温度依存性材料の熱弾性問題に対する二重相反境界要素法*

田中正隆^{*1}, 松本敏郎^{*1}, 須田裕輔^{*2}

A Dual Reciprocity Boundary Element Method Applied to the Thermoelastic Problem of Temperature-Dependent Materials

Masataka TANAKA^{*3}, Toshiro MATSUMOTO and Yusuke SUDA^{*3}Department of Mechanical System Engineering, Shinshu University,
4-17-1 Wakazato, Nagano-shi, Nagano, 380-8553 Japan

This paper is concerned with a dual reciprocity boundary element method (DRBEM) applied to the thermoelastic problem of temperature-dependent materials. The fundamental solution of homogeneous materials is used in the integral equation, and hence a domain integral arises in the resulting boundary integral equation. This domain integral is transformed into boundary integrals based on the dual reciprocity introducing a new set of radial basis functions. The details of the proposed DRBEM are presented, and a computer code is developed for two-dimensional problems. Through discussion of the results obtained by the computer code, the usefulness of the present DRBEM is demonstrated.

Key Words: Computational Mechanics, Boundary Element Method, Thermal Stress, Dual Reciprocity Method, Temperature-Dependent Material, Steady-State Heat Conduction

はじめに

熱伝導問題や熱弾性問題⁽¹⁾では普通、熱伝導率、Young 率、線膨張係数などの材料定数を一定と仮定して解析するが、高温状態ではこれらの材料定数は温度に依存するので厳密には定数ではなく、温度依存性材料というより正確なモデル化をしなければならない。本研究では、熱伝導率、Young 率、線膨張係数の温度依存性を考慮するが、このとき熱弾性問題は非線形となり、材料定数が一定と仮定した場合に比べて解析は容易ではなくなる。

境界要素法⁽²⁾を用いてこのような非線形熱弾性問題を解析する際、積分方程式の定式化に必要な基本解を求めるのが困難であり、均質媒体に対する基本解を用いて定式化を行わなければならない。そのため、温度依存性に由来する領域積分項が境界積分方程式に現れる。この領域積分項は、領域内部を要素またはセルに区切ることで計算することができるが、この作業には手間がかかり境界要素法の特長が半減してしまう。熱伝導率の温度依存性に由来する非線形性は、Kirchhoff 変換⁽³⁾を用いて線形の問題に変換できる。し

かし、一般の境界条件や領域の接続条件等の取り扱いが面倒になり、Kirchhoff 変換を施しても解析は容易ではない。

そこで本研究では二重相反法 (DRM)⁽⁴⁾を用いて温度依存性に由来する領域積分項を境界積分に変換して近似的に評価する。DRM を用いることにより比較的簡単な近似関数と線形微分作用素の特解を用いて領域積分を境界積分に変換できる。したがって最終的に境界のみの離散化と領域内部に選点を配置するだけで効率的な解析が可能となる。熱弾性問題へのこの種のアプローチについてはこれまでいくつかの研究があり⁽⁵⁾⁽⁶⁾、例えば岡山ら⁽⁷⁾は均質媒体に対する熱弾性問題の解析に対して DRM を適用してその有効性を示している。本報では、温度依存性材料の熱弾性問題⁽⁸⁾に対する積分方程式の定式化を示し、いくつかの例題を本手法で解析した結果を考察することにより本手法の有効性について検討する。著者ら⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾は以前に非均質媒体や温度依存性材料の熱伝導問題に対して DRM を適用してその有効性を示しているが、本報ではさらに熱弾性問題への拡張を示す。温度依存性材料の熱伝導問題についての解析手法は文献⁽¹⁰⁾を参照されたい。

* 原稿受付 2002 年 2 月 26 日。

^{*1} 正員, 信州大学工学部(〒380-8553 長野市若里 4-17-1)。^{*2} 学生員, 信州大学大学院。

E-mail: dtanaka@gipwc.shinshu-u.ac.jp

1. 熱伝導問題

1.1 支配微分方程式 熱伝導率が温度に依存して連続的に変化する熱伝導問題に対する支配微分方程式は、内部発熱がない場合次式で与えられる。

$$\nabla\{k(\theta)\nabla\theta(x)\} = 0 \quad (1)$$

ただし、 $\theta(x)$ は温度、 $k(\theta)$ は熱伝導率を表すものとする。ここで、式(1)を次式のように展開する。

$$\nabla^2\theta(x) = -\frac{1}{k(\theta)}\nabla k(\theta)\nabla\theta(x) \quad (2)$$

