Updated Lagrange 法による超弾性体の応力速度と有限要素定式化*

松田 昭博^{*1}, 渡部 修^{*2}

Updated Lagrangian Approach of Stress Rate and Finite Element Formulations of the Hyperelastic Body

Akihiro MATSUDA^{*3} and Osamu WATANABE^{*3} Geotechnical and Earthquake Engineering Department, Central Research Institute of Electric Power Industry,
1646 Abiko, Abiko-shi, Chiba, 270-1194 Japan

In this paper, we propose updated Lagrangian formulation of hyperelastic body, which has been formulated by total Lagrangian approach, and confirm the accuracy and stability of developed finite element analysis code. The referenced configuration of proposed hyperelastic constitutive equation consists with the configuration of elasto-plasticity for finite deformation by applying updated Lagrangian approach. So, both of constitutive equations can be treated simultaneously in analysis. Numerical results by updated Lagrangian formulation show higher stability under large deformation.

Key Words: Finite Element Method, Hyperelasticity, Updated Lagrangian Formulation

1 はじめに

連続体の力学では通常、応力の釣り合いを Lagrange 表示を用いて記述し、実際の非線形解析においては、仮想仕事の原理から得られる有限要素方程式を用いて増分解析を逐次すすめることが多い。仮想仕事の原理を記述するにあたって、参照する配置には変形前の初期配置と変形後の現配置の 2 つの配置が考えられる。前者は total Lagrange 法、後者は updated Lagrange 法と呼ばれる⁽¹⁾⁽²⁾。仮想仕事の原理を導く際に total Lagrange 法と updated Lagrange 法のどちらを用いるかは、応力とひずみの関係を表す構成式が初期配置と現配置のどちらを参照した方が容易に記述できるかによって、もしくは数値解析の対象とする現象によって決まる⁽³⁾。ただし、両手法とも参照する配置が異なるだけで記述する現象は原理的に一致する。しかしながら、これらの仮想仕事の原理を記述する応力とひずみには多くの組み合わせが存在し、付加する拘束条件や離散化の方法によって解析結果の精度が悪くなる可能性がある。そのため、

非圧縮性の条件および積分則の影響がこれまでに詳細に検討されてきた⁽⁴⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾。それらの検討では、ゴム材料などの高分子材料の変形は可逆的であることと、応力とひずみの関係が初期配置を参照した方が容易に記述できることから、total Lagrange 法による有限要素定式化がなされてきた。しかし、現在では超弾性構成式を弾塑性構成式の弾性部分へ適用すること⁽⁷⁾や生体のモデル化⁽⁸⁾などに適用することが検討されている。これらの現象は超弾性構成式だけでなく、弾塑性構成式など他の構成式と併せて用いるため、updated Lagrange 法を用いた定式化を行う必要がある。

また、超弾性体のポテンシャル関数 W を右 Cauchy-Green 変形テンソルの 1 次から 3 次の不変量 I_1, I_2, I_3 であらわす場合に応力が初期値を持つ問題を解決するには、以下の初期値を相殺する項を加える方法と⁽⁹⁾、

$$\bar{W} = W(I_1, I_2) - \left\{ \frac{\partial W}{\partial I_1} \Big|_{I_1=3, I_2=3} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \Big|_{I_1=3, I_2=3} \right\} \cdot g(I_3) \quad (1)$$

ポテンシャルを修正変形テンソルによって記述する以下の方法が用いられている⁽⁵⁾⁽¹⁰⁾。

$$\bar{W} = W(\bar{C}) = W(\bar{I}_1, \bar{I}_2) \quad (2)$$

変形が小さい場合、両手法から得られる応力は一致する。前報⁽¹¹⁾では式 (1) を基に速度形の Truesdell の応

* 原稿受付 2001 年 6 月 25 日。

^{*1} 正員, 電力中央研究所地盤耐震部 (〒270-1194 我孫子市我孫子 1646)。^{*2} 正員, 筑波大学機能工学系 (〒305-8573 つくば市天王台 1-1-1)。

E-mail: amatsuda@cricpi.denken.or.jp

力を用いた有限要素定式化を示した。しかしながら、式 (1) を用いる場合、変形が大きくなるにしたがって偏差応力に圧力成分が生じるなど不合理な点もあり、近年の研究においては式 (2) を用いることが多い。

そこで、本論文は式 (2) の修正法を用いたポテンシャルより求めた Truesdell の応力速度を用いた updated Lagrange 法による有限要素定式化を行い、従来の手法との相違を明らかにする。また、応力速度および仮想仕事の原理の定式化において、体積成分を取り除いた中間配置を導入することで、偏差体積成分を厳密に分離する。導いた構成式を基に有限要素解析コードを開発し、数値解析例を total Lagrange 法を用いた解析コードおよび汎用的な解析コード⁽¹²⁾などと比較することで、本解析手法が total Lagrange 法と数値解析的に等価であることを示す。さらに、大変形域での安定性および数値解の精度についても検討する。

