自由境界および固定境界条件下における半無限問題の解析解* (等方性・異方性弾性体の面外せん断問題)

志村 稔^{*1}, 田中 純夫^{*2}, 平島 健一^{*3}

Analytical Solutions for Semi-Infinite Problems under Free and Fixed Surface Boundary Conditions (Cases of Anti-Plane Problems for Isotropic and Anisotropic Elastic Bodies)

Jyo SHIMURA^{*4}, Sumio TANAKA and Ken-ichi HIRASHIMA

^{**} Department of civil and environmental engineering, Yamanashi University,
4-3-11 Takeda, Kofu-shi, Yamanashi, 400-8511 Japan

This paper presents analyses of anti-plane problems for isotropic and anisotropic semi-infinite body due to single force, dipole-force and screw dislocation with two surface boundaries such as free and fixed conditions. Distributions of stresses and displacements under single force and screw dislocation for the above two boundaries are illustrated by some graphical representations as numerical examples.

Key Words: Elasticity, Fundamental Solutions, Isotropy, Anisotropy, Semi-Infinite Body, Anti-Plane Problems, Free and Fixed Surface Boundaries

1. 緒 論

著者らは先に、二次元平面の半無限弾性体の内部において、面内の特異荷重または擾乱が作用(存在)する場合の閉じた型の解析解とそれらの代表的な数値例を示した⁽¹⁾⁽²⁾。そこでは半無限弾性体の表面境界条件としてすべりを含む4種類の場合を対象とした。

本報では等方性・異方性半無限弾性体を対象とし、面外せん断(縦せん断)型の集中力(対), らせん転位が作用(存在)する場合の解析解について考察する。

この種の問題はその支配方程式が面内問題に比較して簡単なため、従来から取り扱われている。例えば、Johnson の著書⁽³⁾には等方性半無限弾性体の表面に集中力が作用する場合の問題が示されており、等方性半無限弾性体の内部に転位が存在する問題については玉手の著書⁽⁴⁾、さらに異方性半無限弾性体の内部に集中力が作用する場合の問題に対しては Chou の研究⁽⁵⁾を列挙することができる。

ここでは、それらを統一的な視点で整理すると共に、未解決な課題に対する新しい解析解を提示する。すなわち、等方性ならびに異方性半無限弾性体を対象とし、境界を次のような自由表面、固定表面とした場合の面外問題について考察する。

2. 基礎方程式、境界条件および基本解

2-1 等方性半無限弾性体の応力、変位および合応

力を求める公式 対象となる応力、変位成分は xy 平面に垂直な座標を z として、面外せん断応力 τ_{xz}, τ_{yz} および変位 u_z であり、いずれも面内の座標 x, y のみの関数である。物体力を無視した釣合方程式・構成式・幾何式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{1}{G} \tau_{xz}, \gamma_{yz} = \frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 γ_{xz}, γ_{yz} は面外せん断ひずみ、 G はせん断弾性係数である。式(1)の釣合方程式を満足する応力関数 $\phi(x, y)$ を次のように定義する。

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y}, \tau_{yz} = -\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (3)$$

式(2)を式(1)に代入し、 u_z または $\phi(x, y)$ を消去すれば次式が得られる。

$$\nabla^2 \phi(x, y) = 0, \nabla^2 u_z = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 ∇^2 はラプラシアンで次式により示される。

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \dots\dots\dots (5)$$

すなわち、 u_z および $\phi(x, y)$ はともに調和関数であり、式(2), (3)の関係から互いに次式の関係式で結ばれている。

$$Gu_z = i\phi(x, y) \quad \dots\dots\dots (6)$$

* 原稿受付 2001 年 12 月 21 日。

^{*1} 正員, 山梨大学大学院(〒400-8511 甲府市武田 4-3-11)。

^{*2} 正員, 明治大学理工学部(〒214-8571 川崎市多摩区東三田1-1-1)。

^{*3} 正員, 山梨大学工学部。

E-mail: jshimura@ccn.yamanashi.ac.jp

したがって、 $u_z, \phi(x, y)$ および応力成分は複素関数 $\psi(z)$ を用いて次のように表される。

$$Gu_z = i\phi(x, y) = \operatorname{Re}[\psi(z)] = \frac{1}{2}[\psi(z) + \overline{\psi(z)}]. \quad \dots\dots(7)$$

