板鍛造における割れ発生の予測*

守 時 一^{*1}, 神 谷 修^{*2}

Prediction of Fracture in Plate Forging

Hitoshi MORITOKI^{*3} and Osamu KAMIYA^{*3} 3-4-15 Higashi, Ohgata, Minami-Akita, Akita, 010-0442 Japan

Ductile fracture in plate forging is analyzed. For the prediction of the fracture the criterion based on load instability is employed. The concept of load instability corresponds to the loss of load control which arises when the load deforming a material is imposed over the strength of the material and is brought as the stationary state of largest nominal stress component, $\dot{s}_1=0$. This gives basic condition of load instability. When the basic condition is satisfied, in order to realize the occurrence of cracking the co-existence of plastic loading and unloading must be required, which gives the annexed condition of load instability represented as $\bar{z}_L \leq 0$. Hence, the criterion is composed of basic and annexed conditions. Stress and strain in a specimen are evaluated using FEM. The index $\bar{z}_L$ is examined at $\dot{s}_1=0$, and is obtained at a number of working conditions designating tool radius and friction coefficient between tools and a plate. These working conditions are divided into two regions according to the sign of $\bar{z}_L$. When $\bar{z}_L$ is negative at a working condition the fracture is predicted in such working. It is found that load instability predicts cracking possibility lower than plastic instability.

Key Words: Forging, Ductile Fracture, Load Instability, Plastic Instability, Multiplicity of Solution

1. 緒 言

金属薄板は通常プレス成形に供されるが、ばね性を付与することを目的に円柱工具の円弧側面で板厚方向に鍛造加工の施されることがある。このとき、ばね性を向上させるために素材の多くはすでに加工硬化した状態にあり、板厚方向への鍛造加工が素材の延性をさらに減少させ、素材に割れ発生の危険性を誘引する。

延性破壊の塑性力学的考察は塑性力学の黎明期から多くの関心を集め、とくに板のくびれ問題を中心に発展してきた経緯がある。これらの多くは平面応力場で考察され、そこでは拡散くびれ⁽¹⁾あるいは局所くびれ^{(2) (3)}が論じられてきた。しかしながら、拡散くびれでは解析の前提条件とこれらの現象との間に根本的な相違が見られ⁽⁴⁾、また局所くびれに関しても塑性不安定としての資質に疑問が生じた⁽⁵⁾。他方、平面ひずみ条件下にある引張り変形についてせん断帯の発生が論じられた⁽⁶⁾。しかし、この変形を現実を実現させることは物理的に可能ではなく、得られた結果を実験的に検証することができなかった。これに加えて、そこで前提としている速度不連続場の存在そのものも厳密な考察の下では否定される結果となった⁽⁷⁾。その後、一般化変数を用いた塑性論が Hill により論じられ、多価性が固有状態として議論された⁽⁸⁾。この固有状態は後に筆者の一人が

提唱した一般化された塑性不安定⁽⁹⁾に相当しているが、これらは互いに異なった概念に立脚している。平面応力場においてはこれらは拡散くびれの発生限界と全く一致する結果を与えた。

このような流れの中、筆者の一人は円柱の据込み加工における表面延性予測に負荷不安定の概念が有効であることを示した⁽¹⁰⁾。円柱素材の端面に摩擦が作用するときには多くの場合表面き裂が発生し、その時期を負荷不安定規準で予測することができた。しかし、き裂発生が必然的でない加工においてき裂発生の有無を予測するには、負荷不安定規準における基本条件下で附随条件の成立が求められる。これらにより塑性変形下における多くのき裂発生の予測が可能となることを示した^{(11) (12)}。

附随条件を添えた負荷不安定規準はき裂発生についてその有無の判定が可能であることから、板鍛造における割れ発生の予測にこれを適用することができる。そこで、本論文でこれについて検討を試みた。最初に、板鍛造における変形挙動について概説し、板鍛造において割れ発生の危険性のあることを示した。しかる後、塑性力学的観点から割れ評価を行った。

2. 板鍛造における工具接触域の近似解析

円柱工具による板鍛造の概要を図1に示す。半径 R からなる一対の円柱工具の側面間に初期板厚 H の板素材を挟み、工具が相対接近することにより板厚さ方向への板の鍛造加工を想定している。板幅方向に関しては平面

* 原稿受付 2001 年 10 月 9 日。

^{*1} 正員, 自宅(〒010-0442 秋田県南秋田郡大潟村東 3-4-15)。^{*2} 正員, 秋田大学工学資源学部(〒010-8502 秋田市手形学園町 1-1)。