2 超弾性体の有限要素定式化

2.1 変形と速度 初期配置 C^0 における物質点 X と現配置 C でのベクトル x によって変形勾配テンソル F は定義される。

$$F = \frac{\partial x}{\partial X} \quad (3)$$

変形勾配テンソルから体積変形を取り除いた以下の修正変形勾配テンソル $\bar{F}$ を導入する⁽¹³⁾。

$$\bar{F} = J^{-1/3} F; J = \det(F) \quad (4)$$

ここで記号 $(\bullet)$ は体積成分を分離した状態量であることをあらわす。初期配置 C^0 から体積変形による写像である中間配置 $\bar{C}$ を考えると、それぞれの配置は図 1 のとおりとなる。初期配置の状態量は $J^{1/3} I$ によって中間配置に写像されて、そこから更に中間配置から $\bar{F}$ によって現配置まで写像される。ここで、体積変形を取り除いた右 Cauchy-Green 変形テンソル $\bar{C}$ と左 Cauchy-Green 変形テンソル $\bar{B}$ は修正変形勾配テンソル $\bar{F}$ と以下の関係がある。

$$\bar{C} = \bar{F}^t \cdot \bar{F}, \bar{B} = \bar{F} \cdot \bar{F}^t \quad (5)$$

これらの修正された変形テンソルからは体積成分が除去されているため $\bar{I}_3$ は常に 1 となる。また、体積変化を取り除いた速度勾配テンソル $\bar{L}$ と変形速度テンソル $\bar{D}$ は修正変形勾配テンソル $\bar{F}$ によってあらわされ、

$$\bar{L} = \dot{\bar{F}} \cdot \bar{F}^{-1}, \bar{D} = (\bar{L})_s \quad (6)$$

修正された $\bar{D}$ は変形速度テンソルの偏差成分 D' と一致し、体積変形を含まない変形速度テンソルとなる。

Fig 1: Initial and intermediate configurations

2.2 偏差応力の弾性ポテンシャル 超弾性体は次式に示すような単位体積当たりの弾性ポテンシャル W を有する材料として定義される。

$$\dot{W} = \frac{1}{2} S : \dot{C} = J T : D \quad (7)$$

ここで、 S は第 2 種 Piola-Kirchhoff 応力、 E は Green-Lagrange ひずみテンソルをあらわす。Green-Lagrange ひずみテンソルは右 Cauchy-Green 変形テンソルによって以下のようにあらわされる。

$$E = \frac{1}{2} (C - I) \quad (8)$$

弾性ポテンシャル $W(C)$ はスカラー関数であるので右 Cauchy-Green 変形テンソル C の不変量の関数としてあらわすことができる。

$$W(C) = W(I_1, I_2, I_3) \quad (9)$$

ここで、右 Cauchy-Green 変形テンソルとその不変量の間には以下の関係がある。

$$I_1 = C : I, I_2 = \frac{1}{2} (I_1^2 - C^2 : I), I_3 = \det(C) \quad (10)$$

さらに、体積変化が小さい場合、弾性ポテンシャル W は修正右 Cauchy-Green 変形テンソル $\bar{C}$ であらわされる偏差ポテンシャル $\bar{W}(\bar{C})$ と、変形勾配テンソル F のデターミナント J であらわされる体積ポテンシャル $U^\circ(J)$ に分離できる。初期配置を参照配置とする第 2 種 Piola-Kirchhoff 応力は弾性ポテンシャルを右 Cauchy-Green 変形テンソル C で偏微分することで得られる。

$$S^0 = 2 \frac{\partial W(C)}{\partial C} \quad (11)$$

現配置を参照配置とする Cauchy 応力 T は変形勾配テンソル F によって変換される。

$$T = \frac{1}{J} F \cdot S^0 \cdot F^t \quad (12)$$

Cauchy 応力と第 2 種 Piola-Kirchhoff 応力は現配置における体積成分と偏差成分に分離できる。

$$T = T' + T_m I, S^0 = S'^0 + S_m^0 \quad (13)$$

上式の成分は弾性ポテンシャルと各配置での状態量によって以下のように求まる。

$$\begin{aligned} S'^0 &= 2 \frac{\partial \bar{W}(\bar{C})}{\partial \bar{C}} = 2 \frac{\partial \bar{W}(\bar{C})}{\partial \bar{C}} \frac{\partial \bar{C}}{\partial C} \\ S_m^0 &= \frac{\partial U^\circ(J)}{\partial C} = T_m \cdot J \cdot C^{-1} \end{aligned}$$

$$\mathbf{T}' = 2\mathbf{F} \frac{\partial \bar{W}(\bar{\mathbf{C}})}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \mathbf{F}^t \quad (14)$$

ここで、ポテンシャル関数 $W(\bar{\mathbf{C}})$ はスカラー関数であるので $\bar{W}(\bar{\mathbf{C}})$ は中間配置における右 Cauchy-Green 変形テンソル $\bar{\mathbf{C}}$ の第 1 および第 2 不変量によって表す。

$$\bar{W}(\bar{\mathbf{C}}) = \bar{W}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) \quad (15)$$

上式のように変形の不変量であらわした方が数値モデルを導入しやすい。修正右 Cauchy-Green 変形テンソル $\bar{\mathbf{C}}$ の不変量は

$$\bar{I}_1 = \bar{\mathbf{C}} : \mathbf{I}, \bar{I}_2 = \frac{1}{2}(\bar{I}_1^2 - \bar{\mathbf{C}}^2 : \mathbf{I}), \bar{I}_3 = 1.0 \quad (16)$$