上式の右辺は温度依存性に由来する項である。

1.2 DRM 積分方程式の定式化に本研究では Laplace 方程式の基本解を使用する。この基本解を $\theta^*(x, y)$ とし、式(2)の両辺にかけ、考察領域全体で積分したものを定式化の出発点とする。部分積分しソース点 y を境界上に移行することにより、次の境界積分方程式を得る。

$$c(y)\theta(y) + \int_{\Gamma} q^*(x, y)\theta(x)d\Gamma - \int_{\Gamma} \theta^*(x, y)q(x)d\Gamma = -\int_{\Omega} \theta^*(x, y) \left\{ -\frac{1}{k(\theta)}\nabla k(\theta)\nabla\theta(x) \right\} d\Omega \quad (3)$$

ここで問題となるのは上式右辺の領域積分項である。この領域積分項を境界積分に変換するために DRM⁽⁴⁾ を適用する。

まず、式(2)の右辺の温度依存性に由来する項を次式で近似する。

$$-\frac{1}{k(\theta)}\nabla k(\theta)\nabla\theta(x) = \sum_{\ell=1}^{N+L} \alpha^{\ell} f(x, z^{\ell}) \quad (4)$$

ただし、 N は境界節点数、 L は内部選点数、 α^{ℓ} は未知係数、 $f(x, z^{\ell})$ は近似関数、 z^{ℓ} は DRM 選点を表す。ここで、次式を満たす特解を $\hat{\theta}(x, z^{\ell})$ とする。

$$\nabla^2\hat{\theta}(x, z^{\ell}) = f(x, z^{\ell}) \quad (5)$$

上式を式(4)に代入することにより、式(2)が次式のように変形される。

$$\nabla^2\theta(x) = \sum_{\ell=1}^{N+L} \alpha^{\ell} \nabla^2\hat{\theta}(x, z^{\ell}) \quad (6)$$

上式の両辺に基本解 $\theta^*(x, y)$ をかけ、考察領域全体で積分し部分積分することにより次の境界積分方程式を得る。

$$c(y)\theta(y) + \int_{\Gamma} q^*(x, y)\theta(x)d\Gamma - \int_{\Gamma} \theta^*(x, y)q(x)d\Gamma = \sum_{\ell=1}^{N+L} \alpha^{\ell} \left\{ c(y)\hat{\theta}(y, z^{\ell}) + \int_{\Gamma} q^*(x, y)\hat{\theta}(x, z^{\ell})d\Gamma - \int_{\Gamma} \theta^*(x, y)\hat{q}(x, z^{\ell})d\Gamma \right\} \quad (7)$$

ソース点を全ての境界上の節点および内部選点に取ることにより $N+L$ 個の式が得られ、マトリックス形式で書き表すと次式となる。

$$H\theta - Gq = [H\hat{\Theta} - G\hat{Q}]\alpha \quad (8)$$

1.3 未知係数 式(8)において未知係数 α^{ℓ} 以外の係数の成分は全て計算することができる。ここではこの未知係数の計算方法を示す。

関数 $f(x, z^{\ell})$ の形を与え、式(4)が全ての DRM 選点について成り立つとすれば、この連立方程式から未知係数 α^{ℓ} が求められマトリックス形式で次式のように書き表すことができる。

$$\alpha = F^{-1}[K_1\theta_{x_1} + K_2\theta_{x_2}] \quad (9)$$

ただし、

$$K_m = \left[\frac{-1}{k(\theta^1)} \frac{\partial k(\theta^1)}{\partial x_m} \cdots \frac{-1}{k(\theta^{N+L})} \frac{\partial k(\theta^{N+L})}{\partial x_m} \right]^T \quad (10)$$