E-mail: moritoki@ipc.akita-u.ac.jp

Fig.1 Schematic view of plate forging

Fig.2 Forging process of a plate

ひずみ拘束下にあるものとする。図1は板幅方向に垂直な断面の形状を示している。以後、全ての寸法は板厚 H で除し、無次元化して表示する。無次元化された初期板厚は1、円柱半径は $r (=R/H)$ となる。図2に加工過程の模式図を示す。図1の水平、垂直対称軸をそれぞれ x_1 , x_2 軸とする。これらに関して素材は対称に変形するので、これらの座標原点を点Oとし、図2では図1の第1象限のみを描いている。鍛造過程における工具と素板との接触域の端点Bは変形初期には変形前の板表面上に位置しているが、ある程度加工が進むと、すでに圧縮変形を受けた加工表面上に端点Bが位置するようになる。前者を過程I、後者を過程IIと呼ぶ。

板厚が最小となる、 x_2 軸上の工具接触点を点Cとし、そこでの板厚を $2h$ 。鍛造開始からの工具の相対接近量を $2u$ とする。工具工程として u は0から0.5の範囲にある。したがって

$$u + h = \frac{1}{2} \quad \dots\dots\dots (1)$$

の関係にある。近似解析では、変形初期に x_2 軸に平行な直線上に位置していた物体点は加工が進行しても常に x_2 軸に平行な別の直線上に位置しているものと仮定する。工具と板が接触している円弧CB間の任意点P (x_1 , x_2)に注目する。点Pと同じ x_1 座標値を持つ x_1 軸上の点を点Q (x_1 , 0)、また同じ x_2 座標値を持つ x_2 軸上の点を点T (0, x_2)とする。点Pが x_2 軸となす接触角度を θ とすると、点Pの座標は式(1)を考慮して

$$x_1 = r \sin \theta, \quad x_2 = \frac{1}{2} - u + r(1 - \cos \theta) \quad \dots\dots\dots (2)$$

である。

工具により押し込まれた曲線三角形 $\triangle TCP$ の面積 S' と曲線四辺形 $\square OQPC$ の面積 S はそれぞれ

$$S' = \frac{r^2}{2} \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right), \quad S = x_1 x_2 - S' \quad \dots\dots\dots (3)$$

で表される。点Pが現在位置している物体点に点Pを固定すると、物体点の移動に伴って点Pは移動するが、板幅方向に平面ひずみ変形を仮定していることにより曲線四辺形 $\square OQPC$ の面積 S は変化しない。したがって、式(3)の第2式を時間微分すると

$$\dot{S} = \dot{x}_1 x_2 + x_1 \dot{x}_2 - \frac{r^2}{2} (1 - \cos 2\theta) \dot{\theta} = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

となる。さらに、式(2)の時間微分により

$$\dot{x}_1 = r \cos \theta \dot{\theta}, \quad \dot{x}_2 = -\dot{u} + r \sin \theta \dot{\theta} \quad \dots\dots\dots (5)$$

である。これらより

$$\frac{dx_1}{du} = r \cos \theta \frac{d\theta}{du}, \quad \frac{dx_2}{du} = -1 + \frac{x_1}{x_2} \tan \theta \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{1}{r \cos \theta} \frac{x_1}{x_2}$$

が得られる。

ここで、 dx_2/du について検討する。変形初期に、板表面上に位置していた物体点Pは鍛造が進んでも板表面上に位置していることには変わりがない。 $dx_2/du < 0$ であるときには点Pは板厚方向に圧縮変形が課せられるので、点Pにおいて工具と素材との接触は実現している。しかし、 $dx_2/du > 0$ の状態になると点Pにおける x_2 軸に平行な線素には伸び変形が課せられなければならないが、加工構造からこのことは可能ではない。したがって、この状態が発生すると工具は素材から離れることになる。ここで、過程Iから過程IIへと遷移する工程 u_i を求める。点Pが端点Bに一致した状態において、線素PQは工程 u_i に至るまでの過程Iでは常に圧縮状態 $dx_2/du < 0$ にある。しかし、遷移工程 u_i に達すると $dx_2/du = 0$ となり、それ以降の過程IIでは $dx_2/du = 0$ を持続するように端点Bはこれまで初期の板表面にあった状態からすでに圧縮変形を受けた表面に位置するようになる。したがって、遷移工程 u_i は $x_2 = 1/2$, $dx_2/du = 0$ の条件から算出されることになる。 $x_2 = 1/2$ の条件を式(2)に適用して

$$x_{1Bi} = r \sin \theta_{Bi}, \quad u_i - r(1 - \cos \theta_{Bi}) = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

さらに、これと $dx_2/du = 0$ の条件を式(6)の第2式に適用して

$$1 - 2x_{1Bi} \tan \theta_{Bi} = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