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = \psi'(z). \quad \dots\dots(8)$$

また、 z 方向の応力成分の合応力 P_z は次のように求められる。

$$P_z = \int (-\tau_{xz} dy + \tau_{yz} dx) = -\phi(x, y). \quad \dots\dots(9)$$

したがって、式(6)と組み合わせると次のようになる。

$$Gu_z - iP_z = \psi(z). \quad \dots\dots(10)$$

2・1・1 等方性半無限弾性体の基本解 図1のような座標系を設定するものとする。この等方性半無限弾性体の内部に面外の集中力、らせん転位、その他の特異荷重が作用(存在)し、表面の直線境界 Γ が(I), (II)の境界条件の場合を考えることとする。

(I) 自由表面境界 ($\tau_{yz}^0 = 0$) at $y = 0$.

(II) 固定表面境界 ($u_{z,x}^0 = 0$) at $y = 0$.

境界条件(I), (II)に示される $\tau_{yz}^0, u_{z,x}^0$ は図1のようにそれぞれ $y = 0$ の位置(直線境界 Γ 上)におけるせん断応力 τ_{yz} , 変位勾配 $u_{z,x}$ である。境界条件(II)は面外方向の変位 u_z が直線境界 Γ 上で変化のないことを示す。等方性半無限弾性体の直線境界 Γ を超えて、 $y < 0$ の半平面に解析接続される関数 $\psi_-(z)$ は前述した(I), (II)の各境界条件に対して次のように定義される。なお、 $\psi_+(z)$ は $y > 0$ の半平面で定義される関数である。

$$\psi_-(z) = \kappa_0 \overline{\psi_+(z)} + f^0(x). \quad \dots\dots(11)$$

ただし、関数 $f^0(x)$ は次式で示される。

$$f^0(x) = \frac{1-\kappa_0}{2} Gu_x^0 + i \frac{1+\kappa_0}{2} P_z^0. \quad \dots\dots(12)$$

ここに、実係数 κ_0 は

$$\kappa_0 = \begin{cases} 1: \text{自由表面, } P_z^0 = -\operatorname{Im}[f^0(x)] \\ -1: \text{固定表面, } Gu_x^0 = \operatorname{Re}[f^0(x)] \end{cases}. \quad \dots\dots(13)$$

したがって、直線境界 Γ の各境界条件を満足する等方

Fig.1 Semi-finite elastic body for the single force, dipole-force and screw dislocation acting at inside region.

性半無限弾性体の複素関数 $\psi(z)$ は次式で与えられる。

$$\psi(z) = \psi_+(z) + \psi_-(z). \quad \dots\dots(14)$$

図1に示すように等方性半無限弾性体の領域内部に任意の位置 $z_0 (= x_0 + iy_0)$ に集中力 Z , 軸の傾き角 γ の集中力対 Z^* が作用し、食違い位置の角 α のらせん転位 $[u_z]$ が存在する場合の $y > 0$ の半平面で定義される関数 $\psi_+(z)$ は次式で与えられる。

$$\psi_+(z) = M_1 \ln(z - z_0) - \frac{M_1^* e^{i\gamma}}{z - z_0} + M_2 e^{i\alpha} \{\ln(z - z_0) - i\alpha\}. \quad \dots\dots(15)$$

ここに、複素係数 M_1, M_1^*, M_2 は次式で示される。

$$M_1 = \frac{-Z}{2\pi}, M_1^* = \frac{-Z^*}{2\pi}, M_2 = \frac{-iG[u_z]}{2\pi}. \quad \dots\dots(16)$$

2・1・2 境界条件の設定 解析接続される関数 $\psi_-(z)$ は式(11), (15)より次のように求められる。

$$\psi_-(z) = \kappa_0 \overline{M_1} \ln(\overline{z - z_0}) - \kappa_0 \frac{\overline{M_1^*} e^{-i\gamma}}{\overline{z - z_0}} + \kappa_0 \overline{M_2} e^{-i\alpha} \{\ln(\overline{z - z_0}) + i\alpha\} + f^0(x). \quad \dots\dots(17)$$

したがって、式(15), (17)により直線境界 Γ が自由表面または固定表面の境界条件を満足する等方性半無限弾性体の複素関数 $\psi(z)$ は次式で得られる。

