境界要素法による複数の欠陥の同定*

中西 康彦^{*1}, 松原 雅昭^{*1}

Identification of Plural Defects Using the Boundary Element Method

Yasuhiko NAKANISHI^{*2} and Masaaki MATSUBARA^{*2} Department of Mechanical System Engineering, Gunma University,
1-5-1 Tenjin-cho, Kiryu-shi, Gunma, 376-8515 Japan

In this paper, location, angle and size of plural defects in a structural component are identified by an elastodynamic boundary element method. Each defect is noncircular and represented by 5 parameters; a radius, an angle, x and y coordinates of the location and the degree of distortion of its shape. External force of harmonic excitation is applied to the component and the displacements at points on its boundary are chosen as additional information. The square sum of the differences in displacements between real values and inference from numerical solutions is minimized to identify the defects using the conjugate gradient method. Though the number of defects is assumed to be one in the beginning of the identification process, the assumed defect is divided into two parts when the value of the parameter representing its distortion satisfies a certain condition. To judge correctly whether it should be divided, it is assumed that defects are filled with imaginary material of which mass density and Young's modulus are considerably low in comparison with those of a structural component.

Key Words: Inverse Problem, Defect Identification, Boundary Element Method, Elastodynamics, Computational Mechanics, Structural Analysis, Numerical Analysis

1. 緒 言

構造物の内部に存在するき裂等の欠陥を同定するためにこれまで様々な解析手法が提案されてきた。例えばアコースティック・エミッション法や超音波探傷法をはじめ⁽¹⁾, 直流電気ポテンシャル法を応用した大路らの電気ポテンシャル CT 法⁽²⁾や静弾性特性を利用した陳ら⁽³⁾あるいは李ら⁽⁴⁾の手法等が挙げられるが, 本報では動弾性特性を用いた田中らの手法⁽⁵⁾⁽⁷⁾に注目する。田中らの手法は境界要素法を用いた定常動弾性順問題解析ソフトウェアと最適化手法(共役こう配法)により欠陥を同定する, 簡便でありながら汎用性の高い優れた手法である。しかし, 欠陥の同定問題に限らず境界要素法を用いる手法では, 対象とする領域の境界線のみを要素分割する境界要素法の性質上, 一般に同定や最適化等の過程において境界線のトポロジーを変更できない場合が多い。例えば欠陥の同定問題において, 予め仮定した欠陥の個数を同定の過程で増減できない場合がこれに該当する。

そこで本報では欠陥の推定個数を同定の過程で変えられるアルゴリズムを提案する。複数の欠陥が含まれ

る 2 次元の平板を対象として定常状態になるまで調和加振力を加え, 平板の端における変位を計測することで欠陥の位置や大きさ等を同定する。初期推定として欠陥が 1 個のみ存在する状態を仮定し, その後同定の過程で必要と判断されれば欠陥の推定個数を増加させる。1 個の欠陥の穴を, 穴のいびつさを表すパラメーターや穴の半径等, 5 つのパラメーターで表す。穴のいびつさを表すパラメーターがある条件を満たすとき, 欠陥が複数存在すると判定して一つの穴を二つに分割する方法を採用する。数値計算例では 2 個あるいは 3 個の欠陥を様々な位置に配置して同定を行い, 本手法の妥当性を検証する。

2. 問題の設定

本報では図 1 に示すような 2 次元の平板を対象とする。平板は x 軸の方向に無限に長く, y 軸の方向は幅 0.1 m とし, 支持点は図中に示すように平板の下端における 2 点とする。平板の材質は鉄鋼を想定してヤング率を 202 GPa, ポアソン比を 0.3, 質量密度を 7830 kg/m³ に設定し, 平面応力問題として取り扱う。平板の内部には同図に例示するような空洞の欠陥が数個あり, 空洞の表面に外力は作用していないと仮定する。平板が定常状態に至るまで図中の点 P_1 ($x = -0.106$ m) に調和加振力を与え, 定常状態を維持しながら平板の