となる。修正不変量を用いた弾性ポテンシャルを変形テンソルで偏微分することで第 2 種 Piola-Kirchhoff 応力 $\mathbf{S}'^0$ を得る。

$$\begin{aligned} \mathbf{S}'^0 = & 2 \left\{ \frac{\partial \bar{W}(\bar{I}_1, \bar{I}_2)}{\partial \bar{I}_1} J^{-\frac{2}{3}} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \bar{I}_1 \mathbf{C}^{-1} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial \bar{W}(\bar{I}_1, \bar{I}_2)}{\partial \bar{I}_2} J^{-\frac{4}{3}} \left(\bar{I}_1 \mathbf{I} - \mathbf{C} - \frac{2}{3} \bar{I}_2 \mathbf{C}^{-1} \right) \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

現配置での Cauchy 応力は以下のとおりとなる。

$$\begin{aligned} \mathbf{T}' = & \frac{2}{J} \left\{ \frac{\partial \bar{W}(\bar{I}_1, \bar{I}_2)}{\partial \bar{I}_1} J^{-\frac{2}{3}} \left(\mathbf{B} - \frac{1}{3} \bar{I}_1 \mathbf{I} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial \bar{W}(\bar{I}_1, \bar{I}_2)}{\partial \bar{I}_2} J^{-\frac{4}{3}} \left(\bar{I}_1 \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} - \frac{2}{3} \bar{I}_2 \mathbf{I} \right) \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

これらの応力には以下の条件がある。

$$\mathbf{S}'^0 : \mathbf{C} = 0, \mathbf{T}' : \mathbf{I} = 0 \quad (19)$$

ここで、式 (17) に示す初期配置における第 2 種 Piola-Kirchhoff 応力の速度形を求めると、右 Cauchy-Green 変形テンソルの速度 $\dot{\bar{\mathbf{C}}}$ を用いて以下のとおりとなる。

$$\dot{\mathbf{S}}'^0 = 2 \left\{ \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{\mathbf{C}} \partial \bar{\mathbf{C}}} \right\} : \dot{\bar{\mathbf{C}}} \quad (20)$$

初期配置における第 2 種 Piola-Kirchhoff 応力速度は $J^{1/3} \mathbf{I}$ を左右から掛けることで中間配置における応力速度 $\dot{\mathbf{S}}'$ へ写像される。

$$\dot{\mathbf{S}}' = J^{2/3} \mathbf{I} \cdot \dot{\mathbf{S}}' \cdot \mathbf{I} \quad (21)$$

中間配置での状態量を用いて記述することで体積変化に関わる成分を完全に取り除いた応力速度が得られる。

次に、弾塑性体の速度型構成式においてよく用いられる Truesdell の応力速度を求める⁽¹⁴⁾。Truesdell の応力速度 $\dot{\mathbf{T}}_T$ は第 2 種 Piola-Kirchhoff 応力速度と以下の関

係がある。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{T}}_T &= \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{S}}^0 \cdot \mathbf{F}^t \\ &= \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}^t + (\text{tr} \mathbf{D}) \mathbf{T} \end{aligned} \quad (22)$$

上式は $\mathbf{S}^0 = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-t}$ の関係を物質時間微分することで得られる。また、体積変化に関する成分を除去した Truesdell の応力速度 $\dot{\mathbf{T}}'_T$ の偏差成分は $\dot{\mathbf{S}}' = J \bar{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \mathbf{T}' \cdot \bar{\mathbf{F}}^{-t}$ の関係から求まる。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{T}}'_T &= \frac{1}{J} \bar{\mathbf{F}} \cdot \dot{\mathbf{S}}' \cdot \bar{\mathbf{F}}^t \\ &= \dot{\mathbf{T}}' - \bar{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{T}' - \mathbf{T}' \cdot \bar{\mathbf{L}}^t + (\text{tr} \mathbf{D}) \mathbf{T}' \end{aligned} \quad (23)$$

2.3 ポテンシャルエネルギー停留定理 Updated Lagrange 法では以下のポテンシャルエネルギー停留定理を用いる。

$$\begin{aligned} \Pi^U(\mathbf{v}) = & \int [U_T + \frac{1}{2} \mathbf{T} : (\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \nabla)] dV \\ & - \int \dot{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} dS - \int \rho \dot{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{v} dV \end{aligned} \quad (24)$$

U_T は Truesdell の応力速度 $\dot{\mathbf{T}}_T$ にかかわる内部仕事率をあらわし、その変分が以下になるものである。

$$\delta U_T = \dot{\mathbf{T}}_T : \delta \mathbf{D} \quad (25)$$

ここで、 dV は変形後の体積要素、 dS は変形後の力学的境界における面積要素、 $\dot{\mathbf{t}}$ は公称表面力速度、 $\dot{\mathbf{g}}$ は物体力速度、 ρ は変形後の密度をあらわす。また、total Lagrange 法においては以下のポテンシャルエネルギー停留定理を用いる。

$$\Pi^T(\mathbf{u}) = \int W dV_0 - \int \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} dS_0 - \int \rho_0 \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} dV_0 \quad (26)$$

ここで、 dV_0 は変形前の体積要素、 dS_0 は変形前の力学的境界における面積要素、 $\mathbf{t}$ は表面力、 $\mathbf{g}$ は物体力、 ρ_0 は変形前の密度をあらわす。さらに、比較に用いる汎用解析コード ABAQUS⁽¹²⁾ は以下の updated Lagrange 法によるポテンシャルエネルギー停留定理を用いて、Lagrange の未定定数法を用いて変位と圧力を未知数とした混合型の有限要素定式化を行っている。

$$\Pi(\mathbf{v}) = \int \mathbf{T} : \mathbf{D} dV - \int \dot{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} dS - \int \rho \dot{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{v} dV \quad (27)$$