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \psi_+(z) + \psi_-(z) \\ &= M_1 \ln(z - z_0) + \kappa_0 \overline{M_1} \ln(\overline{z - z_0}) \\ &\quad - \frac{M_1^* e^{i\gamma}}{z - z_0} - \kappa_0 \frac{\overline{M_1^*} e^{-i\gamma}}{\overline{z - z_0}} \\ &\quad + M_2 e^{i\alpha} \{\ln(z - z_0) - i\alpha\} \\ &\quad + \kappa_0 \overline{M_2} e^{-i\alpha} \{\ln(\overline{z - z_0}) + i\alpha\} + f^0(x). \end{aligned} \quad \dots\dots(18)$$

応力 τ_{xz}, τ_{yz} は式(8), (18)より次式となる。

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \operatorname{Re} \left[\frac{M_1}{z - z_0} + \kappa_0 \frac{\overline{M_1}}{z - z_0} + \frac{M_1^* e^{i\gamma}}{(z - z_0)^2} + \kappa_0 \frac{\overline{M_1^*} e^{-i\gamma}}{(\overline{z - z_0})^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{M_2 e^{i\alpha}}{z - z_0} + \kappa_0 \frac{\overline{M_2} e^{-i\alpha}}{z - z_0} + \frac{df^0(x)}{dx} \right], \\ \tau_{yz} &= -\operatorname{Im} \left[\frac{M_1}{z - z_0} + \kappa_0 \frac{\overline{M_1}}{z - z_0} + \frac{M_1^* e^{i\gamma}}{(z - z_0)^2} + \kappa_0 \frac{\overline{M_1^*} e^{-i\gamma}}{(\overline{z - z_0})^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{M_2 e^{i\alpha}}{z - z_0} + \kappa_0 \frac{\overline{M_2} e^{-i\alpha}}{z - z_0} + \frac{df^0(x)}{dx} \right]. \end{aligned} \quad \dots\dots(19)$$

変位 u_z は式(7), (18)より次式となる。

$$Gu_z = \operatorname{Re} \left\{ M_1 \ln(z - z_0) + \kappa_0 \overline{M_1} \ln(\overline{z} - \overline{z_0}) - \frac{M_1^* e^{i\gamma}}{z - z_0} - \frac{\overline{M_1^*} e^{-i\gamma}}{\overline{z} - \overline{z_0}} + M_2 e^{i\alpha} \{ \ln(z - z_0) - i\alpha \} + \kappa_0 \overline{M_2} e^{-i\alpha} \{ \ln(\overline{z} - \overline{z_0}) + i\alpha \} + f^0(x) \right\} \quad \dots (20)$$

$$Gu_{z,x} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{M_1}{z - z_0} + \kappa_0 \frac{\overline{M_1}}{\overline{z} - \overline{z_0}} + \frac{M_1^* e^{i\gamma}}{(z - z_0)^2} + \kappa_0 \frac{\overline{M_1^*} e^{-i\gamma}}{(\overline{z} - \overline{z_0})^2} + \frac{M_2 e^{i\alpha}}{z - z_0} + \kappa_0 \frac{\overline{M_2} e^{-i\alpha}}{\overline{z} - \overline{z_0}} + \frac{df^0(x)}{dx} \right\} \quad \dots (21)$$

合応力 P_z は式(10), (18)より次式で得られる。

$$P_z = -\operatorname{Im} \left\{ M_1 \ln(z - z_0) + \kappa_0 \overline{M_1} \ln(\overline{z} - \overline{z_0}) - \frac{M_1^* e^{i\gamma}}{z - z_0} - \frac{\overline{M_1^*} e^{-i\gamma}}{\overline{z} - \overline{z_0}} + M_2 e^{i\alpha} \{ \ln(z - z_0) - i\alpha \} + \kappa_0 \overline{M_2} e^{-i\alpha} \{ \ln(\overline{z} - \overline{z_0}) + i\alpha \} + f^0(x) \right\} \quad \dots (22)$$

