コーティング材自由表面集中力の理論解*

(第 1 報, 2 次元問題の解)

許 金 泉^{*1}, 武 藤 睦 治^{*1}, 付 列 東^{*2}

Theoretical Solution for Concentrated Force on the Free Surface of a Coating Material

(1st Report, On the Two Dimensional Solutions)

Jin-Quan XU^{*3}, Yoshiharu MUTOH and Lie-Dong FU^{*3} Department of Mechanical Engineering, Nagaoka University of Technology,
1603-1 Kamitomioka, Nagaoka-shi, Niigata, 940-2188 Japan

The theoretical solution of a concentrated force on the free surface of a coating material is deduced by introducing the infinite series mirror points of the load point and applying the Dirichlet's uniqueness theorem. In this study, the two dimensional solution is deduced in details by using the infinite series of the Goursat's stress function corresponding to every mirror point. It is found that the stress function corresponding to a higher order mirror point can be determined from that corresponding to a lower one, therefore, all the stress functions can be determined from that corresponding to the first order mirror point which is in fact the stress function for concentrated forces on the free surface of a semi-infinite body. It is also found that the contribution of the stress function to stress distribution decreases as the increasing of the corresponding order of the mirror point. It is confirmed that only the stress functions corresponding to the first several mirror points have an influence on the accuracy of theoretical solution. This theoretical solution can be expected to be very useful in evaluating the strength of coating materials or other surface modified materials.

Key Words: Elasticity, Coating Material, Interface, Uniqueness Theorem, Two Dimension, Concentrated Force

1. 緒 言

近年, コーティング材などの表面改質材の工業的応用が広がり, その信頼性評価が重要な問題となっている⁽¹⁾⁻⁽³⁾. これらの表面改質材では表面層と基材が一種の異材接合構造となり, 表面層と基材の機械的特性の相違を考慮した評価法が求められる⁽⁶⁾⁽⁷⁾. 一方, 自由表面を持つ異種接合材問題の理論解が見当たらないため, このような表面改質材の力学的挙動を把握するには, 有限要素法や境界要素法などの数値解析に頼らざるを得ないのが現状である⁽⁸⁾⁽⁹⁾. そこで本研究では, コーティング材のような表面改質材を, 表面に異質層を有する半無体としてモデル化し, その自由表面に集中力が作用する問題の基本解を誘導することを目的とする. なお, 接合膜内部の集中力問題およびその接触体の近似解析は幾つか報告されているが⁽¹⁰⁾⁻⁽¹²⁾, 膜表面集中力問題の理論解析はまだ報告されていない. 異種接合材の理論解析においては, 界面を鏡として, 荷重点の鏡像点を用いる方法が有効であることがよく知られている⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾. また, 均質材が自由表面を持つ問題の理論解析には自由表面

を鏡として, 荷重点の鏡像点を考慮する方法は古くから知られている⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾. 本研究が対象としている問題では, 界面と自由表面の 2 枚の鏡を持ち, 鏡像点が鏡像点を生み出すので, 結局無限個の鏡像点があることになる. しかし, 荷重点から遠く離れた鏡像点に関する応力関数項は応力場や変位場に与える影響が小さいものと考えられる. したがって, これらの無限個の鏡像点を用いて, 解析解を級数の形で与えることができ, 実際の応用では, 問題に応じ, 必要な有限個の鏡像点に関する項のみを取り出すことにより, 十分精度の良い解が得られると考えられる. すなわち, このような無限級数で与えられた解析解は応用上でも十分意味がある. 本報ではまず第一段階として, 2 次元問題を取り上げる. 3 次元問題に関する解析は次報で報告する. また, 着重点が材料内部にある場合についても, 鏡像点位置の表示式の違いに注意すれば, 本報と同様の方法で, 基本解を求めることができる. それに関しては別報で報告する.

2. 解析モデルと境界条件

図 1 に示す半無限異種接合材の自由表面に, 集中力 P_x, P_y が作用する問題を解析の対象とする. 材料 I の厚さは h とし, そのせん断弾性係数およびポアソン比をそ

* 原稿受付 2001 年 6 月 8 日.

^{*1} 正員, 長岡技術科学大学機械系(〒940-2188 長岡市上富岡町 1603-1).^{*2} 長岡技術科学大学大学院.

