異種材料接合界面に平行に存在するだ円形き裂の
引張りにおける応力拡大係数の解析*野田 尚昭^{*1}, 大園 瑠里^{*2}, 陳 夢 成^{*3}Analysis of an Elliptical Crack Parallel to a Bimaterial Interface
under TensionNao-Aki NODA^{**}, Ruri OHZONO and Mengcheng CHEN^{**} Department of Mechanical Engineering, Kyushu Institute of Technology,
1-1 Sensui-cho, Tobata-ku, Kitakyushu-shi, Fukuoka, 804-8550 Japan

In this paper an elliptical crack parallel to a bimaterial interface is considered. The solution utilizes the body force method and requires Green's functions for perfectly bonded semi-infinite bodies. The formulation leads to a system of hypersingular integral equations whose unknowns are three modes of crack opening displacements. In the numerical calculation, unknown body force densities are approximated by using fundamental density functions and polynomials. The results show that the present method yields smooth variations of stress intensity factors along the crack front accurately. Distributions of stress intensity factors are indicated in tables and figures with varying the shape of crack, distance from the interface, and elastic constants. It is found that the stress intensity factors are mainly controlled by the root area parameter almost independent of the crack shape.

Key Words: Elasticity, Stress Intensity Factor, Body Force Method, Elliptical Crack, Singular Integral Equation, Numerical Analysis, Fundamental Density Function

1. 緒 言

最近, 構造物の高機能化などを狙いとして材料の複合化, 接合化などの技術が進んでいる. それらの材料の普及及び使用分野の拡大に伴い, 異種接合材, 複合材の界面の強度評価が大きな問題となっている. 線形破壊力学の確立とともに, 異種材料接合界面近傍のき裂の応力拡大係数に関してもこれまで多くの資料が得られているが, その多くは Erdogan ら⁽¹⁾⁽²⁾ 及び 石田・野口⁽³⁾ に代表される 2 次元問題の解析に限定されており, 3 次元問題に関しては円板状き裂に関する Willis⁽⁴⁾, Erdogan ら⁽⁵⁾ 及び Kassir ら⁽⁶⁾ の解析や, Lee-Farris-Keer の異種接合界面に対して傾いたき裂の解析⁽⁷⁾, 界面き裂に関する Shibuya ら⁽⁸⁾ Nakamura⁽⁹⁾ の解析, そして 結城⁽¹⁰⁾ の境界要素法の解析のようにいくつか研究はあるものの, 利用できる解析は比較的少ない.

そこで, 本研究では, まず異種材料接合界面に平行なき裂の 3 次元問題 (図 1) を取り扱う. 図 1 で $a/b \rightarrow \infty$ に相当する 2 次元問題については 石田・野口⁽³⁾ らによって求められているが, 3 次元問題は特に複雑であるためそのような研究は見当たらない. 陳・野田・湯⁽¹¹⁾ は界面に平行な 3 次元き裂問題を体積力法の特異積分方程式で定式化しているが, 数値解析結果は示されていない.

本研究では数値解析法として, 特異積分方程式の未知関数を基本密度関数と多項式の積で近似する方法を用いる⁽¹²⁾. この方法によれば, これまで行なってきた研究と同様にき裂先端の滑らかな応力拡大係数の分布とき裂面全体での高い境界条件の満足度が得られると予想される. また, 材料の弾性定数の組み合わせ並びに界面からの距離を変化させることに伴っての影響を高精度に解析できる. すなわち事実上問題となる 3 次元き裂を対象として界面からの距離, き裂の形状比, 及び材料の剛性比, ポアソン比を変化させてそれらのパラメータがき裂の応力拡大係数に及ぼす影響を検討する.

Fig.1 An elliptical crack parallel to a bimaterial interface ($x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1, z = h$).

* 原稿受付 2001 年 11 月 14 日.

^{*1} 正員, 九州工業大学工学部 (〒804-8550 北九州市戸畑区仙水町 1-1).^{*2} 九州工業大学大学院工学研究科.^{*3} 華北交通大学工学部 (中国江西省南昌市).