本研究の定式化は Truesdell の応力速度 $\dot{\mathbf{T}}_T$ を用いることで弾塑性構成式と応力速度が一致しているところに特徴がある。

2nd Piola-Kirchhoff 応力速度の具体的な形を求めると以下のとおりとなる。ここで、 $\bar{\mathbf{C}}^{(t)}$ は total Lagrange 法における接線剛性マトリックスとなる。

$$\frac{1}{2} \dot{\mathbf{S}}' = \left\{ \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_1 \partial \bar{I}_1} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \bar{I}_1 \bar{\mathbf{C}}^{-1} \right) \otimes \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \bar{I}_1 \bar{\mathbf{C}}^{-1} \right) + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_1 \partial \bar{I}_2} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \bar{I}_1 \bar{\mathbf{C}}^{-1} \right) \otimes \left(\bar{I}_1 \mathbf{I} - \bar{\mathbf{C}} - \frac{2}{3} \bar{I}_2 \bar{\mathbf{C}}^{-1} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_2 \partial \bar{I}_1} \left(\bar{I}_1 \mathbf{I} - \bar{\mathbf{C}} - \frac{2}{3} \bar{I}_2 \bar{\mathbf{C}}^{-1} \right) \otimes \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \bar{I}_1 \bar{\mathbf{C}}^{-1} \right) \\
& + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_2 \partial \bar{I}_2} \left(\bar{I}_1 \mathbf{I} - \bar{\mathbf{C}} - \frac{2}{3} \bar{I}_2 \bar{\mathbf{C}}^{-1} \right) \otimes \left(\bar{I}_1 \mathbf{I} - \bar{\mathbf{C}} - \frac{2}{3} \bar{I}_2 \bar{\mathbf{C}}^{-1} \right) \\
& + \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_1} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \bar{I}_1 \bar{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{C}}^{-1} - \mathbf{I} \otimes \bar{\mathbf{C}}^{-1} - \bar{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \mathbf{I} - \bar{I}_1 \frac{\partial(\bar{\mathbf{C}}^{-1})}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \right) + \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_2} \left(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} - \frac{2}{3} \bar{I}_1 \bar{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \mathbf{I} \right. \\
& \left. - \frac{2}{3} \bar{I}_1 \mathbf{I} \otimes \bar{\mathbf{C}}^{-1} + \frac{2}{3} \bar{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{C}} + \frac{2}{3} \bar{\mathbf{C}} \otimes \bar{\mathbf{C}}^{-1} + \frac{4}{9} \bar{I}_2 \bar{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{C}}^{-1} - \frac{2}{3} \bar{I}_2 \frac{\partial(\bar{\mathbf{C}}^{-1})}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \right) \Bigg\} : \dot{\bar{\mathbf{C}}} = \overset{(u)}{\mathbf{C}}_{ijkl} : \dot{\mathbf{C}}_{kl} \quad (28)
\end{aligned}$$

また、体積成分を取り除いた Truesdell の応力速度は updated Lagrange 法における接線剛性マトリックス $\overset{(u)}{\mathbf{C}}$ と変形速度テンソルの偏差成分 $\mathbf{D}'$ によってあらわされる。

$$\begin{aligned}
(\overset{\circ}{\mathbf{T}}')_{ij} &= \frac{4}{J} \left\{ \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_1 \partial \bar{I}_1} \left(\bar{B}_{ij} - \frac{1}{3} \bar{I}_1 I_{ij} \right) \left(\bar{B}_{kl} - \frac{1}{3} \bar{I}_1 I_{kl} \right) + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_1 \partial \bar{I}_2} \left(\bar{B}_{ij} - \frac{1}{3} \bar{I}_1 I_{ij} \right) \left(\bar{I}_1 \bar{B}_{kl} - (\bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{B}})_{kl} - \frac{2}{3} \bar{I}_2 I_{kl} \right) \right. \\
& + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_2 \partial \bar{I}_1} \left(\bar{I}_1 \bar{B}_{ij} - (\bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{B}})_{ij} - \frac{2}{3} \bar{I}_2 I_{ij} \right) \left(\bar{B}_{kl} - \frac{1}{3} \bar{I}_1 I_{kl} \right) \\
& + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_2 \partial \bar{I}_2} \left(\bar{I}_1 \bar{B}_{ij} - (\bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{B}})_{ij} - \frac{2}{3} \bar{I}_2 I_{ij} \right) \left(\bar{I}_1 \bar{B}_{kl} - (\bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{B}})_{kl} - \frac{2}{3} \bar{I}_2 I_{kl} \right) \\
& + \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_1} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \bar{I}_1 I_{ij} I_{kl} - \bar{B}_{ij} I_{kl} - I_{ij} \bar{B}_{kl} + \bar{I}_1 I_{ik} I_{lj} \right) + \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_2} \left(\bar{B}_{ij} \bar{B}_{kl} - \bar{B}_{ik} \bar{B}_{lj} + \frac{2}{3} (\bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{B}})_{ij} I_{kl} \right. \\
& \left. + \frac{2}{3} I_{ij} (\bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{B}})_{kl} - \frac{2}{3} \bar{I}_1 I_{ij} \bar{B}_{kl} - \frac{2}{3} \bar{I}_1 \bar{B}_{ij} I_{kl} + \frac{4}{9} \bar{I}_2 I_{ij} I_{kl} + \frac{2}{3} \bar{I}_2 I_{ik} I_{lj} \right) \Bigg\} D'_{kl} = \overset{(u)}{\mathbf{C}}_{ijkl} D'_{kl} \quad (29)
\end{aligned}$$