E-mail: jinquan@mech.nagaokaut.ac.jp

おすと,

$$\begin{cases} A_k + \overline{A_k} + zA_k + B_k - \left[a_k + \overline{a_k} + za_k + b_k \right] \\ \quad = - \left[\Phi_k + \overline{\Phi_k} + z\Phi_k + \Psi_k \right] \\ \Gamma \left\{ \overline{\kappa_1 A_k} - zA_k - B_k \right\} - \left[\kappa_2 \overline{a_k} - za_k - b_k \right] \\ \quad = - \Gamma \left[\kappa_1 \overline{\Phi_k} - z\Phi_k - \Psi_k \right] \end{cases} \quad \text{at } y=0 \quad (10)$$

となる. このように書きなおされた式の両辺の実部と虚部は, $y=0$ の条件を代入する前にはすべて調和関数であり, $y=0$ の条件を代入すると界面連続条件を満足する. すなわち, 式(10)のいずれの式も $L(x, y) = R(x, -y)$ の形になっている (ただし L, R は調和関数である). Dirichlet の等価性原理から, 次式の関係が成り立つ.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\partial R}{\partial y} \quad (11)$$

界面上で, $z_k = \overline{\zeta_k}$ の関係があるため, 式(1), (6), (11)より, 次式が成立することが分る.

$$\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial z}, \quad \frac{\partial L}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial R}{\partial \overline{z}} \quad (12)$$

式(12)を式(10)に適用し, さらにすべての関数が解析関数であることを利用し, 次式が導ける.

$$\begin{cases} a_k = \frac{\Gamma(\kappa_1+1)}{\Gamma+\kappa_2} A_k \\ b_k = \left(\frac{\Gamma(\kappa_1+1)}{\Gamma\kappa_1+1} - \frac{\Gamma(\kappa_1+1)}{\Gamma+\kappa_2} \right) zA_k + \frac{\Gamma(\kappa_1+1)}{\Gamma\kappa_1+1} B_k \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \Phi_k = \frac{\Gamma-1}{\Gamma\kappa_1+1} \left(z\overline{A_k} + \overline{B_k} \right) \\ \Psi_k = \frac{\Gamma\kappa_1-\kappa_2}{\Gamma+\kappa_2} \overline{A_k} + \frac{1-\Gamma}{\Gamma\kappa_1+1} \left(z^2 \overline{A_k} + z\overline{A_k} + z\overline{B_k} \right) \end{cases} \quad \overline{z_k} = \zeta_k \quad (14)$$

すなわち, 関数 A_k, B_k が分っていれば, 上式で関数 Φ_k, Ψ_k, a_k, b_k を決めることができる. 異種接合材問題によく使われている Dunders' parameter⁽¹⁷⁾を用いると,

$$\alpha = \frac{\mu_1(\kappa_2+1) - \mu_2(\kappa_1+1)}{\mu_1(\kappa_2+1) + \mu_2(\kappa_1+1)}, \quad \beta = \frac{\mu_1(\kappa_2-1) - \mu_2(\kappa_1-1)}{\mu_1(\kappa_2+1) + \mu_2(\kappa_1+1)} \quad (15)$$

式(13)及および(14)はそれぞれ次のようになる.

$$\begin{cases} a_k = \frac{1-\alpha}{1+\beta} A_k \\ b_k = \frac{2(1-\alpha)\beta}{1-\beta^2} zA_k + \frac{1-\alpha}{1-\beta} B_k \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} \Phi_k = \frac{\beta-\alpha}{1-\beta} \left(z\overline{A_k} + \overline{B_k} \right) \\ \Psi_k = -\frac{\alpha+\beta}{1+\beta} \overline{A_k} + \frac{\alpha-\beta}{1-\beta} \left(z^2 \overline{A_k} + z\overline{A_k} + z\overline{B_k} \right) \end{cases} \quad \text{for } \overline{z_k} = \zeta_k \quad (17)$$

上式を式(8)に代入すれば, 界面連続条件が満たされていることが分り, 以上の導出過程が正しく行われていることが確認できる.

一方, 自由表面では, $y=h$ のため, 次式の関係がある.