* 原稿受付 2002 年 1 月 7 日。

^{*1} 正員, 群馬大学工学部(☎ 376-8515 桐生市天神町 1-5-1)。

E-mail: nakanisi@me.gunma-u.ac.jp

Fig. 1 Example of a defective board

上下端において幅 0.25 m に渡り(図中の斜線部分), 変位を計測する。同様に点 P_2 ($x=0.0025$ m) および点 P_3 ($x=0.106$ m) に対しても個別に調和加振力を与え, 平板の上下端の変位を測定する。これら 3 ケースのデータを全て統合して主に欠陥の位置や大きさ等を同定する。田中らはこのように複数の点で個別に加振する方法をマルチ加振法と呼んでいる⁽⁶⁾。

平板の上下端だけではなく, 欠陥の近くを四方から囲むように加振および変位の計測をすれば正しい同定の結果が得られる確率は高くなると思われるが, 実際の検査では加振点や測定点として任意の位置を選択できない場合があるので上記のような設定にした。

3. 欠陥を表すパラメーター

本報では欠陥の形状を図 2 に示すように個々の欠陥に付随した局所座標で表す。欠陥は局所座標の軸 U および V に対して上下左右対称の形状と仮定して, 欠陥の半径 R を図中の角度 θ の関数として次式で与える。

$$R = a\theta^3 - 0.75\pi a\theta^2 + b \quad (0 < \theta < \pi/2) \quad (1)$$

上式は R の θ に関する 3 次多項式であり, 各項の係数は θ が 0 および $\pi/2$ rad のときに $dR/d\theta = 0$ になる, すなわち欠陥の境界線が滑らかな閉じた曲線になるように決められている。式(1)のパラメーター a は欠陥の形状が円と比較してどの程度 いびつかを表す。 a が 0 のとき欠陥は半径 $R=b$ の円であるが, 図 2 に示すように b に比べて a の絶対値が大きくなる程欠陥の形状にくびれが生じていびつになる。式(1)の a および b の他に欠陥の中心(局所座標の原点)の全体座標における座標値 x および y , 局所座標の傾き ϕ を 1 個の欠陥を表すパラメーターとして用いる。これら 5 つのパラメーター(a, b, x, y, ϕ)では表現できる欠陥の形状に限界があるが, 本報は欠陥の配置のトポロジーを求めることを目的としており, 本手法はこの目的を十分満たすと考えられる。

4. 境界要素法による動弾性解析

本報では C. A. Brebbia の文献⁽⁶⁾を参考に作成した境界要素法による定常動弾性順解析用プログラムを用いる。同文献によれば 2 次元一定要素の場合, 節点 K に

Fig. 2 Effect of parameter a on the shape of a defect

おける動弾性問題の定常解は次式で求められる。

$$[C]_K \{u\}_K + \sum_L [H]_{KL} \{u\}_L = \sum_L [G]_{KL} \{t\}_L \quad (2)$$

ここでベクトル $\{u\}_K$ および $\{u\}_L$ は節点 K および L における変位を, $\{t\}_L$ は節点 L における表面力を表す。ただし, これらのベクトルはラプラス変換されている。行列 $[C]_K$ の (ij) 成分 C_{ij} は境界形状が滑らかならば $C_{ij} = \delta_{ij}/2$ である。ただし δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。一般に上式の $[C]_K$ 以外の成分は複素数である。また行列 $[H]_{KL}$ の成分 H_{ij} および $[G]_{KL}$ の成分 G_{ij} は次式で与えられる。

$$H_{ij} = \int_{\Gamma} T_{ij} d\Gamma, \quad G_{ij} = \int_{\Gamma} U_{ij} d\Gamma \quad (3)$$

U_{ij} と T_{ij} は要素 L を表す線分 Γ に沿って積分される。ここで

$$U_{ij} = \frac{1}{\alpha \pi \rho C s^2} (\varphi \delta_{ij} - \chi r_{,i} r_{,j}),$$

$$T_{ij} = \frac{1}{\alpha \pi} \left[\left(\frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{r} \chi \right) (\delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,i} n_{,j}) - \frac{2}{r} \chi (n_{,i} r_{,j} - 2 r_{,i} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n}) \right. \\ \left. - 2 \frac{d\chi}{dr} r_{,i} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} + \{ (Cp/Cs)^2 - 2 \} \left(\frac{d\varphi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - \frac{\alpha}{2r} \chi \right) r_{,i} n_{,j} \right]$$