を得る。添字 i は遷移状態であることを、添字 B は端点Bに帰属していることを示す。式(7), (8)から遷移段階における工程と接触角度は

$$u_i = r + \frac{1}{4} - \sqrt{r^2 + \frac{1}{16}}, \quad \theta_{Bi} = \cos^{-1} \left(1 - \frac{u_i}{r} \right) \quad \dots\dots\dots (9)$$

で与えられる。過程Iでは式(2)の第2式より接触角度 θ_{ii} は

Fig.3 Development of contact angle between a tool and a plate

$$\theta_B = \cos^{-1} \left(1 - \frac{u}{r} \right) \quad \dots\dots\dots (10)$$

の関係にあり、遷移段階に至るまで増大する。過程Ⅱに入ると、端点Bで常に $dx_2/du=0$ の条件を満足するように端点Bはすでに圧縮変形を受けた板表面上に位置するようになる。このときの接触角度 θ_B は、 $dx_2/du=0$ の条件下にある式(6)の第2式と式(2)

$$-1 + \frac{x_{1B}}{x_{2B}} \tan \theta_B = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$x_{1B} = r \sin \theta_B, \quad x_{2B} = \frac{1}{2} - u + r(1 - \cos \theta_B)$$

を用いて求められる。それぞれの過程における端点Bの接触角度 θ_B の経過を図3に示す。過程Ⅰでは接触角度 θ_B は鍛造工程と共に増大しているが、過程Ⅱでは減少の過程にあることが分かる。

板鍛造では遷移段階 u_i を境に接触域が増加から減少に転ずる。素材と工具との接触面に摩擦が作用しないとすると、工具圧力は板の長さ方向に引張り応力をもたらす成分を誘起し、これらが全体として板素材の長さ方向への引張り力を誘発する。この引張り負荷は工具素材間の接触圧力にも依存するが、接触角度 θ_B が大きい程、さらに中心板厚 $2h$ が小さい程そこの引張り応力は平均的には大きくなる。これが鍛造過程において割れ発生の危険性を生んでいる。写真1は高力アルミニウムA2024板を $r=4.17$ の工具を用いて鍛造したときの板破断を x_1x_2 断面で撮影した写真の一例である。本論文ではこのような割れ発生の有無を調査することを目的とし

Photo 1 Fracture in plate forging

た。写真1で見られるように板中心が割れの発生点となっているので、そこでの変形挙動を有限要素法で考察し、これに従って負荷不安定規準を適用して延性破壊の発生状況を検討した。負荷不安定規準は塑性不安定規準とも密接な関係にあるので、塑性不安定規準についても比較論及している。

3. 塑性不安定規準

最初に塑性不安定規準⁽⁹⁾について簡潔に概説する。速度型境界条件が物体表面に付与された状態において物体内部で多価解が発生したとしたとき、そこでは

$$\Delta \dot{\epsilon}_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij} = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

を満足していることが求められる。ここで、 $\dot{\epsilon}_{ij}$ は公称応力速度を、 Δ は多価解を任意に2つ選び、これらに関する差を表わす。

公称応力速度は、体積不変則の下ではCauchy応力と

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \sigma_{kj} v_{i,k} \quad \dots\dots\dots (13)$$

の関係にある。ひずみ速度と剛体回転速度は速度勾配に関して

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (v_{j,i} + v_{i,j}), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} (v_{j,i} - v_{i,j}) \quad \dots\dots\dots (14)$$

で定義される。このとき、Jaumannの応力速度は

$$\dot{\sigma}'_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \sigma_{ik} \omega_{kj} - \sigma_{kj} \omega_{ki} \quad \dots\dots\dots (15)$$

である。これらを用いて式(13)は

$$\dot{\epsilon}'_{ij} = \dot{\sigma}'_{ij} - \sigma_{ik} \dot{\epsilon}_{ik} + \sigma_{ik} \omega_{kj} \quad \dots\dots\dots (16)$$

となる。ここでは、相当応力と相当ひずみ速度を

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}}, \quad \epsilon_s = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}'_{ij} \dot{\epsilon}'_{ij}} \quad \dots\dots\dots (17)$$

で定義する。 σ'_{ij} は偏差応力を表わす。物体の変形はレビ・ミーゼス構成式

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3\dot{\epsilon}_s}{2\sigma_s} \sigma'_{ij} \quad \dots\dots\dots (18)$$

n 乗加工硬化則

$$\sigma_s = \sigma' \epsilon_s^n \quad \dots\dots\dots (19)$$

に従うものとする。そこでは

$$\dot{\epsilon}_s = \frac{\epsilon_s}{H} \frac{\dot{\sigma}'_s}{\sigma'_s}, \quad \dot{\sigma}'_s = \frac{3}{2\sigma_s} \sigma'_{ij} \dot{\sigma}'_{ij} \quad \dots\dots\dots (20)$$