ここで、式の導出に $\bar{\mathbf{C}}$ は修正変形勾配テンソル $\bar{\mathbf{F}}$ および変形速度テンソルの偏差成分 $\mathbf{D}'$ によって $\dot{\bar{\mathbf{C}}} = 2\bar{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{D}' \cdot \bar{\mathbf{F}}^t$ となることを用いた。すると、中間配置における状態量で記述され、変形テンソルの逆行列を含まない Truesdell の応力速度が得られる。変形テンソル $\bar{\mathbf{B}}$ に関しては体積成分が除去され、変形速度 $\mathbf{D}$ に関しては偏差成分となつてい(る)。Updated Lagrange 流の定式化では、要素節点速度 $\dot{\psi}$ と要素平均応力速度 $\dot{T}_m$ を未知数とした以下の有限要素定式化を用いる⁽¹¹⁾。仮想仕事の原理における偏差成分と平均成分の分離に関しては渡部の研究に詳しい⁽¹⁵⁾。

$$\int \left[\left\{ \overset{(u)}{\mathbf{C}}_{ijkl} H'_{ij}{}^{(m)} H'_{kl}{}^{(n)} - 2T'_{ij} H'_{ij}{}^{(m)} H_m{}^{(n)} - 2T'_{ij} H_m{}^{(m)} H'_{ij}{}^{(n)} - 2T_m H'_{ij}{}^{(m)} H'_{ij}{}^{(n)} + 3T_m H_m{}^{(n)} H_m{}^{(m)} \right. \right. \\
\left. \left. + T_{ij} A_{ih}{}^{(n)} A_{jh}{}^{(m)} \right\} \overset{(e)}{\psi}_{(n)} + 3H_m{}^{(m)} \overset{(u)}{M}{}^{(r)} \overset{(e)}{\dot{T}}_m{}^{(r)} \right] dV_e = \int \rho \dot{g}_i \cdot \overset{(u)}{N}_i{}^{(m)} dV_e + \int \dot{t}_i \cdot \overset{(u)}{N}_i{}^{(m)} dS_e \quad (30)$$

$$\int \left[\left\{ 3H_m{}^{(n)} \overset{(u)}{M}{}^{(q)} \overset{(e)}{\psi}_{(n)} - \frac{1}{J\kappa_0} \overset{(u)}{M}{}^{(q)} \overset{(u)}{M}{}^{(r)} \overset{(e)}{\dot{T}}_m{}^{(r)} \right\} \right] dV_e = 0 \quad (31)$$

ここで、記号 (m) と (n) は要素内の速度節点数で、 (q) と (r) は圧力速度節点数で足し合わせる。有限要素の形状関数より求まる $\overset{(u)}{N}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{H}'$, $\mathbf{H}_m$ および $\overset{(u)}{M}$ には要素節点速度 $\dot{\psi}$ および要素節点平均応力速度 $\dot{T}_m$ と以下の関係がある。

$$v_i = \overset{(u)}{N}_i{}^{(m)} \cdot \overset{(e)}{\psi}_{(n)}, \quad (\nabla v)_{ij} = A_{ij}{}^{(m)} \cdot \overset{(e)}{\psi}_{(m)}, \quad D'_{ij} = H'_{ij}{}^{(m)} \cdot \overset{(e)}{\psi}_{(m)}, \quad D_m = H_m{}^{(m)} \cdot \overset{(e)}{\psi}_{(m)}, \quad \dot{T}_m = \overset{(u)}{M}{}^{(q)} \cdot \overset{(e)}{\dot{T}}_m{}^{(q)} \quad (32)$$

また、ペナルティ法に基づいた選択積分法 (Selective Integration Method, 以後は S. I. M. と略) も数値解析に用いる。ここで、F. I. は完全積分を、R. I. は低減積分を示す。

$$\begin{aligned}
& \int_{F.I.} \left[\left\{ \overset{(u)}{\mathbf{C}}_{ijkl} H'_{ij}{}^{(m)} H'_{kl}{}^{(n)} + T'_{ij} A_{ih}{}^{(m)} A_{jh}{}^{(n)} - 2T'_{ij} H'_{ij}{}^{(m)} H_m{}^{(n)} - 2T'_{ij} H_m{}^{(m)} H'_{ij}{}^{(n)} \right\} \overset{(e)}{\psi}_{(n)} \right] dV_e \\
& + \int_{R.I.} \left[\left\{ 9\kappa_0 J H_m{}^{(m)} H_m{}^{(n)} - 2T_m H'_{ij}{}^{(m)} H'_{ij}{}^{(n)} + 3T_m H_m{}^{(m)} H_m{}^{(n)} + T_m A_{ij}{}^{(m)} A_{ij}{}^{(n)} \right\} \overset{(e)}{\psi}_{(n)} \right] dV_e \\
& = \int \rho \dot{g}_i \cdot \overset{(u)}{N}_i{}^{(m)} dV_e + \int \dot{t}_i \cdot \overset{(u)}{N}_i{}^{(m)} dS_e \quad (33)
\end{aligned}$$