である。ただし,

$$\varphi = K_0(i\omega r/Cs) + \frac{Cs}{i\omega r} \{ K_1(i\omega r/Cs) - \frac{Cs}{Cp} K_1(i\omega r/Cp) \},$$

$$\chi = K_2(i\omega r/Cs) - (Cs/Cp)^2 K_2(i\omega r/Cp),$$

$$Cs = \sqrt{G/\rho}, \quad Cp = \sqrt{(\lambda + 2G)/\rho},$$

r は要素 L 上の点と節点 K の間の距離, $r_{,i}$ および $r_{,j}$ は x および y による r の偏微分, n は要素 L に垂直な単位法線ベクトル, K_0, K_1 および K_2 は 0 次, 1 次および 2 次の第二種変形ベッセル関数, 下付の添え字以外の i は $\sqrt{-1}$, ω は調和加振力の角振動数, G は横弾性係数, ρ は質量密度, λ はラメ定数を表す。2 次元ならば定数 α は 2 であり, 行列 $[C]_K$, $[H]_{KL}$ および $[G]_{KL}$ のサイズは 2×2 である。全節点について式(2)を作成し, 連立一次方程式として解けば, ラプラス変換された変位ベクトルが求まる。

5. 欠陥同定のアルゴリズム

本報では次式に示すように欠陥を有する平板にマルチ加振法⁽⁶⁾により調和加振力を与えて実測した変位と,

推定の欠陥に対して境界要素法で算出した変位との差の二乗和を目的関数 F とする.

$$F = \sum_j \sum_m [(u_{AR} - u_R)^2 + (u_{AI} - u_I)^2 + (v_{AR} - v_R)^2 + (v_{AI} - v_I)^2]_j \quad (4)$$

ここで u および v は x および y 方向の変位を, 下付の添え字の内, A はその変位が計測されたデータ(基本データ)であることを, R および I は複素数(変位)の実部および虚部であることを, j は加振点の番号 P_j ($j=1, 2, 3$) を, m は変位の測定点に割り振られた番号を, 各々表す. F を共役こう配法により最小化する. あるパラメータ p に対する F の感度は次式で近似する.

$$\frac{\partial F(p)}{\partial p} = \frac{F(p+\Delta p) - F(p-\Delta p)}{2\Delta p} \quad (5)$$

ここで Δp は p に対して絶対値が十分に小さい微小量である. 前章の初めから上式に至るまでの内容は田中らの提案した手法⁽⁵⁾⁽⁷⁾とほぼ同じである. この手法は簡単な手順で欠陥を同定できる優れた手法といえるが, 本報では上述の手法を以下のように変更して新たなアルゴリズムを追加する.

本報では第3章で述べたように1個の欠陥を5つのパラメータで表す. しかし複数の欠陥が存在する場合, 一度に全てのパラメータを変数として同定しようとすると共役こう配法における収束が極めて遅くなる. もしくは同定の過程で早期に局所解に陥る等の問題が生ずることが多い. そこで本報ではこのような欠点を解決するため, 下記アルゴリズムを提案する. 以下, パラメータに付けた添え字は各欠陥に割り振られた番号を表す.

(1) 測定した変位のデータを入力する. (2) 欠陥の個数 k を1個と仮定し, 欠陥の全パラメータに適切な初期値を与える. ただし a_1 は0とする. (3) a_i ($i=1, \dots, k$) および ϕ_i の値を固定したまま b_i , x_i および y_i を変数として共役こう配法を用いて目的関数 F を最小化する. (4) b_i に定数 C_1 を掛け, a_i をその b_i の C_2 倍にする. (5) a_i , x_i および y_i を固定したまま F を最小にする b_i と ϕ_i の値を求める. ただし, b_i と ϕ_i は同時に変化させずに共役こう配法の繰り返し計算において一回おきに交互に変化させる. (6) b_i を C_3 倍に拡大する. (7) x_i と y_i を固定したまま a_i , b_i および ϕ_i を変数として目的関数 F を最小化する. ただし F の最小化の過程で a_i が以下の条件式(6)を満たすとき, 1個の推定の欠陥を2個に分割して, 上記の手順(3)に戻る.

$$\left. \begin{aligned} a_i &\geq (16/\pi^3 - C_4)b_i & (a_i \geq 0) \\ a_i &\leq (-16/\pi^3 - C_5)b_i & (a_i < 0) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(8) 全パラメータを共役こう配法により一度に変化させて目的関数 F を最小化し, 終了する.