の関係にある。

式(16)に式(18)を演算して

$$\frac{n}{\epsilon_s} \sigma_s \dot{\epsilon}_s^2 = \frac{\dot{\sigma}'_s \dot{\epsilon}_s}{1 - \sigma'_{rs} C_{rs}} \quad \dots\dots\dots (21)$$

を得る。ここで、

$$C_{ij} \equiv C'_{ik} \sigma'_{jk}, \quad C \equiv \frac{9}{4} \frac{\epsilon_s}{n} \frac{1}{\sigma_s^3} \quad \dots\dots\dots (22)$$

である。同様に、多価解の差に関しても式(21)と類似な関係

$$\frac{n'}{\epsilon'_s} \sigma'_s (\Delta \epsilon'_s)^2 = \frac{\Delta \dot{\sigma}'_s \Delta \dot{\epsilon}_s}{1 - \sigma'_{rs} C_{rs}} \quad \dots\dots\dots (23)$$

が成り立つ。解が多価になると、相当ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_s$ に、また当然、相当ひずみ速度差 $\Delta \dot{\epsilon}_s$ にも多価性が出現し、

これらは不定形(零/零)で表現されることになる。したがって、式(21)、(23)から解が多価であるための条件として、式(12)に加えて

$$y \equiv 1 - \sigma'_{xx} C_{xx} = 0 \quad \dots\dots\dots (24)$$

と

$$\dot{s}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} = 0 \quad \dots\dots\dots (25)$$

であることが要請される。

式(24)から

$$\frac{\varepsilon_{cd}}{H} = \frac{4}{9} \frac{\sigma_c^3}{\sigma_{ij} \sigma'_{ik} \sigma'_{jk}} \quad \dots\dots\dots (26)$$

を得る。これは塑性不安定が発生する時の変形を与える。そして、これは平面応力場において拡散くびれ限界と一致することから添字 D を付して表した。これを用いて式(24)の y は

$$y = 1 - \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{sd}} \quad \dots\dots\dots (27)$$

で表される。さらに、式(25)は式(18)より

$$z \equiv \sigma'_{ij} \dot{s}_{ij} = 0 \quad \dots\dots\dots (28)$$

の条件で置き換えられる。

式(21)より塑性域では常に

$$\frac{2}{3} \sigma_s \dot{\sigma}_s' = \dot{z} \quad \dots\dots\dots (29)$$

の関係を維持している。塑性不安定における式(24)、

(25)の条件を考慮して塑性域を

$$\begin{aligned} y > 0: z > 0 \\ y \leq 0: z \leq 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (30)$$

に分割することができる。前者は安定過程の変域を、後者は塑性不安定後の変域である。式(28)の変数 z に関して s_{ij} 空間を考える。塑性不安定発生時には $z=0$ を満足していなければならない。これは、 s_{ij} 空間において原点を通る超平面を表わし、式(30)におけるように s_{ij} 空間の変域を、安定と不安定の領域に区分している。この超平面を Z 平面と呼ぶ。 Z 平面上で $y=0$ を満足するとき塑性不安定が発生する。そのときには $z<0$ の領域において $y<0$ となり、負荷環境が許せば塑性変形の持続が可能である。しかし、負荷経路が Z 平面上に到達したとき、必ずしも $y=0$ であるとは限らない。それよりも、通常は $y>0$ である。このような場合には、 Z 平面を境に除荷過程へと遷移する。したがって、負荷経路が Z 平面を通過する過程で、除荷か塑性不安定が発生することになる。

4. 負荷不安定

物体は変形を促す外力の作用を受けて塑性変形を進めている。板鍛造においては割れ発生点は板の内部に位置し、その周辺を他の物体点で取り囲まれている。このような場合には考察微小要素の変形を促す外力は負荷荷重に相当する公称応力である。考察要素に関してこの要素の耐えることのできる限界の強度を越えて、負荷である公称応力が増大しようとしたときには、公称応力の

増大がたとえ設定負荷経路の下で前もって決められていたとしても公称応力成分の中のいずれか一つは強度限界から設定経路に沿わせることができなくなる。結果としてその公称応力成分は設定負荷経路の下で停留する状態が出現し、これから先の負荷は設定経路を辿ることができなくなる。このように考察要素の強度限界が原因となって負荷経路が乱される状態を負荷不安定と呼んでいる⁽¹¹⁾。

以下の議論では、座標系を応力の主方向に採る。このとき、レビー・ミーゼスの構成関係の下でひずみ速度も主成分のみとなり、

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \sigma_I, \quad \sigma'_{ij} = \delta_{ij} \sigma_I', \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \delta_{ij} \dot{\varepsilon}_I \quad \dots\dots (31)$$