上式に含まれる平均応力 T_m と形状関数より求まる H_m は低減積分の積分点で評価する. total Lagrange 流の定式化では, 線形の圧縮性を補わずみエネルギーにより考慮した以下の有限要素定式化を用いた.

$$\int \left[\left(C_{ijkl}^{(t)} \left\{ B_{ij}^{l(m)} + 2B_{ij}^{nl(mo)} u_{(o)}^{(e)} \right\} \left\{ B_{kl}^{l(n)} + 2B_{kl}^{nl(np)} u_{(p)}^{(e)} \right\} + S_{ij} B_{ij}^{nl(mn)} \right) \Delta u_{(n)}^{(e)} + \frac{J}{2} (C^{-1})_{ij} \left\{ B_{ij}^{l(m)} + 2B_{ij}^{nl(mn)} u_{(n)}^{(e)} \right\} M^{(r)} \Delta p_{(r)}^{(e)} \right] dV_e$$

$$= \int (t_i + \Delta t_i) N_i^{(m)} dS_e + \int \rho_0 (g_i + \Delta g_i) \cdot N_i^{(m)} dV_e - \int \left[\frac{1}{2} S_{ij}^{(m)} \left\{ B_{ij}^{l(m)} + 2B_{ij}^{nl(mn)} u_{(n)}^{(e)} \right\} \right] dV_e \quad (34)$$

$$\int \left\{ \frac{J}{2} (C^{-1})_{ij} \left\{ B_{ij}^{l(m)} + 2B_{ij}^{nl(mn)} u_{(n)}^{(e)} \right\} \Delta u_{(m)}^{(e)} M^{(r)} - \left(\frac{1}{\kappa_0} M^{(q)} M^{(r)} \Delta p_{(q)}^{(e)} \right) \right\} dV_e$$

$$= - \int \left[\left\{ (J-1) - \frac{p}{\kappa_0} \right\} M^{(r)} \right] dV_e \quad (35)$$

ここで, N , M , B^l および B^{nl} には要素節点変位 $u^{(e)}$ および要素節点圧力 $p^{(e)}$ と以下の関係がある.

$$u_i = N_i^{(m)} \cdot u_{(m)}^{(e)}, \quad p = M^{(q)} \cdot p_{(q)}^{(e)}, \quad C_{ij} = (B_{ij}^{l(m)} + B_{ij}^{nl(mn)} u_{(n)}^{(e)}) \cdot u_{(m)}^{(e)} + \delta_{ij}, \quad (36)$$

3 解析手法の検証

前章での定式化を基にして, 一要素による理論解および多自由度の有限要素解析を行い, これらの手法の精度および安定性を数値解析的に検証する.

3.1 増分解析手法 updated Lagrange 法での増分解析には Newton-Raphson 法と前進 Euler 法を用いた. また, total Lagrange 法では Newton-Raphson 法を用いた. Newton-Raphson 法では等価節点外力を境界条件として, 不平衡量が十分に小さくなるまで収束計算する. 前進 Euler 法では, 計算が終了している n ステップの物質点を x_n とする. また, 現在未知の $n+1$ ステップの物質点を x_{n+1} とすると, $n+1$ ステップにおける変位ベクトル u_{n+1} を速度ベクトル v と仮想的な時間増分 Δt によって以下のように更新する.

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \cdot v \quad (37)$$

また, 変形勾配テンソル F_{n+1} は n ステップにおける速度ベクトル v を用いて次のように更新する.

$$F_{n+1} = F_n + \Delta t \cdot F_n \cdot \frac{\partial v}{\partial x_n} \quad (38)$$

Cauchy 応力 T は, Truesdell の応力速度 $\dot{T}_T$ から求まる Cauchy 応力速度 $\dot{T}$ によって更新する.

$$T_{n+1} = T_n + \Delta t \cdot \{ \dot{T}_T + L \cdot T_n + T_n \cdot L^t - (tr D) T_n \} \quad (39)$$

1 つの有限要素における節点の荷重増分は, 離散化した

式 (24) を有限要素領域で積分することで得られる.

$$f_{n+1}^{(e)} = f_n^{(e)} + \int \left\{ \dot{T}_T : H + \frac{1}{2} T : (\nabla v \cdot A^t) \right\} dV_e \quad (40)$$

3.2 検証に用いる数値モデル 偏差成分の弾性ポテンシャル関数として Mooney-Rivlin モデルを用いる.

$$\bar{W}(\bar{C}) = C_1 (\bar{I}_1 - 3.0) + C_2 (\bar{I}_2 - 3.0) \quad (41)$$

材料定数は以下のとおりとした.

$$C_1 = 1.0 \text{ MPa}, \quad C_2 = 0.5 \text{ MPa} \quad (42)$$

体積拘束に関しては非圧縮および線形の圧縮性を導入し, その際の体積弾性率 κ_0 は 1000 MPa とした.