である。ここで、 θ_{x_m} は温度 $\theta(x)$ の x_m 方向微分を表すものとし、本研究ではこの微分を関数 $f(x, z^{\ell})$ を用いて評価する⁽⁹⁾。まず、温度 $\theta(x)$ を次式のように近似する。

$$\theta(x) = \sum_{\ell=1}^{N+L} \beta^{\ell} f(x, z^{\ell}) \quad (11)$$

ここで、 β^{ℓ} は未知係数である。上式を x_m で微分することにより次式を得る。

$$\frac{\partial\theta(x)}{\partial x_m} = \sum_{\ell=1}^{N+L} \beta^{\ell} \frac{\partial f(x, z^{\ell})}{\partial x_m} \quad (12)$$

式(11)、(12)をすべての選点に対して適用することにより未知係数 β^{ℓ} を消去することができ、 θ_{x_m} は次式のようにまとめることができる。

$$\theta_{x_m} = F_{x_m} F^{-1}\theta \quad (13)$$

ただし、 F_{x_m} は近似関数の x_m 微分のマトリックスを表すものとする。また、熱伝導率 $k(\theta)$ の座標微分は次式のように展開することができる。

$$\frac{\partial k(\theta)}{\partial x_m} = \frac{\partial k(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta(x)}{\partial x_m} \quad (14)$$

上式における温度の座標微分も上述の関数を用いて評価する。したがって、未知係数 α^{ℓ} はマトリックス形式で次式のように書き表すことができる。

$$\alpha = F^{-1}[K_1 F_{x_1} + K_2 F_{x_2}] F^{-1}\theta \quad (15)$$

上式を式 (8) に代入し整理すると次式を得る.

$$Hu - Gq = R\theta \quad (16)$$

ただし,

$$R = [H\hat{\Theta} - G\hat{Q}]F^{-1}[K_1F_{x_1} + K_2F_{x_2}]F^{-1} \quad (17)$$

である. ここで, R は未知温度を含む係数マトリックスとなるため式 (16) を繰り返し計算により求める⁽⁴⁾. 式 (16) において $R = 0$ と仮定し計算をする. その結果得られた温度により式 (17) の R を計算し, 式 (16) において同様の計算を繰り返す. 計算の収束は仮定した温度と得られた温度が十分近い値になるとき収束とする.

以上の理論により境界上の N 個の未知量と L 個の内部未知温度を求めることができる.

2. 熱弾性問題

2.1 支配微分方程式 本研究では, Young 率および線膨張係数の温度依存性を考慮した熱弾性問題⁽¹⁾を取り扱う. このとき, 構成式は次式で与えられる.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}u_{k,l} - (3\lambda + 2\mu)\Theta\delta_{ij} \quad (18)$$

ただし, σ_{ij} は応力, u_k は変位, λ, μ は Lamé の定数, δ_{ij} は Kronecker のデルタを表すものとし, Θ は $\kappa(\theta)$ を線膨張係数とすると次式で与えられる.

$$\Theta = \int_0^\theta \kappa(\theta')d\theta' \quad (19)$$

ただし, 一つの式の中で繰り返し用いられる添字は総和規約に従うものとし, 座標軸に関する偏微分をコンマの後ろに添字を書いて表す. ここで, 熱弾性問題を解析するとき, 温度分布 $\theta(x)$ は与えられているものとする. 式 (18) を釣合方程式へ代入すると次の支配微分方程式を得る.

$$\begin{aligned} \mu u_{j,kk} + (\lambda + \mu)u_{k,kj} + \mu_{,k}(u_{j,k} + u_{k,j}) \\ + \lambda_{,j}u_{k,k} - (3\lambda + 2\mu)\Theta_{,j} - (3\lambda + 2\mu)\Theta = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

ここで, 式 (20) を温度依存の項と均質性に対応する項に展開し, 次式のように書き改める.

$$C_{ijkl}u_{k,li} = b_j \quad (21)$$

ただし,

$$C_{ijkl} = \bar{\lambda}\delta_{ij}\delta_{kl} + \bar{\mu}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (22)$$

$$\begin{aligned} b_j = \frac{1}{E(\theta)} \left\{ \bar{\mu}E_{,k}(\theta)(u_{j,k} + u_{k,j}) + \bar{\lambda}E_{,j}(\theta)u_{k,k} \right. \\ \left. - (3\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})E_{,j}(\theta)\Theta - (3\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})E(\theta)\Theta_{,j} \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \quad (24)$$

$$\bar{\mu} = \bar{G} = \frac{1}{2(1 + \nu)} \quad (25)$$

であり, $E(\theta)$ は Young 率, ν は Poisson 比を表す.