である。ここでは応力速度の主方向が応力のそれと一致することは前提とはしていない。したがって、座標系をこのように応力の主方向に採用したことによって一般性は損なっていない。ひずみ速度比、応力比、応力速度比を

$$\begin{aligned} \gamma &\equiv \frac{\dot{\varepsilon}_2}{\dot{\varepsilon}_1}, \quad \alpha \equiv \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \quad \beta \equiv \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \\ \xi &\equiv \frac{\dot{\sigma}_{22}}{\dot{\sigma}_{11}}, \quad \eta \equiv \frac{\dot{\sigma}_{33}}{\dot{\sigma}_{11}} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (32)$$

で定義する。最大主応力の方向では塑性変形の過程でその方向に伸びひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_1 > 0$ が生じているので、一般に $\sigma'_1 > 0$ である。 γ を用いて式(28)で定義した z は

$$\bar{z} = \dot{s}_{11} + \gamma \dot{s}_{22} - (1 + \gamma) \dot{s}_{33} \quad \dots\dots\dots (33)$$

で置き換えられる。ここで、

$$\bar{\varepsilon} \equiv \frac{\bar{z}}{\sigma'_1} \quad \dots\dots\dots (34)$$

としている。

考察要素の強度限界から停留の引き金となる公称応力成分は通常は最大の公称応力成分である。そこで、負荷不安定の基本条件として

$$\dot{s}_{11}' = 0 \quad \dots\dots\dots (35)$$

を採用する。添字 L は負荷不安定限界であることを表す。負荷不安定においてくびれの発生が促されるためには負荷不安定の基本条件、式(35)を満足していることに加えて塑性変形の持続と除荷状態の共存可能性も保証されていることが必要である。この条件を負荷不安定の附随条件と呼ぶ。除荷状態では

$$\frac{2}{3} \sigma_s \dot{\sigma}_s' = \sigma'_i \dot{\sigma}_i'' \leq 0 \quad \dots\dots\dots (36)$$

の状態になければならない。ここで、上添字 U は除荷過程であることを表す。したがって、これが負荷不安定の附随条件となる。

式(31)を考慮して式(16)の公称応力速度は塑性変形下で

$$\dot{s}_{ij} = \dot{\sigma}'_{ij} - \delta_{ij} \sigma_I \dot{\varepsilon}_I + \sigma_I \omega_{ij} \quad \dots\dots\dots (37)$$

除荷状態ではひずみ速度成分は零であるので

$$\dot{s}_{ij} = \dot{\sigma}'_{ij} + \sigma_I \omega_{ij} \quad \dots\dots\dots (38)$$

となる。剛体回転速度は恒等的に

$$\omega_y = (\delta_y - 1)\omega_{11} \quad \dots\dots\dots (39)$$

の関係にある。式 (37) を用いて式 (35) の条件は

$$\dot{\sigma}_{11} \left\{ 1 - C\sigma_1\sigma'_1(\sigma'_1 + \sigma'_2\xi + \sigma'_3\eta) \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (40)$$

となる。通常 $\dot{\sigma}_{11} \neq 0$ であるので、式 (40) より負荷不安定限界

$$\frac{\varepsilon_{gl}}{n} = \frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{(2 - \alpha - \beta)(\sqrt{1 + \gamma + \gamma^2})^3}{1 + \gamma\xi - (1 + \gamma)\eta} \quad \dots\dots\dots (41)$$

を得る。

負荷不安定の附随条件、式 (36) は式 (38) , (39) を考慮して

$$\frac{2}{3}\sigma_s\dot{\sigma}'_s = \sigma'_1\dot{s}_u (= \sigma'_1\dot{\varepsilon}) \leq 0 \quad \dots\dots\dots (42)$$

となる。したがって、式 (42) より附随条件は

$$\dot{\varepsilon}_L \leq 0 \quad \dots\dots\dots (43)$$

で表すことができる。

さて、ここで塑性不安定に関する状態を求めておく。式 (31) を考慮して式 (26) は

$$\frac{\varepsilon_{gu}}{n} = \frac{4}{9} \frac{\sigma_s^3}{\sigma'_1\sigma'_2\sigma'_3} \quad \dots\dots\dots (44)$$

となる。これより塑性不安定による限界

$$\frac{\varepsilon_{gu}}{n} = \frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{(2 - \alpha - \beta)(\sqrt{1 + \gamma + \gamma^2})^3}{1 + \alpha\gamma^2 + \beta(1 + \gamma)^2} \quad \dots\dots\dots (45)$$

を得る。

ここで再び負荷不安定に戻る。負荷不安定発生時には式 (27) の y は

$$y_L = 1 - \frac{\varepsilon_{gl}}{\varepsilon_{gu}} \quad \dots\dots\dots (46)$$