2.2 異方性半無限弾性体の応力、変位および合応力

を求める公式 異方性弾性体の弾性主軸は xy 平面内のみに傾斜した二次元異方性弾性体の場合を考える。このとき、釣合方程式は等方性弾性体と同様で式(1)、構成式・幾何式は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_z}{\partial y} = a_{44} \tau_{yz} + a_{45} \tau_{xz}, \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} = a_{45} \tau_{yz} + a_{55} \tau_{xz}. \end{aligned} \right\} \quad \dots (23)$$

ここに、 a_{44}, a_{45}, a_{55} は z 方向に関連した弾性コンプライアンスである。直交異方性弾性体で弾性主軸と座標軸が一致しているような場合の弾性コンプライアンス $a_{ij} (i, j = 4, 5)$ は次のように表される。

$$a_{44} = \frac{1}{G_{13}}, a_{55} = \frac{1}{G_{23}}, a_{45} = 0. \quad \dots (24)$$

ここに、 G_{13} および G_{23} はせん断弾性係数である。

ここで、等方性弾性体の場合と同様に式(1)を満足する応力関数 $\phi(x, y)$ を式(3)のように定義する。式(23)から得られる適合条件によって、 $\phi(x, y)$ は式(25)を満

足しなければならない。

$$a_{44} \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} - 2a_{45} \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x \partial y} + a_{55} \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2} = 0. \quad \dots (25)$$

式(25)の解は複素関数 $\Phi_k(z_k) (k = 1, 2)$ を用いて次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \phi(x, y) &= 2 \operatorname{Re} [\Phi_1(z_1)] = \Phi_1(z_1) + \overline{\Phi_1(z_1)} \\ &= \Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2) = \sum_{k=1}^2 \Phi_k(z_k). \end{aligned} \right\} \quad \dots (26)$$

ここに、複素変数 $z_k (k = 1, 2)$ は

$$z_k = x + \mu_k y. \quad \dots (27)$$

であり、 $\mu_k (k = 1, 2)$ は次の特性方程式の複素根として求められる。

$$a_{55} \mu^2 - 2a_{45} \mu + a_{44} = 0. \quad \dots (28)$$

これを解けば、 $\mu_1, \mu_2 (= \overline{\mu_1})$ は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 \\ \mu_2 \end{aligned} \right\} = \frac{1}{a_{55}} \left(a_{45} \pm i \sqrt{a_{44} a_{55} - a_{45}^2} \right). \quad \dots (29)$$

したがって、応力成分は式(3)を用いると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} = \sum_{k=1}^2 \mu_k \Phi_k'(z_k), \\ \tau_{yz} &= -\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} = -\sum_{k=1}^2 \Phi_k'(z_k). \end{aligned} \right\} \quad \dots (30)$$

ここに、 $'$ は z_k に関する微分である。

また変位 u_z は式(23), (26)より次式で示される。

$$u_z = \sum_{k=1}^2 \lambda_k \Phi_k(z_k). \quad \dots (31)$$

ここに、複素係数 λ_k は次式で与えられる。

$$\lambda_k = a_{45} - \frac{a_{44}}{\mu_k}. \quad \dots (32)$$

また、合応力 P_z は異方性弾性体においても等方性弾性体のものと同一の定義で得られるので、式(9)により次のように求められる。

$$P_z = -\phi(x, y) = -\sum_{k=1}^2 \Phi_k(z_k). \quad \dots (33)$$

2.2.1 異方性半無限弾性体の基本解 図1のような座標系を設定するものとする。この異方性半無限弾性体の内部に集中力、らせん転位、その他の特

異荷重が作用(存在)し、表面の直線境界 Γ が(I), (II)の境界条件の場合を考えることとする。境界条件(I), (II)に示される $\tau_{yz}^0, u_{z,x}^0$ は図1のようにそれぞれ $y=0$ の位置(直線境界 Γ 上)におけるせん断応力 τ_{yz} 、変位勾配 $u_{z,x}$ である。異方性半無限弾性体の領域内部に集中力、転位などの特異荷重(擾乱)が作用(存在)する場合の複素関数 $\phi(x, y)$ は前報²⁾との類似により、最終的に次式で与えられる。

$$\phi(x, y) = \sum_{k=1}^2 \left\{ A_k \Phi_{kk}(z_{kk}) + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^2 B_{ks} \Phi_{ks}(z_{ks}) \right\} + f^0(x) \cdots (34)$$