2.2 DRM 境界積分方程式の導出に必要な温度依存性を考慮した基本解を求めることは困難であり, 次式を満たす均質媒体に対する特解を近似基本解として使用する.

$$\bar{C}_{ijkl}u_{k,li}^*(x, y) + \delta(x - y)\delta_{jm} = 0 \quad (26)$$

上式を満たす基本解 $u_{jm}^*(x, y)$ を式 (21) の両辺にかけて考察領域全体で積分し, 部分積分すると次式を得る.

$$\begin{aligned} c_{jm}u_j(y) + \int_{\Gamma} \bar{C}_{ijkl}u_{k,li}^*(x, y)n_iu_j(x)d\Gamma \\ - \int_{\Gamma} \bar{C}_{ijkl}u_{jm}^*(x, y)u_{k,li}(x)n_i d\Gamma \\ = - \int_{\Omega} b_ju_{jm}^*(x, y)d\Omega \end{aligned} \quad (27)$$

ただし, c_{jm} はソース点 y が置かれている境界のなす角度によって決まる係数であり, 滑らかな境界上の点では $c_{jm} = \delta_{jm}/2$ である. ここで,

$$t_{jm}^*(x, y) = \bar{C}_{ijkl}u_{k,li}^*(x, y)n_i \quad (28)$$

とする. また, 式 (18) より表面力を t_j とすると $t_j = \sigma_{ij}n_i$ より

$$t_j(x) = E(\theta)\{\bar{C}_{ijkl}u_{k,li}(x)n_i - D\Theta(\theta)n_j\} \quad (29)$$

となる. ただし,

$$D = 3\bar{\lambda} + 2\bar{\mu} \quad (30)$$

である. したがって,

$$\bar{C}_{ijkl}u_{k,li}(x)n_i = T_j(x) + D\Theta(\theta)n_j \quad (31)$$

となる. ただし, $T_j(x) = t_j(x)/E(\theta)$ である. 式 (28), (31) より, 境界積分方程式 (27) は次式のように書き表すことができる.

$$\begin{aligned} c_{jm}u_j(y) + \int_{\Gamma} t_{jm}^*(x, y)u_j(x)d\Gamma \\ - \int_{\Gamma} u_{jm}^*(x, y)T_j(x)d\Gamma - D \int_{\Gamma} u_{jm}^*(x, y)\Theta(\theta)n_jd\Gamma \\ = - \int_{\Omega} b_ju_{jm}^*(x, y)d\Omega \end{aligned} \quad (32)$$

また, $u_{jm}^*(x, y)$, $t_{jm}^*(x, y)$ の具体形⁽²⁾はそれぞれ次式で与えられる.

$$u_{jm}^*(x, y) = \frac{1}{8\pi\bar{G}(1-\nu)} \times \left\{ (3-4\nu)\delta_{jm} \ln\left(\frac{1}{r}\right) + r_{,j}r_{,m} \right\} \quad (33)$$

$$t_{jm}^*(x, y) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left\{ (1-2\nu)\delta_{jm} + 2r_{,j}r_{,m} \right\} + (1-2\nu)(r_{,j}n_m - r_{,m}n_j) \right] \quad (34)$$

ここで問題とするのは式 (32) の右辺の領域積分項であり、これを境界積分に変換するために DRM⁽⁴⁾ を適用する。

まず、式 (21) の右辺を次式で近似する。

$$b_j = \sum_{\ell=1}^{N+L} \alpha_j^\ell f(x, z^\ell) \quad (35)$$

ただし、 N は境界節点数、 L は内部選点数、 α_j^ℓ は未知係数、 $f(x, z^\ell)$ は近似関数、 z^ℓ は DRM 選点を表すものとする。さらに、次式を満たす特解を $\hat{u}_{kn}(x, z^\ell)$ とする。

$$\bar{C}_{ijkl}\hat{u}_{kn,li}(x, z^\ell) = \delta_{jn}f(x, z^\ell) \quad (36)$$

