon}}^p) &= \sigma_r \{ \tanh(k_1 \bar{\epsilon}^p) + k_2 \\ &\quad + H(\bar{\epsilon}^p - \epsilon_r) k_3 (\exp \bar{\epsilon}^p - \exp \epsilon_r) \} \\ \epsilon_r &= k_4 \left(\frac{\dot{\bar{\epsilon}}^p}{\dot{\bar{\epsilon}}_r} \right)^n \end{aligned} \right\} \dots\dots (43)$$

本硬化則による硬化曲線を硬化データとともに図8に示す。ここで、各材料定数は $m=0.0411$, $\dot{\epsilon}_r=0.893 \text{ s}^{-1}$, $\sigma_r=11.0 \text{ MPa}$, $n=0.0749$, $k_1=100$, $k_2=1.85$, $k_3=2.37$, $k_4=0.175$ である。また $H(\bar{\epsilon}^p - \epsilon_r)$ は単位ステップ関数である。この硬化則には、応力一定部分、再硬化部分の存在のほかに再硬化の開始点のひずみ速度依存性などの特徴がある。

本構成式とゴム低充てんPP材に対する硬化則によるひずみ速度分布を図9に示す。まず図9(a)は局所化の開始時を表しており、ひずみ速度値の比較的大きい領域がX形せん断帯状に分布することがわかる。これは、非共軸項の存在によるものと考えられる。図9(b)では安定したくびれとともにひずみ速度のX形

Fig. 10 Shear band formation of PP without rehardening for the present theory computation at $U/L=0.150$

Fig. 11 Deformed meshes and equivalent viscoplastic strain distributions of PP for the present computation

せん断帯が伝ばし始め、図9(c)に進むにつれ、伝ばしつつ分布は次第に均一化される傾向がある。この理由は以下のように考えられる。式(43)より再硬化の開始点におけるひずみ値 ϵ_r が小さい材料の場合ほど、 ϵ_r を境に g の再増加の開始が早まり、 $\dot{\bar{\epsilon}}^p$ は急激に小さくなって、せん断帯の発達を抑えられるためである。このことは、 m の値はそのまま ϵ_r が大きい場合の図10 [式(43)₂の $k_4=0.800$] において金属と同様に鮮明なせん断帯が現れるということからも妥当であるといえる。なお図9では、(a)から(c)に変形が進むにつれて、解析モデルの中央部分のひずみ速度値が小さくなっていく。したがって、解析モデル中央で発達してたくびれの形成が抑えられ、徐々にくびれ発達部位が引張方向に伝ばしていくことがわかる。くびれは、微視的には分子鎖の絡まりが解けることによって発達する。その後、くびれの発達が安定化するのは、徐々に分子鎖が配向硬化するからであり、安定くびれが引張方向に移動するのは、配向硬化が未配向部分へ伝ばするためといわれている⁽¹⁷⁾。一方、ひずみは図11(a)から(c)のように解析モデルの中央断面周辺に局所的に分布していくが、せん断帯状に集中する傾向は乏しい。これは金属より m が大きく、かつ図10の場合より ϵ_r が小さいからである。なお、この結果は、ひずみ速度に強く依存するポリマのような材料ではせん断帯を伴ったくびれの成長が安定しつつ伝ばする⁽¹⁾ という実現象に符合する。以上より、せん断帯形成の原因は構成式の非共軸性であり、せん断帯の強さおよびモードは材料のひずみ速度感度に支配される。また、せん断帯の伝ばおよびくびれの安定伝ばはポリマ特有の指数関数形後続硬化を含む硬化則に起因するといえる。不安定なくびれの成長から安定なくびれの伝ばへの遷移は、荷重-伸び線図(図12)において

Fig. 12 Curves of load versus end-displacement of PP

荷重の減少が停止し徐々に一定化することに対応している。なお荷重-伸び線図(図12)が実験データとほぼ一致することから、本構成式による数値計算の妥当性も確認できる。

5. 結 言

前報で提案した流れ則に基づく非共軸粘塑性構成式を、散逸曲面に対する尖り点構成式として一般化した。次に、散逸曲面における応力-応力速度のなす角と応力-塑性変形速度のなす角との関係をモデル化し、構成式の具体形を決定した。さらに、PP材に対する実験結果から同定して得られる硬化則を用いて大変形FEM解析を平面ひずみ引張下で行った結果、以下の結論を得た。

(1) 本非共軸粘塑性構成式は、常に両辺の大きさが一致するモデルであり、従来の尖り点構成式よりも材料係数の数が少なく、その同定も容易である。

(2) 本粘塑性構成式から得られる弾粘塑性構成式は、比例負荷から弾性除荷への連続的な遷移を表現でき、せん断帯形成および初期不整に対するせん断帯モードの変化などを予測できる。

(3) 本構成式を用いたPP材の大変形FEM解析では、くびれの安定した伝ばとともに、せん断帯が弱まりつつ伝ばするようすを再現できる。

著者らは、多くの文献や資料を提供くださった神戸

大学の富田佳宏教授ならびにFEM解析コード作成にご協力いただいた山形大学の黒田充紀助教授と慶應義塾大学の野口裕久助教授に深謝する。

文 献

- (1) 小林誠一・岡田裕, 機講論, I-98-3 (1998-10), 473-474.
- (2) 富田佳宏・ほか2名, 機論, 58-554, A(1992), 1859-1863.
- (3) Budiansky, B., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 26 (1959), 259-264.
- (4) Stören, S. and Rice, J. R., *J. Mech. Phys. Solids*, 23-6 (1975), 421-441.
- (5) Peirce, D., ほか2名, *Comput. Struct.*, 18-5 (1984), 875-887.
- (6) 富田佳宏, 数値弾塑性力学, (1990), 166-171, 養賢堂.
- (7) 北川浩, 機論, 48-427, A(1982), 251-258.
- (8) Christoffersen, J. and Hutchinson, J. W., *J. Mech. Phys. Solids*, 27-5/6 (1979), 465-487.
- (9) 後藤学, 機論, 47-424, A(1981), 1389-1397.
- (10) 村上大介・志澤一之・ほか2名, 機論, 68-668, A(2002), 674-681.
- (11) Shizawa, K. and Zbib, H. M., *Int. J. Plasticity*, 15-9 (1999), 899-938.
- (12) Ziegler, H., *An Introduction to Thermomechanics*, (1983), 268, North-Holland.
- (13) Green, A. E. and Zerna, W., *Theoretical Elasticity*, 2nd ed., (1968), 72, Oxford Univ. Press.
- (14) Tvergaard, V., ほか2名, *J. Mech. Phys. Solids*, 29-2 (1981), 115-142.
- (15) Pan, J. and Rice, R., *Int. J. Solids Struct.*, 19-11 (1983), 973-987.
- (16) Fager, L. O. and Bassani, J. L., *Int. J. Solids Struct.*, 22-11 (1986), 1243-1257.
- (17) Tomita, Y., *Int. J. Mech. Sci.*, 42-8 (2000), 1455-1469.