ここに、複素関数 $\Phi_{kk}(z_{kk}), \Phi_{ks}(z_{ks})$ は前節で求められた種々の関数であり、複素変数 z_{ks} は次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} z_{ks} &= (x + \mu_k y) - (x_0 + \mu_s y_0) = z_k - z_{0s}, \\ z_{0s} &= x_0 + \mu_s y_0 = \frac{1 - i\mu_s}{2} z_0 + \frac{1 + i\mu_s}{2} \bar{z}_0. \end{aligned} \right\} \cdots (35)$$

ここに、 $z_0 = x_0 + iy_0$ は図1に示すように集中力、らせん転位などの特異荷重(擾乱)が作用(存在)する物理平面上の点の位置を表す複素数である。また、 A_k は位置 z_0 に作用(存在)する特異荷重(擾乱)によって決定される複素係数で、最終的に式(36)の連立一次方程式を解くことで得られる。

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2\pi i} \begin{bmatrix} Z \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2\pi i} \begin{bmatrix} Z^* \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2\pi i} \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_z \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\} \cdots (36)$$

B_{ks} は直線境界 Γ の境界条件によって決定される複素係数である。なお、式(34)の s に関する総和は次のようにとるものとする。

$$\left. \begin{aligned} k=1 \text{ のとき } s=2, \\ k=2 \text{ のとき } s=1. \end{aligned} \right\} \cdots (37)$$

また、関数 $f^0(x)$ は直線境界 Γ で与えられる任意の関数である。

応力 τ_{xz}, τ_{yz} は式(30), (34)より次式で得られる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= \sum_{k=1}^2 \left\{ \mu_k A_k \Phi'_{kk}(z_{kk}) + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^2 \mu_k B_{ks} \Phi'_{ks}(z_{ks}) \right\}, \\ \tau_{yz} &= - \sum_{k=1}^2 \left\{ A_k \Phi'_{kk}(z_{kk}) + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^2 B_{ks} \Phi'_{ks}(z_{ks}) \right\} \frac{df^0(x)}{dx}. \end{aligned} \right\} \cdots (38)$$

変位 u_z および変位勾配 $u_{z,x}$ は式(31), (34)より式で得られる。

$$u_z = \sum_{k=1}^2 \left\{ \lambda_k A_k \Phi_{kk}(z_{kk}) + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^2 \lambda_k B_{ks} \Phi_{ks}(z_{ks}) \right\} + f^0(x) \cdots (39)$$

$$u_{z,x} = \sum_{k=1}^2 \left\{ \lambda_k A_k \Phi'_{kk}(z_{kk}) + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^2 \lambda_k B_{ks} \Phi'_{ks}(z_{ks}) \right\} + \frac{df^0(x)}{dx} \cdots (40)$$

合応力 P_z は式(33), (34)より次式で得られる。

$$P_z = - \sum_{k=1}^2 \left\{ A_k \Phi'_{kk}(z_{kk}) + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^2 B_{ks} \Phi'_{ks}(z_{ks}) \right\} - f^0(x) \cdots (41)$$

複素係数 B_{ks} は各境界条件に対して次のように定められる。

(I) 直線境界 Γ が自由表面の場合 境界条件および式(37)より次式となる。

$$\tau_{yz}^0 = - \sum_{k=1}^2 \left\{ A_k \Phi'_{kk}(z_{kk}) + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^2 B_{ks} \Phi'_{ks}(z_{ks}) \right\} = 0 \cdots (42)$$

上式を解いて次の結果が得られる。

$$B_{ks} = -A_s \cdots (43)$$

(II) 直線境界 Γ が固定表面の場合 境界条件および式(38)より次式となる。

$$u_z^0 = \sum_{k=1}^2 \left\{ \lambda_k A_k \Phi_{kk}(z_{kk}) + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^2 \lambda_k B_{ks} \Phi_{ks}(z_{ks}) \right\} = 0 \cdots (44)$$