この特解を用いると式 (21) は次式のように変形することができる。

$$\bar{C}_{ijkl}u_{k,li}(x) = \sum_{\ell=1}^{N+L} \alpha_j^\ell \left\{ \bar{C}_{ijkl}\hat{u}_{kn,li}(x, z^\ell) \right\} \quad (37)$$

上式の両辺に基本解 $u_{jm}^*(x, y)$ をかけ、考察領域全体で積分し、部分積分を行うことにより次の積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} c_{jm}u_j(y) + \int_{\Gamma} t_{jm}^*(x, y)u_j(x)d\Gamma \\ - \int_{\Gamma} u_{jm}^*(x, y)T_j(x)d\Gamma - D \int_{\Gamma} u_{jm}^*(x, y)\Theta(\theta)n_jd\Gamma \\ = \sum_{\ell=1}^{N+L} \alpha_j^\ell \left\{ c_{jm}\hat{u}_{jn}(y, z^\ell) + \int_{\Gamma} t_{jm}^*(x, y)\hat{u}_{jn}(x, z^\ell)d\Gamma \right. \\ \left. - \int_{\Gamma} u_{jm}^*(x, y)\hat{t}_{jn}(x, z^\ell)d\Gamma \right\} \quad (38) \end{aligned}$$

ただし、

$$\hat{t}_{jn}(x, z^\ell) = \bar{C}_{ijkl}\hat{u}_{kn,li}(x, z^\ell)n_i \quad (39)$$

である。

ここで、特解 $\hat{u}_{kn}(x, z^\ell)$ は基本解の導出と同じ手順で求めることができ、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \hat{u}_{kn}(x, z^\ell) = (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})\phi_{,ii}(x, z^\ell)\delta_{kn} \\ - (\bar{\lambda} + \bar{\mu})\phi_{,kn}(x, z^\ell) \quad (40) \end{aligned}$$

ただし、

$$\nabla^4\phi(x, z^\ell) = \frac{f(x, z^\ell)}{\bar{\mu}(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})} \quad (41)$$

である。ここで、関数 $f(x, z^\ell)$ は 2 点 x, z^ℓ 間の距離 r^ℓ の関数で表記するので、特解 $\hat{u}_{kn}(x, z^\ell)$ も距離の関数として与えられる。この特解 $\hat{u}_{kn}(x, z^\ell)$ と同様に式 (39) の $\hat{t}_{kn}(x, z^\ell)$ も距離の関数として与えられる。

式 (38) より、DRM を適用することにより全て境界積分で表される境界積分方程式が得られることが分かる。この方程式を境界要素法で離散化することにより、マトリックス形式で次式の代数方程式系が求められる。

$$Hu - GT - DG\Theta n = [H\hat{U} - G\hat{T}] \alpha \quad (42)$$

2.3 未知係数 DRM で導入した未知係数 α_j^ℓ を導出する方法を示す。

式 (35) において関数 $f(x, z^\ell)$ は 2 点を与えられると既知関数となる。全ての DRM 選点について式 (35) が成立するなら、この関係式から未知係数 α_j^ℓ が求められ、マトリックス形式で次式のように書き表すことができる。

$$\alpha = F^{-1}b \quad (43)$$

ここで、 b_j は変位 u の微分を含むためこの微分の評価には式 (13) のように近似関数を用いて評価する。このとき、最終的に次の方程式系を得る。

$$Hu - GT - DG\Theta n = [H\hat{U} - G\hat{T}] F^{-1}b \quad (44)$$

上式に境界条件を適用して未知量と既知量を振り分け、連立方程式を解くことにより境界上の未知量と領域内部の未知変位を求めることができる。

3. 数 値 解 析 例

3.1 解析例 1 いくつかの解析例により本手法の有効性を検討する。まず、図 1 に示すモデルを考える。内径が 0.2[m]、外径が 0.4[m] の無限長円筒断面を考え、対称性から 1/4 部分を取り出して解析する。境界節点を 32、境界を 2 次要素を用いて 16 要素に分割する。また、内部選点を 49、図示のように配置する。平面ひずみ状態を仮定し、円筒内壁で圧力 4[MPa]、温度 500[°C]、円筒外壁で圧力 1[MPa]、温度 100[°C] が負荷されているものとする。境界条件は円筒内壁および外壁で表面力 t_1, t_2 既知、 x_1 軸上で x_2 方向変位 $u_2 = 0$ 、 x_1 方向表面力 $t_1 = 0$ 、 x_2 軸上で x_1 方向変位 $u_1 = 0$ 、 x_2 方向表面力 $t_2 = 0$ とする。Poisson 比を $\nu = 0.3$ とし、Young 率 $E(\theta)$ および線膨張係数 $\kappa(\theta)$