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= x - 2(k-1)ih, \quad \zeta_k = x + 2(k+1)ih \\ z_{k+1} &= \overline{\zeta_k}, \quad R_{k+1} = \rho_k \end{aligned} \quad (18)$$

式(6)を式(3)に代入すると, 自由表面において

$$\begin{cases} A_{k+1} + \overline{A_{k+1}} + (x-ih)A_{k+1} + B_{k+1} + \Phi_k + \overline{\Phi_k} + (x-ih)\Phi_k + \Psi_k = 0 \\ \text{for } k=1 \rightarrow \infty \end{cases} \quad (19)$$

$$A_1 + \overline{A_1} + (x-ih)A_1 + B_1 = 0 \quad (20)$$

が成立しなければならない. 式(19)にまだ非調和関数 xF の項が含まれ, 式(12)が適用できない. $y=h$ の条件を用いて, Dirichlet 問題となるように整理すると

$$A_{k+1} + \overline{A_{k+1}} + (z-2ih)A_{k+1} + B_{k+1} = - \left(\Phi_k + \overline{\Phi_k} + (z-2ih)\Phi_k + \Psi_k \right) \quad (21)$$

が得られる. 式(12)を適用すると, 次式が導ける.

$$\begin{cases} A_{k+1} = -z\overline{\Phi_k} - \overline{\Psi_k} \\ B_{k+1} = (z-2ih)\overline{\Phi_k} - \overline{\Phi_k} + z(z-2ih)\overline{\Phi_k} + (z-2ih)\overline{\Psi_k} \end{cases} \quad \overline{\zeta_k} = z_{k+1} \quad (22)$$

すなわち, 関数 $\Phi_k(\zeta_k), \Psi_k(\zeta_k)$ が分っていれば, 関数 $A_{k+1}(z_{k+1}), B_{k+1}(z_{k+1})$ が上式から求められる. なお, 式(22)が式(19)の境界条件を厳密に満たしていることは簡単に確認できる. 一方, 式(20)を満足し, しかも作用点 O_1 で集中力となり, 遠方条件を満たす解は明らかに均質材半無限板表面の集中力の解⁽¹⁸⁾と一致する. 座標系の平行移動を考慮すると, 次式のようになる.

$$\begin{aligned} A_1 &= C \log z_1 \\ B_1 &= -\overline{C} \log z_1 + \frac{ihC}{z_1} \end{aligned} \quad (23)$$

$$C = -\frac{P_x + iP_y}{2\pi} \quad (24)$$

式(23), (16)および(22)は漸化式の形になっており, 式(7)に示されているすべての応力関数が決められている. これらの応力関数は界面連続条件と自由表面条件だけでなく, 無限遠のところの遠方条件と集中荷重条件も厳密に満たしている. Mathematica などの数学演算ソフトを利用すれば, 任意項まで応力関数を与えることが可能である. 付録には, 手計算でも簡単にできる方法, すなわち, すべての応力関数が多項式で表せる性質を用いて, その多項式の係数のみを漸化により求める方法を示している. また, 実用上重要な3次の鏡像点までの応力関数も付録に示している.

式(23), (16)および(22)から, 材料の組合せの影響は二つの Dunders' Parameters だけで表せることが分る. また, $\alpha = \beta = 0$ すなわち材料 "I" と "II" が同一材となると, $k=2$ 以上の項がすべて0となり, しかも Φ_1 および Ψ_1 も0となり, 均質材自由表面に集中力が作用する問題の解に退化することが簡単に確認できる.

4. 数値検証例

以上の理論解が正しく導かれているかどうかを検証するために、図2に示す解析モデルに対して、境界要素(BEM)解析を行った。ただし、半無限体に近い状態にするために、材料"II"の幅と厚さは材料"I"の厚さ h に比べて、弾性学上十分大きい値となるように取っている。解析に用いたプログラムは異種接合材問題に特に有効なBEM2D⁽¹⁹⁾である。材料定数を表1に示し、要素分割例を図3に示す。一般的に界面上の応力が最も重要と考えられるので、ここでは、界面上の応力分布を用いて比較を行うことにする。図4および5にはそれぞれ垂直方向および接線方向に単位集中力が作用した場合の界面上の応力分布を示している。ただし、理論解については、 $n=k$ で示している解は k 次までの鏡像点に関する応力関数の寄与を足し合わせたものであり、本例では $n=3$ 以上のものがほとんど区別がつかなくなり、すなわち、理論解は3次の鏡像点まで考えれば、十分よい精度の解となる。図4および5から分るように、BEMによる数値結果は前述の理論解とよく一致し、理論解が正しく導かれていることが確認された。

Fig.2 BEM analysis model.