Fig. 3 Boundary lines divided into elements

ただし, C_1 および C_3 は1以上, C_2 および C_4 は $16/\pi^3 \approx 0.516$ 以下, C_5 は0以上の定数である. このアルゴリズムは, (A)欠陥の大きさと位置, (B)欠陥を分割する方向, (C)分割の判定, (D)全パラメータを用いた目的関数 F の最小化, の順序で進められており, フローチャートを後述の図4中の右に示す. 手順(4)で a_i に正の実数を与えて欠陥の形状をやや潰れた形にするが, これは手順(5)で ϕ_i の値を決めやすくするためである. また b_i を変えずに a_i のみを大きくすると欠陥のサイズが小さくなってしまうので, b_i にも適切な値の C_1 を掛けてこれを補う. 手順(5)では b_i と ϕ_i を交互に変化させるが, これは ϕ_i の感度が b_i のそれに比べて無視できる程小さく, 適切な ϕ_i の値が得られないまま収束する場合が多いので, これを防止するための手段である. また, 手順(7)で目的関数 F を最小にする a_i の値を求める際, 手順(5)で求められた b_i をそのまま使うと殆どの場合, 実際の欠陥が複数存在しても式(6)が満たされることはない. これは手順(5)の終了時に局所解に陥り, a_i を新たに変数として与えてもその局所解から抜け出せないためと思われる. よって手順(6)で b_i に C_3 を掛けてこれを防ぐ.

6. 数値計算例

本章では前章で提案したアルゴリズムを用いて平板の中の欠陥を同定する. 欠陥は2個あるいは3個存在し, 欠陥の間隔は広くても平板の縦幅以下とする. 平板には角振動数 $\omega = 10^5$ rad/sec の調和加振力が定常状態を維持しながら加えられているとする. 図1の点 P_1 , P_2 および P_3 に各々個別に加振するマルチ加振法⁽⁶⁾を採用する. 変位の測定値は本来, 実験で実測した値を用いるべきであるが, 本章は新たに提案したアルゴリズムの妥当性を評価することが目的なので, 実際の欠陥に対して第4章の方法により順解析を行い, その計算結果を測定値として代用することとする. 境界要素法では2次元一定要素を用い, 図3に示すように平板の一边を36個, 各欠陥の境界を24個の要素に分割する. 変位の測定点は平板の上下端に各々幅0.25 mに渡り(図1の斜線部分), 一要素おきに合計32ヶ所設ける. なお, 第5章のアルゴリズムにおける定数は $C_1=1.16$, $C_2=0.06$, $C_3=3$, $C_4=0.03$ および $C_5=51.1$ とする.

Fig. 4 The change of defects in the process of identification (the left) and a flowchart to identify plural defects (the right)

図4中の左側に実際の欠陥が2個存在する場合における同定の過程を示す。図中の太い線は実際の欠陥を、細い線は共役こう配法による推定の過程にある欠陥を表す。また欠陥の傍の数字は共役こう配法における計算の繰り返し回数である。実際の欠陥はパラメータで表すと $a_1=a_2=0.001$ m, $b_1=b_2=0.01$ m, $\phi_1=\phi_2=0$ rad, $x_1=y_2=0.015$ m, $x_2=y_1=-0.015$ m に設定した。以下の例題では全て $a_i=0.001$ m, $\phi_i=0$ rad とする。なお同図中の右側に前章で提案のアルゴリズムをフローチャートで表し、左図との関係を示す。フローチャートに付随した()内の番号は前章の手順の番号を表す。

図4の左上段は第5章のアルゴリズムの手順を(1)から(3)まで終えたところを示す。この時点では推定の欠陥が1個に仮定されているので、2個の実際の欠陥の間でやや大きな円として表されている。図4の左中段に手順(7)における欠陥の分割の過程を示す。欠陥の半径 b は小さくなっていくが、 b に対する a の比率が大きくなるので次第に欠陥がいびつに変形し、最後にくびれて分割されていることがわかる。ただし、手順(7)では推定の欠陥の内部にヤング率 20.2G Pa, 質量密度 783 kg/m³(平板の 1/10 の剛性および質量密度)の物質が