3.3 一軸引張解析による理論解の検証 理論解が求まる非圧縮性 ($\kappa_0 = \infty$) の一軸引張変形を $20 \text{ mm} \times 20 \text{ mm}$ の 4 変位/1 圧力平面ひずみ要素で解析することで解析コードの検証を行った. この要素は中心に圧力節点を持ち, 非圧縮に近い問題に特有のロッキングと零エネルギーモードを回避する⁽¹⁶⁾. 体積に関する拘束条件は要素の中心の圧力節点でのみ評価される. ただし, 非圧縮問題では体積弾性率が無限大となるため, 選択積分法は適用できない. ここで, 水平変位 u_h をモデルの幅 $W(20 \text{ mm})$ で割ったものをせん断ひずみ e_h , 鉛直変位 u_v をモデルの高さ $H(20 \text{ mm})$ で割ったものを鉛直ひずみ e_v と定義する. 増分解析の手法としては Newton-Raphson 法と前進 Euler 法を用いた. Newton-Raphson 法では鉛直ひずみの増分 Δe_v を 50% とし, 各ステップごとに 2 回の収束計算を行った.

前進 Euler 法では引っ張りひずみの増分を 1.0% ($\Delta u_v = 0.2\text{mm}$) として解析を行った。以上の条件で一軸引張解析を行った結果を図 2 に示す。total Lagrange 法と updated Lagrange 法を用いて Newton-Raphson 法で収束計算した解析結果は理論解と完全に一致した。また、updated Lagrange 法と前進 Euler 法を用いた解析結果は 500% の引張変形で荷重、面積とも 1% 程度の誤差が生じた。前進 Euler 法の計算結果は Newton-Raphson 法と比較して、鉛直荷重は高くなる傾向を、面積については小さくなる傾向を示した。これは、前進 Euler 法によって微小な増分を逐次加えていくために、初期配置から見た体積一定の条件を完全に満たさないためである。

3.4 3 次元解析 幅 200mm、高さ 400mm、奥行き 200mm の有限要素モデルに対して一定のせん断変形を加えた後に圧縮変形を加える解析を行った。有限要素モデルの要素分割は $10 \times 20 \times 10$ とし、境界条件の対称性より 1/2 のモデルとしたため、奥行き方向は 5 分割となっている。解析に用いる要素は混合要素では 8 変位/1 圧力節点要素とし、選択積分法では偏差成分を $2 \times 2 \times 2$ の完全積分 (F. I.) とし、平均成分を中心 1 点の低減積分 (R. I.) とした。total Lagrange 法では Newton-Raphson 法を用いて、一回の計算に対して幅 200mm の 2% の増分を与えて、1 度の収束計算を行った。また、updated Lagrange 法では前進 Euler 法を用いることとして、一回の計算あたり 1% の増分を与えた。また、比較のため、同様の条件下で ABAQUS を用いて解析を行った。有限要素は CPE8H を用いて、圧縮性はユーザーサブルーチンによって導入した。

(1) 3 次元解析によるせん断変形

せん断変形および圧縮変形を加えて、解析手法の精度および安定性を評価する。また、汎用解析コードと比較することで数値解析結果の検証を行う。まず、数値モデルに対して下辺を拘束して、上辺に一定のせん断変形を与える解析を行った。水平変位と水平荷重および鉛直荷重の関係を図 3 に示す。ここで、水平変位 u_h を元のモデルの幅 $W(200\text{mm})$ で割ったものをせん断ひずみ e_h 、鉛直変位 u_v をモデルの高さ $H(400\text{mm})$ で割ったものを鉛直ひずみ e_v と定義する。updated Lagrange 法を用いた荷重と変位の関係は total Lagrange 法と ABAQUS で計算した結果と良く一致している。

また、せん断ひずみ e_h が 50%、100%、150% および 200% での静水圧の分布図と変形図を図 4 に示す。ここで、静水圧は要素内で一定となるため個々の構成節点に割り振って、濃淡は最小 0MPa、最大 2MPa として 12 段階で

(a) Tensile deformation of one element

(b) Relation between vertical load and displacement

(c) Relation between area and vertical displacement

Fig. 2: Relationships above vertical load, area of one element and vertical displacement in plane strain and incompressible conditions ($C_1 = 1.0$, $C_2 = 0.5[\text{MPa}]$, $\kappa_0 = \infty$)

Fig. 3: Relationships between vertical load and vertical strain of 3-dimensional analysis($\kappa_0 = 1000\text{MPa}$)

(a) Updated Lagrangian mixed formulation

(b) Updated Lagrangian formulation and selective integration method(S. I. M.)

(c) Total Lagrangian formulation

0MPa 2MPa

(d) ABAQUS

Fig. 4: FEM mesh and mean stress contours of 3-dimensional shear deformation($\kappa_0 = 1000\text{MPa}$) ,

Fig. 5: Relationships between vertical load and vertical strain of 3-dimensional analysis($\kappa_0 = 1000\text{MPa}$)

引張り側を濃くあらわしている。また、ABAQUSで計算した結果については変形図のみを示している。updated Lagrange 法による圧力分布図は total Lagrange 法による結果と良く一致している。また、変形図も同様に解析結果によってほとんど差が生じていない。以上のことから、ここで開発した updated Lagrange 法を用いた解析コードが変形および応力を正確に計算していることを確認した。