Table 1 Materials constants

Material	I	II
Young's Modulus E (Gpa)	546	206
Poisson's Ratio ν	0.3	0.3

Fig.3 An example of element division.

a) Normal Stress σ_y for $P_x = 0, P_y = 1 \text{ N/mm}$ b) Shear stress τ_{xy} for $P_x = 0, P_y = 1 \text{ N/mm}$

Fig.4 Stress distributions along the interface for normal load.

a) Normal Stress σ_y for $P_x = 1 \text{ N/mm}, P_y = 0$ b) Shear stress τ_{xy} for $P_x = 1 \text{ N/mm}, P_y = 0$

Fig.5 Stress distribution along the interface for shear load.

5. 実用上考慮すべき鏡像点次数の検討

前節の検証例でも触れたように、高次鏡像点に関する応力関数の応力場に対する寄与は急速に小さくなり、すなわち、ある次数までの鏡像点に関する応力関数を考えれば、有限項で与えられた理論解は実質的にすでに十分良い精度になっていると考えられる。ここでは、実用上何次までの鏡像点に関する応力関数を考慮すればよいのかについて考察する。

5.1 厚さ h の影響 応力を $\sigma_0 = P_x/h$ または $\sigma_0 = P_y/h$ で、座標値を h で無次元化すれば、すなわち、

$$s_{ij} = \sigma_{ij}/\sigma_0, Z_k = z_k/h, \xi_k = \zeta_k/h \quad (25)$$

の変数変換を導入すると、付録の多項式で示している応力関数から次式が得られる。

$$s_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} [f_{ij}(Z_k) + g_{ij}(\xi_k)] \quad (26)$$

すなわち、無次元化すれば、膜厚の影響が消え、弾性学的に常に単位膜厚の問題として取扱えることを意味している。図6には、表1に示す材料の組合せに対し、界面上の無次元化した応力分布の一例を示している。図から、 $N \geq 4$ であれば、無次元化した応力分布の変化がほとんどなくなる(最大相対誤差=図面分別率、2.5%以下となる)ことが分る。すなわち、一般的には4次までの鏡像点を考慮すればよい。しかし、ここで注意が必要なのは、式(25)の変換が $h \rightarrow 0$ のとき、特異変換になっていることである(応力値を無限大で割っている)。数学的には、 $h \neq 0$ である限り、無次元化した応力で考えることができるが、工学的には、ある程度以下の膜厚に対し、式(25)の変数変換自身が問題となる可能性がある。すなわち、無次元化した応力の相対誤差が小さくても、応力値の絶対誤差が大きい可能性がでてくる。従って、コーティング材のような薄い膜を有する問題に対しては、応力の絶対誤差を抑えるために、より多くの鏡像点を取る必要があると考えられる。

5.2 材料組合せの影響 前例は材料の弾性特性の相違が比較的小さい場合であった。ここで、 $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ とし、ヤング率の比を変化させ、図6のような無次元

Fig.6 Normalized stress distribution on interface ($P_y = 0$).

Fig.7 Required order for different Young's modulus.

化応力分布図より、所要の次数とヤング率の比の関係を求め、図7に示す。図より、材料特性の相違が大きくなると、必要な鏡像点の次数が高くなることが分る。

6. 結論

無限の鏡像点を導入することにより、コーティング材の自由表面に集中力が作用する問題の理論解析を行った。得られた主な結論は以下の通りである。

- 1) 理論解は各次鏡像点に関する応力関数の和として与えられ、高次のは低次のものの漸化から得られる。その漸化式を明示した。
- 2) 鏡像点の次数が高次になっていくにつれ、それに関する応力関数が全体の応力場に対する寄与は急速に小さくなっていく。
- 3) 界面上の応力に注目すれば、一般的に4次までの鏡像点を考えれば、十分よい精度の解が得られる。膜厚が非常に薄い場合では、応力の絶対誤差を抑えるために、より多くの鏡像点が必要である。
- 4) 弾性特性の差異が大きいほど、考慮すべき鏡像点の次数が高くなる。