Fig. 1 Analysis model of thick-walled circular cylinder

Fig. 2 Distribution of Young's modulus

Fig. 3 Distribution of thermal expansion

Fig. 4 Results of displacement u_1 on axis x_1 Fig. 5 Results of traction t_2 on axis x_1

が温度に依存するものとしそれぞれ次式で仮定する⁽¹⁾.

$$E(\theta) = E_1 \exp(E_2\theta) \text{ [GPa]} \quad (45)$$

$$\kappa(\theta) = \kappa_1 + \kappa_2\theta + \kappa_3\theta^2 \text{ [1/°C]} \quad (46)$$

ただし、本解析例において熱伝導率は一定とする. Example 1 では $E_1 = 215$, $E_2 = -0.00044$, $\kappa_1 = 11.76 \times 10^{-6}$, $\kappa_2 = 2.733 \times 10^{-9}$, $\kappa_3 = 0$ とし, Example 2 では $E_1 = 200$, $E_2 = 0.00055$, $\kappa_1 = 20.45 \times 10^{-6}$, $\kappa_2 = -19.29 \times 10^{-9}$, $\kappa_3 = 29.45 \times 10^{-12}$ とする. それぞれの材料定数の変化を図 2, 3 に示す. また, 近似関数として次式を使用する.

$$f(x, z^\ell) = (1 - r^\ell)^3(3r^\ell + 1) \quad (47)$$

解析結果を厳密解と比較したものを以下に示す. この解析例の厳密解については文献⁽¹⁾を参照されたい.

図 4 に x_1 軸上の変位 u_1 の結果を示す. 2 つの例に対して精度のよい結果が得られている. また, 図 5 に

Fig. 6 Analysis model of thick-walled circular cylinder

Fig. 7 Distribution of thermal conductivity

x_1 軸上の表面力 t_2 の結果を示す。同様に精度の良い結果が得られており、本手法の有効性が確認できる。上記の例とは異なるより大きな温度依存性を示す材料定数を仮定しても、本解法により精度の良い解が求められることは確認している。

3.2 解析例 2 図 6 に示すモデルを考える。内径が 0.2[m]、外径が 0.4[m] の無限長円筒断面を考え、対称性から 1/4 部分を取り出して解析する。境界節点を 40、境界を 2 次要素を用いて 20 要素に分割する。また、内部選点を 77、図示のように配置する。平面ひずみ状態を仮定し内壁で圧力 4[MPa]、温度 500[°C]、内壁で圧力 1[MPa]、温度 100[°C] が負荷されているものとする。境界条件は円筒内壁および外壁において表面力 t_1, t_2 既知、 x_1 軸上で x_2 方向変位 $u_2 = 0$ 、 x_1 方向

Fig. 8 Results of temperature on axis x_1

表面力 $t_1 = 0$ 、 x_2 軸上において x_1 方向変位 $u_1 = 0$ 、 x_2 方向表面力 $t_2 = 0$ として与える。本解析例において熱伝導率、Young 率、線膨張係数が温度に依存するものとする。Poisson 比を $\nu = 0.3$ とし Young 率の変化を式 (45)、線膨張係数の変化を式 (46) で仮定し、さらに熱伝導率の変化を次式で仮定する⁽¹⁾。