Fig. 5 Iteration history of the objective function F

存在すると仮定している。この仮想の材料の効果については次章で考察する。図4の左下段は分割後に手順(3)に戻り、終了に至るまでの過程である。ただし、1個の欠陥を分割した後は、新たな2個の欠陥が同じ方向に移動する等の理由により重なり合う場合があるので、これを防ぐために両欠陥が分割後しばらくの間反対方向に進むように欠陥の中心座標に対する通常の感度と互いに逆向きの仮想の感度を加えてある。分割直後の仮想の感度は通常の感度の20倍の大きさとし、その後は繰り返し回数に比例して減少させ、分割後20回目で0になるよう設定してある。図4の左図では繰

Fig. 6 Identification of two defects arranged vertically

($b_1=b_2=0.01$ m, $x_1=x_2=0$ m, $y_1=0.015$ m, $y_2=-0.015$ m)

Fig. 7 Identification of two defects arranged horizontally

($b_1=b_2=0.01$ m, $x_1=0.015$ m, $x_2=-0.015$ m, $y_1=y_2=0$ m)

り返し回数 180 回目で大まかな同定ができており、592 回目に得られた最終的な推定の欠陥は実際のそれとほぼ一致している (よって、図 4 の左下段では太い線と 592 回目の細かい線が重なり合っただけで区別できない)。図 5 は目的関数 F の履歴である。図中の () 内の番号は前章のアルゴリズムにおける手順の番号であり、その下に変数として扱われたパラメータを記してある。手順が移り変わるとき (図 5 における縦の破線)、目的関数 F の値が不連続に上昇する。これは各手順において各パラメータの値を $C_1 \sim C_5$ により変更したことが原因であるが、目的関数 F の値は全体として順調に減少しており、欠陥同定には支障がないといえる。図 5 からわかるように 279 回目で推定の欠陥は既に 2 個に分かれて収束しており、この時点で同定を終了する方法も考え得るが、本報では 2 度目の分裂が起こらないことを確認し、さらに精度を向上するために 592 回まで計算を続けた。

図 6 および図 7 に実際の欠陥が縦および横に 2 個並んだ場合の結果を示す。実際の欠陥が横に並んだ図 7

Fig. 8 Identification of three equal defects

($b_1=b_2=b_3=0.01$ m, $x_1=x_3=y_1=y_2=0.015$ m, $x_2=y_3=-0.015$ m)

Fig. 9 Identification of three defects (One of them is big.)

($b_1=0.015$ m, $b_2=b_3=0.01$ m, $x_1=0.035$ m, $x_2=y_3=-0.015$ m, $x_3=y_2=0.015$ m, $y_1=0.01$ m)

では実際と推定の欠陥がほぼ完全に一致しているのに対して、縦に並んだ図 6 ではやや誤差が見られる。これは加振点と測定点が平板の上下から挟むように縦に配置されているため、欠陥も縦に並んでいる場合は欠陥の間の形状の影響が変位の測定値に反映され難いためと考えられる。図 8 および図 9 には実際の欠陥が 3 個の場合の結果を示す。これらの図では推定の欠陥の分割が 2 度行われている。1 回目の分割の段階を見ると図 8 では上部の 2 個の欠陥が、図 9 では小さい 2 つの欠陥が 1 個の欠陥とみなされていることがわかる。いずれの場合も最終的には推定と実際の欠陥は大体一致するが、欠陥の個数が 2 個の図 4 および図 7 に比べるとやや精度が落ちる。

7. 欠陥内部における仮想の材料

第 5 章で提案のアルゴリズムの中では手順 (7) における分裂の判定が欠陥同定の成否を左右する重要な部分である。しかし前章の例題において欠陥の内部を空洞として扱う通常の方法では、推定の欠陥が実際の欠陥の位置と違う方向へ分裂したり、推定と実際の欠陥の