上式を解いて次の結果が得られる。

$$B_{ks} = -\frac{\lambda_s}{\lambda_k} A_s \cdots (45)$$

3. 数値計算例

3-1 集中力 Z が作用する場合の計算例 点 $z_0 (= x_0 + iy_0)$ (ここでは、 $x_0 = 0.0, y_0 = 10.0$)の位置に単位集中力 Z が作用した場合の各境界条件に対する数値計算例を示す。ただし、式(12)および(34)の関数 $f^0(x)$ が恒等的に零、したがって、 $u_z^0 = 0, \tau_{yz}^0 = 0$ であるとした。また、異方性弾性係数比 $e' (= G_{23}/G_{13})$ を0.1, 0.2, 0.5, 1.0とし、せん断弾性係数 G_{13} を0.4GPaとした。

図2(a), (b)には $y/y_0 = 0.0, 0.5$ の位置での変位

u_z の分布を示した。ただし、自由表面の場合には剛体変位を含んだ変位が計算されるので、 y 軸上の十分遠方($x/y_0 = 0.0$, $y/y_0 = 10^{12}$ の位置)の u_z が零となるように設定した⁽¹⁾。これらの図より、 u_z は y 軸に対して対称で、異方性弾性係数比 e' が小さいほど、つまり、 G_{13} に比べて G_{23} が小さいほど u_z が大きいことがわかる。図 3(a), (b)においては $y/y_0 = 0.0, 0.5$ の位置の応力 τ_{yz} の分布を示した。これらの図より、 τ_{yz} も y 軸に対して対称で、異方性弾性係数比 e' が小さいほど $y/y_0 = 0.0$ 近傍の τ_{yz} は相対的にマイナス側の値に近づく傾向が見られる。

(a) Distribution of displacement u_z at $y/y_0 = 0.0$ on straight boundary Γ .

(b) Distribution of displacement u_z at $y/y_0 = 0.5$.

Fig.2 Distribution of displacement u_z under applied single force.

(a) Stress τ_{yz} distribution at $y/y_0 = 0.0$ on straight boundary Γ .

(b) Stress τ_{yz} distribution at $y/y_0 = 0.5$.

Fig.3 Stress τ_{yz} distribution under applied single force.

(a) Contour of displacement u_z in the case of $e' = 1.0$ under free boundary condition.

(b) Contour of displacement u_z in the case of $e' = 1.0$ under fixed boundary condition.

Fig.4 Contour of displacement u_z under applied screw dislocation. Fig.5 Contour of stress τ_{max} under applied screw dislocation.

が小さいほど、つまり、 G_{13} に比べて G_{23} が小さいほど u_z の絶対値が小さいことがわかる。また、自由境界条件において、直線境界 Γ 付近では x 軸方向に u_z が変化するのに対し、固定境界条件では y 軸方向に変化が見られる。

図 5(a), (b) に等最大せん断応力線図を示す。これらの図より、 τ_{max} は y 軸に対して対称となることがわかる。図からはわかりにくいですが、異方性弾性係数 e' が小さいほど τ_{max} の値は小さくなる。自由境界条件において、直線境界 Γ 付近で x 軸方向に τ_{max} の値が減少するのに対し、固定境界条件においては、 y 軸方向に減少していることがわかる。

4 結 言

本論文では、二次元の等方性・異方性半無限弾性体の内部に面外の集中力、集中力対、転位の特異荷重や擾乱が作用(存在)する場合に、表面が自由表面、固定表面の二つの境界条件に対する解析解の誘導を統一的行ったものである。また、数値例によって得られたこれらの境界条件間の差異および異方性弾性係数比の影響

などを以下に示す。

集中力に関して

1. 異方性弾性係数比が小さいと境界条件の差異に関わらず、変位量は大きくなる。
2. 応力値は固定境界条件の場合において、異方性弾性係数比が小さいと小さくなる。

らせん転位に関して

1. 境界条件の差異に関わらず、異方性弾性係数比が小さいと変位量は小さくなる。変位の分布に及ぼす影響は小さい。
2. 応力分布は境界条件の差異および異方性弾性係数比の影響を大きく受ける。

文 献

- (1) 田中・平島・広瀬・MURA, 機論, 58-549, A (1992), 745.
- (2) 田中・平島・JEDIDI・広瀬, 機論, 58-553, A (1992), 1662.
- (3) Johnson, K. L., *Contact Mechanics*, (1985), 42, Cambridge University Press.
- (4) 玉手, 弾性体の変形, (1971), 260, コロナ社.
- (5) Chou, Y. T., *Scripta Met*, 9 (1971), 1243.