で与えられる。式 (30) を考慮して、負荷不安定が塑性不安定の前に発生している、 $\varepsilon_{gl} < \varepsilon_{gu}$ ゆえ

$$y_L > 0; \quad \dot{\varepsilon}_L > 0 \quad \dots\dots\dots (47)$$

発生後であると、 $\varepsilon_{gl} \geq \varepsilon_{gu}$ より

$$y_L \leq 0; \quad \dot{\varepsilon}_L \leq 0 \quad \dots\dots\dots (48)$$

である。このように、負荷不安定と塑性不安定との間で発生時期の前後関係に関連して負荷不安定における y_L の符号が変化する。式 (48) の第2式は負荷不安定の附随条件、式 (43) と整合している。したがって、負荷不安定においてくびれ発生が実現するには負荷不安定以前に塑性不安定状態を通過していることが必要である。負荷不安定では基本条件が式 (35) で条件付けられているので、附随条件は式 (43) から

$$\dot{\varepsilon}_L = \gamma\dot{s}_{22} - (1 + \gamma)\dot{s}_{33} \leq 0 \quad \dots\dots\dots (49)$$

となる。

5. 板中央部における延性評価量

最小板厚部の板中央、図2の原点Oを考察点とする。ここでは変形の対称性から x_1 軸、 x_2 軸の方向はそれぞれ主応力方向であり、さらに、応力速度に関しても主方

向である。したがって、テンソル成分は一つの添字で表現できる。テンソルの座標成分表現に関して x_1 軸、 x_2 軸を座標軸1, 2とする。座標軸3の方向には平面ひずみ変形の拘束が課せられている。式 (39) を考慮して公称応力速度は式 (37) より

$$\dot{s}_i = \dot{\sigma}_i - \sigma_i\dot{\varepsilon}_i \quad \dots\dots\dots (50)$$

となる。さらに、平面ひずみ変形の拘束から

$$\gamma = -1, \quad \beta = \frac{1}{2}(1 + \alpha) \quad \dots\dots\dots (51)$$

である。したがって、相当応力、相当ひずみ速度は

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_1 - \sigma_2), \quad \dot{\varepsilon}_e = \frac{2}{3}\dot{\varepsilon}_1 = -\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}_2 \quad \dots\dots\dots (52)$$

である。これらを用いて塑性不安定の限界は式 (45) より、負荷不安定の限界は式 (41) よりそれぞれ

$$\frac{\varepsilon_{gu}}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}, \quad \frac{\varepsilon_{gl}}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1 - \alpha}{1 - \xi} \quad \dots\dots\dots (53)$$

となる。式 (33) より

$$\dot{\varepsilon} = \dot{s}_1 - \dot{s}_2 \quad \dots\dots\dots (54)$$

である。負荷不安定の附随条件は式 (49) より

$$\dot{\varepsilon}_L = -\dot{s}_2' \leq 0 \quad \dots\dots\dots (55)$$

で与えられる。

6. 演算処理

数値解析は市販の有限要素解析ソフト Marc を使用した。変形の対称性から図2の領域にある素材に関して有

Fig.4 Development of tensile stress

Fig.5 Development of equivalent strain

限要素解析を行った。板形状は細長比10の比率とした。これを基本的には四角形要素で分割し、さらに、四角形要素をその対角線で分割し4個の三角形要素で構成した。板厚方向には15個の四角形要素で分割した。板の長さ方向に関しては図2の原点近傍で応力勾配が大きいことから、原点に近づく程要素辺を小さくなるように選び四角形要素87分割とした。全体として5220の三角形要素で構成した。

応力値は全て加工硬化係数 σ' で除し、無次元化されているものとする。本解析では加工硬化指数は $n=0.1$ と設定した。工具工程 u を時間尺度に採用し、板中心点における変形の経過を観察した。 σ_1 の分布の一例を図4に示す。ここで、 μ は工具素材間の摩擦係数を表す。この経過は滑らかに変化しているとはいえない状態であるが、突飛な点を除くと局所的には変動しているが、これらの値を基準として比較的滑らかな曲線で置き換えることができる。 σ_2 についても同様の近似を施すことはできるが、このようにするとそれぞれの近似による誤差が重なり合い、さらなる精度低下を招くおそれがあり、好ましくない。通常の演算処理では、ひずみ値の変動は応力値の変動に比べて桁違いに少ないのが普通であり、本演算においてもひずみ値には σ_1 におけるような局所的な変動はほとんど見られなかった。その一例として図4と同一の加工条件下にある相当ひずみ ϵ_s の分布を図5に示す。そこで、 σ_2 に代わって近似した σ_1 と ϵ_s の分布を

$$\sigma_1 = f(u), \quad \epsilon_s = h(u) \quad \dots\dots\dots (56)$$

で関数表示した。上式の ϵ_s を用いて式(19)に従って σ_2 を求め、しかる後、式(52)から式(56)の関係に従って

$$\sigma_2 = \sigma_1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s = f(u) - \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ h(u) \right\}'' \equiv g(u) \quad \dots\dots\dots (57)$$