$$k(\theta) = k_1 + k_2\theta + k_3\theta^2 \text{ [W/mK]} \quad (48)$$

Example 3 では $E_1 = 215$ 、 $E_2 = -0.00044$ 、 $\kappa_1 = 11.76 \times 10^{-6}$ 、 $\kappa_2 = 2.733 \times 10^{-9}$ 、 $\kappa_3 = 0$ 、 $k_1 = 56.08$ 、 $k_2 = 0.0216$ 、 $k_3 = 0$ とし、Example 4 では $E_1 = 200$ 、 $E_2 = 0.00055$ 、 $\kappa_1 = 20.45 \times 10^{-6}$ 、 $\kappa_2 = -19.29 \times 10^{-9}$ 、 $\kappa_3 = 29.45 \times 10^{-12}$ 、 $k_1 = 75.34$ 、 $k_2 = -0.0776$ 、 $k_3 = 2.554 \times 10^{-5}$ とする。それぞれの材料定数の変化を図 2、3、7 に示す。また、近似関数として式 (47) に示す関数を使用する。それぞれ変化特性の異なる 2 つの解析例に対して解析を行う。温度については厳密解と比較するが、変位と表面力については厳密解がないので、選点法による解との比較を行う。

選点法を適用するにあたり、半径方向の変位を次式で仮定する。

$$u_r = \sum_{j=1}^n a_j r^{j-1} \quad (49)$$

ただし、 n は選点数、 a_j は未知係数を表すものとする。上式より $n-2$ 個の応力の釣合い方程式と 2 つの境界条件より n 個の未知係数を求めることができる。したがって各選点における変位と表面力を求めることができる。ただし、ここでの選点の配置は半径方向に 100 点等間隔に配置する。

Fig. 9 Results of displacement u_1 on axis x_1 Fig. 10 Results of traction t_2 on axis x_1

図8に x_1 軸上の温度の解析結果を厳密解と比較したものを示す。厳密解については文献⁽³⁾を参照された。いずれの例についても精度の良い結果が得られていることが分かる。ここでは示さないが、円筒内壁および外壁の熱流束の解析結果も精度の良い結果が得られていることは確かめている。また、図9に x_1 軸上の x_1 方向変位 u_1 、図10に x_1 軸上の x_2 方向表権力 t_2 の解析結果を選点法による解との比較を示す。BEM

による結果と選点法による結果がよく一致していることが分かる。

おわりに

本報では、材料定数の温度依存性を考慮した熱弾性問題への二重相反法の適用について検討した。温度依存性による領域積分項を境界積分に変換することにより、境界のみの離散化と領域内部に評価点を配置するだけで近似解を求めることができ、効率的な解析が可能となった。DRBEMに基づく解析プログラムを開発し、いくつかの解析例により本手法の有効性について検討した。なお、本報では2次元問題を取り扱ったが、3次元問題への拡張が容易に行えるので、その課題についての研究を継続する予定である。

文 献

- (1) 竹内洋一郎, 野田直剛, 熱応力, 日新出版株式会社, (1989).
- (2) 田中正隆, 松本敏郎, 中村正行, 境界要素法, 培風館, (1991).
- (3) C. A. Brebbia(編), 田中正隆(訳), 境界要素法の応用 2, 企画センター, (1983), pp. 1-25.
- (4) P. W. Partridge, C. A. Brebbia and L. C. Wrobel, *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*, Computational Mechanics Publications, (1992).
- (5) 石黒周司, 田中正隆, 簡便なアダプティブ境界要素法による2次元定常熱弾性解析, “機論”, A, **65**-636, (1999), pp. 1649-1655.
- (6) 落合芳博, 改良された多重相反境界要素法による定常熱応力解析, “機論”, A, **60**-571, (1994), pp. 756-762.
- (7) 岡山瞬, 松本敏郎, 田中正隆, 熱弾性問題における二重相反法に関する検討, “境界要素法論文集”, Vol. 17, (2000), pp. 7-10.
- (8) 野田直剛, 辻知章, 傾斜機能平板の定常熱応力(物性値の温度依存性を考慮した場合), “機論”, A, **57**-535, (1991), pp. 625-631.
- (9) 田中正隆, 松本敏郎, 須田裕輔, 傾斜機能材料の定常熱伝導問題に対するDRM境界要素法, “機論”, A, **67**-662, (2001), pp. 1589-1594.
- (10) 田中正隆, 松本敏郎, 須田裕輔, 温度依存性材料の定常熱伝導問題に対する二重相反BEM, “境界要素法論文集”, Vol. 18, (2001), pp. 1-6.