参考文献

- 1) 宅間, ほか4名, 機論, A66-651(2000), 2074-2078.
- 2) 荒井, ほか4名, 機論, A66-641(2000), 144-150.
- 3) 北村・渋谷・上野, 機論, A66-648(2000), 1568-1573.
- 4) 中, ほか4名, 機論, A66-644(2000), 698-699.
- 5) 塩沢, 機械の研究, 47-9(1995), 913-922.
- 6) Hu, M.S., Thouless, M.D. and Evans, A.G., Acta Mater., 36-5(1988), 1301-1307.
- 7) 戸谷, ほか3名, 機論, A60-578(1994), 2266-2272.
- 8) 香川, ほか3名, 機論, A60-570(1994), 409-415.
- 9) 香川, ほか3名, 機論, A60-570(1994), 416-420.
- 10) 山田, 機論, A61-586(1995), 1349-1355.

- 11) Chain, 他 2 名, Int.J.Solids Struct. 10(1974), 1179-1188.
- 12) 志摩・佐藤・古口, 機論, A51-468(1985), 1983-1989.
- 13) Hetenyi, J., Dunders, J., J.Appl.Mech.2(1962), 362-368.
- 14) Rongved, L., Proc. Of the first Midwestern Conference on Solid Mechanics, 1953, 1-13.
- 15) Mindlin, R.D., J.Physics, 7(1936), 195-202.
- 16) Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N., Theory of Elasticity, 3rd Edition, McGraw Hill Inc., 1987.
- 17) Dunders, J., J.Composite Mater., 1(1967), 310-322.
- 18) 岡村編, 強度解析学, 1984, オーム社.
- 19) 結城・許, 生産研究, 43-7(1991), 306-309.

付 録

1) 応力関数の漸化式

簡単のため, 材料定数を以下のように定義し直す.

$$m_1 = \frac{\beta - \alpha}{1 - \beta}, \quad m_2 = \frac{\alpha + \beta}{1 + \beta} \quad (\text{A1})$$

これを用いると, 応力関数の漸化式は次のように整理できる.

$$\begin{cases} \Phi_k = m_1 \left\{ [(\zeta_k - (2k-1)ih) \overline{A_k} + \overline{B_k}] \right. \\ \left. \Psi_k = -m_2 \overline{A_k} - m_1 \left\{ [(\zeta_k - (2k-1)ih)^2 \overline{A_k} + [(\zeta_k - (2k-1)ih) \left(\overline{A_k} + \overline{B_k} \right) \right] \right\} \right\} \end{cases} \quad \overline{\zeta_k} = \zeta_k \quad (\text{A2})$$

$$a_k = (1 - m_2) A_k, \quad b_k = (m_1 + m_2) [z_k + (2k-1)ih] \overline{A_k} + (m_1 + 1) B_k \quad (\text{A3})$$

$$\begin{cases} A_{k+1} = -[z_{k+1} + (2k+1)ih] \overline{\Phi_k} - \overline{\Psi_k} \\ B_{k+1} = [z_{k+1} + (2k-1)ih] \left(\overline{\Phi_k} + \overline{\Psi_k} \right) - \overline{\Phi_k} + [z_{k+1} + (2k+1)ih] [z_{k+1} + (2k-1)ih] \overline{\Phi_k} \end{cases} \quad \overline{\zeta_k} = \zeta_{k+1} \quad (\text{A4})$$

2) 多項式としての漸化式

すべての応力関数が多項式の形を有するので, その多項式の係数の漸化式があれば便利である. 一般性を考えると

$$A_k = a_0 + a_1 \log z_k + \sum_{j=1}^N \frac{a_{j+1}}{z_k^j}, \quad B_k = b_0 + b_1 \log z_k + \sum_{j=1}^{N+1} \frac{b_{j+1}}{z_k^j} \quad (\text{A5})$$