として σ_2 の分布を得た。関数 f , g , h を工具工程 u で微分することにより $\dot{\sigma}_1$, $\dot{\sigma}_2$, $\dot{\epsilon}_s$ が算出される。式(52)の第2式より

$$\dot{\epsilon}_1 = \frac{3}{2} \dot{\epsilon}_s, \quad \dot{\epsilon}_2 = -\frac{3}{2} \dot{\epsilon}_s \quad \dots\dots\dots (58)$$

である。

7. 割れ発生の評価

割れ発生の状況を比較するにあたり、3種類の加工条件を設定した。これらを上記、A型、B型、C型と呼び、この順で割れ発生の危険性が高まっている。A型では割れの発生はなく、C型では割れ発生が濃厚である。B型はこれらの中に位置し、割れ発生の有無に関して微妙な状態にある。

これらA型、B型、C型について 応力 σ_1 の分布を図6に示す。これらそれぞれの加工条件は線図の中に示し

Type	r	μ
A	2	0
B	4	0.05
C	7	0

Fig.6 Examples of tensile stress development

た表に提示した。これらの応力分布ではA型からC型になるに従って引張り応力の最高値にいくぶんの上昇が見られることから割れ発生の危険性がC型に向かうほど増大の傾向にあることが窺える。

さて、つぎに公称応力速度 $\dot{\epsilon}_i$ の経過を検討する。図7にA型、B型、C型のそれぞれに関する経過を示した。最初に、A型の過程、図7Aについて考察する。ここでは常に $\dot{\epsilon}_1 > \dot{\epsilon}_2$ の状態にあり、式(54)より $\dot{\epsilon} > 0$ であるので、塑性不安定状態になることはなく安定変形が持続している。数値演算の過程で各工程 u において相当ひずみ ϵ_s と応力比 α が求められている。この α に従って式(53)の第1式よりそれぞれの加工時点に依存した塑性不安定限界 $\dot{\epsilon}_{sp}$ が算出される。この $\dot{\epsilon}_{sp}$ は α の値によっては負値を与えることがある。相当ひずみは本来正值を採るべく定義されているので、負値となる $\dot{\epsilon}_{sp}$ は無限大として置き換えることができる。これらを用いて式(27)に従って y 値が求められる。この分布を図8に示した。A型では表示した全域にわたって $y > 0$ にあり、これからも安定変形の持続していることが分かる。

Fig.7A Development of nominal stress rates (Type A)

Fig. 7B Development of nominal stress rates (Type B)

Fig. 7C Development of nominal stress rates (Type C)

つぎに、B型に目を転じよう。図7Bより $u_p=0.250$ で $\bar{\epsilon}=0$ を満足している。B型の y 値は、図8で示されているように、 $u_p=0.250$ において $y=0$ となっている。したがって、ここで塑性不安定状態となり、変形の一意性を失う可能性に遭遇する。同様にC型では、さらに早い工程 $u_p=0.241$ で塑性不安定状態となっている。

図7で観察した公称応力速度の経過を公称応力速度空間（2次元）で表し、図9に示す。負荷不安定の基本条件を満足する点（ $\dot{s}_i^i=0$ ）を○印で示し、そこでの $\dot{s}_i^i$ を用いて $\bar{\epsilon}_L$ の値を式（55）から求め、これを付記している。 $\bar{\epsilon}=0$ の状態に遭遇する場合にはその段階を図

Fig. 8 Development of instability indicator

Fig. 9A Loading path in nominal stress rate space (Type A)

Fig. 9B Loading path in nominal stress rate space (Type B)

Fig. 9C Loading path in nominal stress rate space (Type C)

7同様●印で表示している。図9で付記した $\bar{\epsilon}_L$ の値からA型、B型では負荷不安定の附随条件、式（55）は満足していないことが分かる。それゆえ、負荷不安定規準に準拠するとき、C型においてのみ割れ発生が予測されることになる。したがって、 $\bar{\epsilon}_L \leq 0$ （式（55））が負荷不安定規準に準拠するときの割れ発生の指標となる。

これに対して塑性不安定規準に準拠すると下記に記述するような判定となる。塑性不安定では $\bar{\epsilon}=0$ の状態では $y=0$ を満足していることが必要である。 y 値は図8におけるような経過を示すことから、それぞれの加工条