(2) 3次元解析によるせん断+圧縮変形

次に、3次元モデルに対して $400\text{mm}(e_v = 200\%)$ のせん断変形を受けた状態から鉛直方向に圧縮変形を加えた解析を行うことで、解析手法の安定性に関する検討を行った。図5に鉛直変位と鉛直荷重の関係を示す。鉛直変位を加えるにつれて、せん断ひずみ 200% の状態では引張り方向に生じていた荷重が徐々に減少し、鉛直変位 $100\text{mm}(e_v = 25\%)$ 程度で圧縮側に変わることがわかる。また、updated Lagrange 法の計算結果は total Lagrange 法および汎用解析コードと良く一致している。また、鉛直変位 $200\text{mm}(e_v = 50\%)$ 程度で汎用解析コードは収束条件を満たさなくなり終了した。鉛直変位 $200\text{mm}(e_v = 50\%)$ を超えると updated Lagrange 法で解析した鉛直荷重は total Lagrange 法による荷重と比較して小さくなり、total Lagrange 法を用いた解析は鉛直変位 270mm 程度で終了した。updated Lagrange 法を用いた解析はその後にも解析が可能であったが、体積拘束に関しては条件を満たさない要素が端部に生じた。

次に、圧縮解析の圧力分布図を図6に示す。圧力分布は 1MPa から -1MPa までを12段階の濃淡で表し、圧縮側を濃く表示している。変形図から updated Lagrange

法を用いた解析結果は total Lagrange 法を用いた解析結果と良く一致している。また, total Lagrange 法の解析が終了した後の updated Lagrange 法を用いた解析結果から, 拘束されていない境界が滑らかに変形していることや, 境界に対して垂直な要素のラインが変形後も保たれていることなどが確認できる。

4 結論

変形後の配置を参照する updated Lagrange 法を用いて, 有限変形理論における速度形の弾塑性構成式と参照配置が一致する速度形の応力および有限要素方程式を示した。得られた応力速度と有限要素方程式は, 弾塑性構成式を用いた有限要素方程式と応力やひずみなどの状態量を容易に共有することができる。さらに, 実際の増分解析の過程では剛性マトリクスを入れ替えるだけで両構成式を扱うことができる。

次に, 提案した updated Lagrange 法を用いた有限要素方程式を基に, 混合法および選択積分法を用いた解析コードを開発し, 各種数値解析の結果を total Lagrange 法を用いた解析コードおよび汎用コードによる結果と比較した。その結果, 提案する手法は増分量を逐次足しあわせるため, わずかな誤差が理論解および他の手法と比較して生じるため, くり返し変形を受けるような解析には注意が必要であるが, 大変形領域において安定した解析結果を得ることができた。

(a) Updated Lagrangian mixed formulation

(b) Updated Lagrangian formulation and selective integration method

(c) Total Lagrangian mixed method

Fig. 6: Mean stress contour of 3-dimensional compressed deformation under 200% shear strain

最後に, updated Lagrange 法と total Lagrange 法は参照配置が異なるだけで本質的に一致する。両手法は解析の対象とする現象に応じて使い分けるべきで, 変形後の状態が重要な問題には本研究で導いた手法が有用であると考えられる。

謝辞

東京大学 菊地 文雄教授にはポテンシャルエネルギー停留定理についてご指導いただいた。東京大学 渡邊 浩志講師には非線形 FEM の収束解析手法についてご指導いただいた。(株)DASH の梅澤 享平氏にはプログラミングなどご助力いただいた。ここに謝意を表する。

参考文献

- [1] J. E. Marsden and T. J. R. Hughes: Mathematical foundations of elasticity, Dover, 1994.
- [2] K. J. Bathe: Finite element procedures, Prentice-Hall, 1996.
- [3] 久田俊明, 野口裕久: 非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善, 1995.
- [4] T. Sussman and K. J. Bathe: A finite element formulation for nonlinear incompressible elastic and inelastic analysis, Computers & Structures, No. Vol. 26 No. 1/2, pp. 357-409, 1987.
- [5] T. Yamada: Finite element method for incompressible hyperelasticity, 東京大学学位論文, 1990.
- [6] 渡辺浩志, 久田俊明: 超弾性体の混合型有限要素解析に関する基礎的検討, 日本機械学会論文集 (A 編), 62 巻 595 号, pp. 745-752, 1996-3.
- [7] J. C. Simo and T. J. R. Hughes: Computational Inelasticity, Springer, 1997.
- [8] M. Kaliske: A formulation of elasticity and viscoelasticity for fibre reinforced material at small and finite strains, Computer methods in applied mechanics and engineering, pp. 225-243, 2000.
- [9] J. C. Simo and R.L. Taylor: Penalty function formulations for incompressible nonlinear elastostatics, Computer methods in applied mechanics and engineering, No. 35, pp. 107-118, 1981.
- [10] 松田泰治, 塩尻弘雄: 有限要素法による免震用積層ゴムの大ひずみ解析法の開発, 電力中央研究所研究報告, No. U92061, 1993.3.
- [11] 松田昭博ほか: 大変形有限要素法を用いた免震要素積層ゴム特性試験のシミュレーション, 機械学会論文集 (A 編), 65 巻 635 号, pp. 1451-1458, 1999-7.
- [12] ABAQUS Theory manual Version 5.8, Hibbit, Karlsson & Sorensen, 1997.
- [13] P. J. Flory: Thermodynamic relations for high elastic materials, Transactions of the faraday society, No. 57, pp. 829-838, 1961.
- [14] C. Truesdell and W. Noll: The nonlinear field theories of mechanics, Springer, 1965.
- [15] 渡部修: 超弾性構成式と混合型変分原理における体積拘束, 日本機械学会論文集 (A 編), 58 巻 545 号, pp. 84-92, 1992-2.
- [16] T. J. R. Hughes: The Finite Element Method, Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis, Dover, 2000.