とおくことができる. ただし, N は鏡像点の次数に応じて増大する. 前述の漸化式より,

$$\Phi_k = m_1 \left\{ \overline{a_1 + b_0 + b_1 \log \zeta_k} + \frac{\overline{b_2 - a_2 - (2k-1)ih a_1}}{\zeta_k} + \sum_{j=2}^N \frac{\overline{b_{j+1} - j a_{j+1} + (j-1)(2k-1)ih a_j}}{\zeta_k^j} + \frac{\overline{a_{N+1}(2k-1)Nih + b_{N+2}}}{\zeta_k^{N+1}} \right\} \quad (\text{A6})$$

$$\begin{aligned} \Psi_k = & -(m_2 \overline{a_0 + m_1 b_1}) - m_2 \overline{a_1} \log \zeta_k + \frac{1}{\zeta_k} \left\{ (2k-1)ih m_1 (\overline{b_1 - a_1}) + m_1 \overline{b_2} - (m_1 + m_2) \overline{a_2} \right\} \\ & + \frac{1}{\zeta_k^2} \left\{ 2m_1 \overline{b_3} - (4m_1 + m_2) \overline{a_3} - m_1 (2k-1)^2 h^2 \overline{a_1} - m_1 (2k-1)ih [\overline{b_2} - 3\overline{a_2}] \right\} \\ & + \sum_{j=3}^N \frac{1}{\zeta_k^j} \left\{ j m_1 \overline{b_{j+1}} - (j^2 m_1 + m_2) \overline{a_{j+1}} - m_1 (2k-1)ih [(j-1) \overline{b_j} - (j-1)(2j-1) \overline{a_j}] + m_1 (j-1)(j-2)(2k-1) h^2 \overline{a_{j-1}} \right\} \\ & + \frac{m_1}{\zeta_k^{N+1}} \left\{ (N+1) \overline{b_{N+2}} + N(N-1)(2k-1)^2 h^2 \overline{a_N} - (2k-1)ih [N \overline{b_{N+1}} - N(2N+1) \overline{a_{N+1}}] \right\} + \frac{m_1}{\zeta_k^{N+2}} \left\{ (2k-1)^2 h^2 N(N+1) \overline{a_{N+1}} - (N+1)(2k-1)ih \overline{b_{N+2}} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

$$\begin{aligned} b_k = & (m_1 + m_2) a_1 + (m_1 + 1) b_0 + (m_1 + 1) b_1 \log z_k + \frac{1}{z_k} \left\{ (2k-1)ih (m_1 + m_2) a_1 - (m_1 + m_2) a_2 + (m_1 + 1) b_2 \right\} \\ & - \sum_{j=2}^N \frac{1}{z_k^j} \left\{ j (m_1 + m_2) a_{j+1} - (m_1 + 1) b_{j+1} + (j-1)(m_1 + m_2)(2k-1)ih a_j \right\} + \frac{1}{z_k^{N+1}} \left\{ (m_1 + 1) b_{N+2} - N(m_1 + m_2)(2k-1)ih a_{N+1} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

が得られる. さらに同様に,

$$\Phi_k = a_0 + a_1 \log \zeta_k + \sum_{j=1}^N \frac{a_{j+1}}{\zeta_k^j}, \quad \Psi_k = b_0 + b_1 \log \zeta_k + \sum_{j=1}^{N+1} \frac{b_{j+1}}{\zeta_k^j} \quad (\text{A9})$$

とおくと, 前述の漸化式より

$$A_{k+1} = -(a_1 + b_0) - b_1 \log z_{k+1} + \frac{1}{z_{k+1}} \left\{ a_2 - b_2 - (2k+1)ih a_1 \right\} + \sum_{j=2}^N \frac{1}{z_{k+1}^j} \left\{ j a_{j+1} - b_{j+1} + (j-1)(2k+1)ih a_j \right\} + \frac{1}{z_{k+1}^{N+1}} \left\{ N(2k+1)ih a_{N+1} - b_{N+2} \right\} \quad (\text{A10})$$