件のもとで得られた y 値の最小値 y_M が大きな負値であるほど塑性不安定後の不安定な塑性変形の持続期間が長い。したがって、図8からA型では y_M は正值となっており塑性不安定に遭遇しないが、 y_M が負値となるB型、C型では $y=0$ となる工程 u_P において塑性不安定を経験する。このような経過から塑性不安定規準に準拠するとき $y_M \leq 0$ を割れ発生の指標として採用することができる。図9CのC型では負荷不安定の基本条件、 $\dot{\gamma}_I = 0$ を満足する状態(○印)は塑性不安定状態(●印)の後に現れているのに対し、B型ではこれらの発生時期の前後関係がC型とは逆になっている。このように、塑性不安定規準で割れ発生が予測されたとしても必ずしも負荷不安定規準で割れ発生が予測されるとは限らない。

本鍛造加工では板の加工硬化指数を $n=0.1$ と設定している。工具半径と摩擦係数の種々の組み合わせについて上で述べた指標を求めた。塑性不安定における指標 y_M を図10に、負荷不安定における指標 $\dot{\gamma}_L$ を図11に示す。これらでは、割れ発生を予測した場合を●印で、正常に鍛造できる場合を○印で示している。図10、11を比較して、●印が付されている割れ発生を予測する領域は負荷不安定規準よりも塑性不安定規準で広い加工範囲にわたっている。これは負荷不安定の附随条件を満足する

Fig.10 Dependency of cracking index in plastic instability on tool radius and friction coefficient

Fig.11 Dependency of cracking index in load instability on tool radius and friction coefficient

には塑性不安定を経過していなければならないことと関連している。負荷不安定に関しては今回の演算で割れ発生が予測された工具半径は $r=6$ と $r=7$ であった。これらにおいて割れ発生における工具工程 u_F は $r=7$ でほぼ $u_F=0.248$ であり、この値は摩擦係数にほとんど影響されていないようであった。これに対して $r=6$ では $u_F=0.247$ を与え、これは $r=7$ の場合よりもほんの少し減少している。これらの値は図3で示した、過程Iから過程IIへの遷移工程 u_I とほぼ一致しており、またこれらは r が小さい程小さくなる傾向とも符合している。このような観察から割れが発生する加工では破壊は遷移工程近傍で起こることが予測される。

8. 結 言

負荷不安定規準を塑性不安定規準との関連で概説し、板鍛造における中心割れを負荷不安定規準を用いて予測した。塑性不安定は多価解存在の可能性を示唆するものであるが、その実現を保証するものではない。これに対して負荷不安定はその基本条件に加えて附随条件を満足するとき、除荷と塑性負荷の共存可能性を与えることから、割れ発生の予測には適切なものと考えられる。

負荷不安定規準の附随条件を満足するには、その基本条件を満たす変形段階以前に塑性不安定状態を経過していることが必要であり、このため、負荷不安定規準による割れ発生評価は塑性不安定によるそれよりも割れ発生の可能性を小さく評価する傾向にある。

割れ発生に関する危険性の異なる3種類の加工条件を取り上げ、それぞれの変形経過から評価指標を算出する方法を示した。種々の加工条件に基づいて評価指標を算出し板鍛造における割れ発生特性を示した。板の鍛造では工具との接触角度はある加工工程で最大となり、それ以降は減少の過程を辿る。割れ発生が予測される加工では最大接触角度を示す遷移工程近傍で割れ発生が生じていた。

文 献

- (1) Swift, H. W., *J. Mech. Phys. of Solids*, 1 (1952), 1-18.
- (2) Hill, R., *J. Mech. Phys. of Solids*, 1 (1952), 19-30.
- (3) Stören, S. and Rice, J. R., *J. Mech. Phys. of Solids*, 23 (1952), 421-441.
- (4) 守時 一・奥山栄樹, 塑性と加工, 38-434 (1997), 266-270.
- (5) 守時 一・奥山栄樹, 塑性と加工, 36-418 (1995), 1246-1251.
- (6) Hill, R. and Hutchinson, J. W., *J. Mech. Phys. of Solids*, 23 (1975), 239-264.
- (7) 守時 一・奥山栄樹, 機論, 63-613, A (1997), 1955-1962.
- (8) Hill, R., *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 93 (1983), 177-189.
- (9) 守時 一・奥山栄樹, 機論, 64-617, A (1998), 193-199.
- (10) 守時 一, 機論, 56-531, A (1990), 2333-2338.
- (11) 守時 一・佐藤裕久, 機論, 67-659, A (2001), 1201-1208.
- (12) 守時 一・佐藤裕久, 機論, 67-659, A (2001), 1209-1217.