Fig. 10 Position of two real defects to test the effect of imaginary material

個数が合わない等の問題が頻発した。そこで前章で述べたように欠陥の内部に仮想の材料を仮定すると正しい同定が行われる確率が向上することが分った。これは仮想の材料を想定することで欠陥の内部に伝わった弾性波がパラメータ a の感度に対する的確な評価に役立ったこと、すなわち分裂に伴うトポロジーの変化による変位の測定値の不連続な変化が幾分緩和されたことが要因ではないかと推察するが、不明な点が多く、研究の余地がある。

本章では図10に示す例題で仮想の材料の効果を検証する。実際の欠陥を2個想定し、各欠陥の中心の x 座標値 R を様々に変えて同定を行う。初期推定値として $a=0$ m, $b=0.01$ m, $\phi=0$ radおよび $x=y=0$ mを与える。その他の問題設定は前章と同じである。表1にその結果を示す。同表の左欄は設定した x 座標値 R を、中央の欄は欠陥の内部を空洞とした通常の方法、右欄は仮想の材料を想定する本手法を用いて推定された欠陥の個数である。欠陥の内部が空洞の場合は6題中1題のみ、仮想の材料を想定する場合は5題において、欠陥の個数が2個と正しく推定され、分割後の同定も適切に行われた。ただし $R=0$ mの場合は、双方共に正しく同定できなかった。これは2個の実際の欠陥の位置が判別困難な程近過ぎたためと考えられる。

8. 結 言

本報では平板の中に存在する複数の欠陥を境界要素法と共役こう配法を用いて同定する手法を提案し、数値計算例でその妥当性を確認した。本手法は、定常動弾性順解析ソフトウェアと最適化手法を組み合わせる田中らの手法⁽⁵⁾⁽⁷⁾を基に、複数の欠陥が存在する場合にも対応できるように同定の過程で欠陥の推定個数を増加可能なアルゴリズムを追加した手法である。よって境界要素法を用いているにも関わらず同定の過程で境界線のトポロジーを変えることが可能である。欠陥の形状のいびつさを表すパラメータがある条件を満たすとき、推定の欠陥は2つに分割される。数値計算例では実際の欠陥の個数が2個と3個の場合について同

Table 1 The effect of imaginary material

on the number of identified defects

R ($\times 10^{-3}$ m)	The number of identified holes	
	Cavities	Imaginary material
2.5	3	2
5.0	3	2
7.5	2	2
10.0	5	1
12.5	3	2
15.0	3	2

定を行い、以下の所見を得た。(1)同定の過程で欠陥を分割する際は推定の欠陥の内部に仮想の物質(剛性および質量密度が平板の1/10)を想定すると、欠陥を空洞として扱う場合に比べて分割の判定が正しく行われる確率が高くなる。(2)複数の欠陥を正しく同定するためには、欠陥を表す5つのパラメータを一度に変化させずに欠陥の位置と大きさ、角度、トポロジー、の順に同定するアルゴリズムが有効である。(3)欠陥の角度を決める手順や欠陥を分割する手順を始める直前に推定の欠陥の半径を一旦大きくすると局所解に陥りにくく、正しい角度や分割の判定を得やすくなる。(4)複数の欠陥の配置によっては同定の精度が悪くなる。例えば加振点と測定点を結ぶ方向に実際の欠陥が並ぶ場合がこれに該当する。(5)実際の欠陥の個数が多い程同定の精度が悪くなる傾向にある。

より多数の欠陥やき裂などの欠陥も同定できるように本手法を改良すること、要素や欠陥の大きさの影響および測定点および加振点の個数等の影響を吟味すること、測定誤差に起因する不適切性に対する評価等が今後の課題として残される。

参 考 文 献

- (1) 例えば、丹羽、超音波計測、(1986)、昭晃堂。
- (2) 例えば、大路、久保、阪上、機論、51-467, A(1985), 1818-1827。
- (3) 陳、西谷、機論、57-534, A(1991), 274-280。
- (4) 李、古口、矢田、機論、56-531, A(1990), 2347-2352。
- (5) 田中、山際、機論、54-501, A(1988), 1054-1060。
- (6) 田中、中村、中野、機論、56-528, A(1990), 1900-1905。
- (7) 田中、中村、中野、石川、機論、57-541, A(1991), 2179-2185。
- (8) C. A. Brebbia 著、田中 監訳、境界要素法の応用・1, (1983)、企画センター。