$$B_{k+1} = \overline{b_1 - a_0} - \overline{a_1} \log z_{k+1} - \frac{1}{z_{k+1}} \left\{ \overline{b_2} + ih[(2k+1) \overline{a_1} - (2k-1) \overline{b_1}] \right\} + \frac{1}{z_{k+1}^2} \left\{ (4k^2 - 1)h^2 \overline{a_1} - 2\overline{b_3} + 3\overline{a_3} + ih[(6k+1) \overline{a_2} - (2k-1) \overline{b_2}] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=3}^N \frac{1}{z_{k+1}^j} \left[ih(j-1)[(4kj-2k+1)\overline{a_j} - (2k-1)\overline{b_j}] - (1-j^2)\overline{a_{j+1}} - j\overline{b_{j+1}} - (4k^2-1)h^2(j-1)(j-2)\overline{a_{j-1}} \right] \\
& + \frac{1}{z_{k+1}^{N+1}} \left\{ ihN[(4kN+2k+1)\overline{a_{N+1}} - (2k-1)\overline{b_{N+1}}] - (4k^2-1)h^2N(N-1)\overline{a_N} - \overline{b_{N+2}} \right\} - \frac{1}{z_{k+1}^{N+2}} \left\{ (2k-1)ih\overline{b_{N+2}} + (4k^2-1)h^2N(N+1)\overline{a_{N+1}} \right\}
\end{aligned} \quad (A11)$$

が得られる。

2) 3 次の鏡像点までの応力関数

$k=1$, すなわち, 1 次鏡像点に対する応力関数

$$\begin{aligned}
A_1 &= C \log z_1, \quad B_1 = -\overline{C} \log z_1 + \frac{ihC}{z_1} \\
\Phi_1 &= m_1 \left[\overline{C} - C \log \zeta_1 - \frac{2ih\overline{C}}{\zeta_1} \right], \quad \Psi_1 = -m_2 \overline{C} \log \zeta_1 - m_1 \left(\frac{ih(2\overline{C}+C)}{\zeta_1} + \frac{2h^2\overline{C}}{\zeta_1^2} - C \right), \quad C = -\frac{P_x + iP_y}{2\pi} \\
a_1 &= (1-m_2)C \log z_1, \quad b_1 = -(m_1+1)\overline{C} \log z_1 + C(m_1+m_2) + \frac{ihC}{z_1}(2m_1+m_2+1)
\end{aligned} \quad (A12)$$

$k=2$, すなわち, 2 次鏡像点に対する応力関数

$$\begin{aligned}
A_2 &= m_2 C \log z_2 + m_1 \left(\frac{2ih\overline{C}}{z_2} - \frac{4h^2 C}{z_2^2} \right), \quad B_2 = m_1 \overline{C} \log z_2 - (m_1+m_2)C + \frac{ih}{z_2} \left(2m_1(\overline{C}-C) - m_2 C \right) - \frac{h^2 m_1(8C+2\overline{C})}{z_2^2} - \frac{8ih^3 m_1 C}{z_2^3} \\
\Phi_2 &= m_1 \left[m_1 C \log \zeta_2 - m_1 \overline{C} + \frac{2ih\overline{C}(m_1-m_2)}{\zeta_2} + \frac{4h^2 C m_1}{\zeta_2^2} - \frac{16ih^3 \overline{C} m_1}{\zeta_2^3} \right] \\
\Psi_2 &= -m_2^2 \overline{C} \log \zeta_2 - m_1^2 C + \frac{ihm_1}{\zeta_2} \left[C(3m_1+2m_2) + 2\overline{C}(m_1-m_2) \right] + \frac{2hm_1^2}{\zeta_2^2} \left[4m_1 C + (3m_1-m_2)\overline{C} \right] - \frac{24ih^3 m_1^2(C+2\overline{C})}{\zeta_2^3} - \frac{144m_1^2 h^4 \overline{C}}{\zeta_2^4}
\end{aligned} \quad (A13)$$

$$a_2 = (1-m_2)m_2 C \log z_2 + (1-m_2)m_1 \left(\frac{2ih\overline{C}}{z_2} - \frac{4h^2 C}{z_2^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
b_2 &= (m_1+m_2)(m_2-m_1-1)C + m_1(m_1+1)\overline{C} \log z_2 + \frac{ih(m_2-1)}{z_2} \left[C \left(3m_2 + \frac{2(m_2-m_1)(m_1+1)}{m_2-1} \right) - 2m_1 \overline{C} \right] \\
&+ \frac{2h^2 m_1}{z_2^2} \left[4(m_2-1)C + (3m_2+2m_1-1)\overline{C} \right] + \frac{8ih^3 m_1(3m_2+2m_1-1)C}{z_2^3}
\end{aligned}$$

$k=3$, すなわち, 3 次鏡像点に対する応力関数

$$\begin{aligned}
A_3 &= m_2^2 C \log z_3 + \frac{2ihm_1(m_2-m_1)\overline{C}}{z_3} + \frac{4h^2 m_1(m_1-2m_2)C}{z_3^2} + \frac{16ih^3 m_1^2 \overline{C}}{z_3^3} - \frac{96m_1^2 h^4 C}{z_3^4} \\
B_3 &= -m_1^2 \overline{C} \log z_3 + (m_1^2-m_2^2)C + \frac{ih}{z_3} \left[C(2m_1^2-2m_1m_2-3m_2^2) - 2m_1(m_1-m_2)\overline{C} \right] \\
&+ \frac{2h^2 m_1}{z_3^2} \left[4(m_1-2m_2)C + (m_1-3m_2)\overline{C} \right] + \frac{8ih^3 m_1}{z_3^3} \left[6m_1 \overline{C} + (m_1-6m_2)C \right] - \frac{48h^4 m_1^2}{z_3^4} (8C+3\overline{C}) - \frac{1152ih^5 m_1^2 C}{z_3^5} \\
\Phi_3 &= m_1^3 \overline{C} - m_1^2 C \log \zeta_3 - \frac{2ihm_1}{\zeta_3} (m_1^2-m_1m_2+m_2^2)\overline{C} + \frac{4C}{\zeta_3^2} h^2 m_1^2 (m_2-2m_1) + \frac{32ih^3 m_1^2 (m_1-m_2)\overline{C}}{\zeta_3^3} + \frac{96m_1^3 h^4 C}{\zeta_3^4} - \frac{768m_1^3 h^5 \overline{C}}{\zeta_3^5} \\
\Psi_3 &= m_1^3 C - m_2^2 \overline{C} \log \zeta_3 + \frac{ihm_1}{\zeta_3} \left[2m_2(m_2-m_1)(C-\overline{C}) - m_1^2(5C+2\overline{C}) \right] + \frac{2h^2 m_1}{\zeta_3^2} \left[(4m_1(m_2-2m_1)C - (5m_1^2-3m_1m_2+m_2^2)\overline{C}) \right] \\
&+ \frac{4ih^3 m_1^2}{\zeta_3^3} \left[(20m_1-6m_2)C + 24(m_1-m_2)\overline{C} \right] + \frac{96h^4 m_1^2}{\zeta_3^4} \left[(5m_1-4m_2)\overline{C} + 4m_1 C \right] - \frac{1920ih^5 m_1^3}{\zeta_3^5} [C+2\overline{C}] - \frac{19200m_1^3 h^6 \overline{C}}{\zeta_3^6} \\
a_3 &= (1-m_2) \left[m_1^2 C \log z_3 + \frac{2ihm_1(m_2-m_1)\overline{C}}{z_3} + \frac{4h^2 m_1(m_1-2m_2)C}{z_3^2} + \frac{16ih^3 m_1^2 \overline{C}}{z_3^3} - \frac{96m_1^2 h^4 C}{z_3^4} \right] \\
b_3 &= (m_1+m_2)[m_2^2+(m_1+1)(m_1-m_2)] - (m_1+1)m_1^2 \overline{C} \log z_3 + \frac{ih(m_2-1)}{z_3} \left[\left(5m_2^2 + \frac{2(m_1+1)(m_1^2-m_1m_2+m_2^2)}{m_2-1} \right) C - 2m_1(m_2-m_1)\overline{C} \right] \\
&- \frac{2h^2 m_1}{z_3^2} \left[4(m_1-2m_2)(m_2-1)C - [5m_2^2-5m_1^2+(m_1+1)(m_1-3m_2)]\overline{C} \right] \\
&- \frac{8ih^3 m_1}{\zeta_3^3} \left[6m_1(m_2-1)\overline{C} + [4m_1^2-4m_2^2+(m_2-1)(m_1-6m_2)]C \right] + \frac{48m_1^2 h^4}{\zeta_3^4} [8(m_2-1)C + (5m_2+2m_1-3)\overline{C}] + \frac{384ih^5 m_1^2 C}{\zeta_3^5} (5m_2+2m_1-3)
\end{aligned} \quad (A14)$$