E-mail: noda@mech.kyutech.ac.jp

2. 体積力法の特異積分方程式

図1に示すように、異材無限板中の異材界面に平行なだ円き裂に遠方で引張り方向に力をかけた場合についての応力拡大係数の解析を行なう。材料1の方に界面に平行な、だ円形 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ き裂が存在するものとする。このとき体積力法の考え方によれば、問題はき裂の存在しない無限体中においてき裂となるべき仮想境界上に分布された z 方向の引張の標準型体積力対の密度 $f_{zz}(\xi, \eta)$ 、 yz 方向のせん断の標準型体積力対の密度 $f_{yz}(\xi, \eta)$ 、 zx 方向のせん断の標準型体積力対の密度 $f_{zx}(\xi, \eta)$ を未知関数とする以下の特異積分で表現される。ここで (ξ, η, ζ) は着力点の (x, y, z) 座標である。また ν_1, ν_2 はポアソン比である。

$$\left. \begin{aligned} & \frac{(1-2\nu_1)}{8\pi(1-\nu_1)^2} \left[\iint_S \frac{f_{zz}(\xi, \eta)}{r^3} d\xi d\eta \right. \\ & \quad \left. + \iint_S \frac{1}{4} K_{zz}'(\xi, \eta, x, y) f_{zz}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right] \\ & + \frac{1}{8\pi(1-\nu_1)} \left[\iint_S \frac{1}{2} K_{yz}'(\xi, \eta, x, y) f_{yz}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right. \\ & \quad \left. + \iint_S \frac{1}{2} K_{zx}'(\xi, \eta, x, y) f_{zx}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right] = -\sigma_z^* \end{aligned} \right\} \dots (1 \cdot a)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{8\pi(1-\nu_1)} \left[\iint_S \left\{ \frac{2(1-2\nu_1)}{r^3} + \frac{6\nu_1(y-\eta)^2}{r^5} \right\} f_{yz}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right. \\ & \quad + \iint_S \frac{6\nu_1(x-\xi)(y-\eta)}{r^5} f_{zx}(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ & \quad + \iint_S \frac{(1-2\nu_1)}{4(1-\nu_1)} K_{yz}'(\xi, \eta, x, y) f_{yz}(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ & \quad + \iint_S \frac{1}{2} K_{yz}'(\xi, \eta, x, y) f_{yz}(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ & \quad \left. + \iint_S \frac{1}{2} K_{zx}'(\xi, \eta, x, y) f_{zx}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right] = 0 \end{aligned} \right\} \dots (1 \cdot b)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{8\pi(1-\nu_1)} \left[\iint_S \frac{6\nu_1(x-\xi)(y-\eta)}{r^5} f_{yz}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right. \\ & \quad + \iint_S \left\{ \frac{2(1-2\nu_1)}{r^3} + \frac{6\nu_1(x-\xi)^2}{r^5} \right\} f_{zx}(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ & \quad + \iint_S \frac{(1-2\nu_1)}{4(1-\nu_1)} K_{yz}'(\xi, \eta, x, y) f_{yz}(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ & \quad + \iint_S \frac{1}{2} K_{yz}'(\xi, \eta, x, y) f_{yz}(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ & \quad \left. + \iint_S \frac{1}{2} K_{zx}'(\xi, \eta, x, y) f_{zx}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right] = 0 \end{aligned} \right\} \dots (1 \cdot c)$$

$$\left. \begin{aligned} & r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \\ & S = \left\{ (\xi, \eta) \left| \left(\frac{\xi}{a} \right)^2 + \left(\frac{\eta}{b} \right)^2 \leq 1 \right. \right\} \end{aligned} \right\} \dots (1 \cdot d)$$

$$\begin{aligned} K_{zz}'(\xi, \eta, x, y) &= -2 \left\{ (\kappa_1 - 1) + (\kappa_1 + 1)(\Lambda_1 + \Lambda_2 - 2\Lambda) \right\} / R^3 \\ & \quad + 3 \left\{ 4h^2 \left\{ (\kappa_1 - 5) + 2(\kappa_1 + 1)(3\Lambda_1 - \Lambda_2) \right\} \right. \\ & \quad \left. - (x - \xi)^2 \left\{ (3 - \kappa_1) + 2(\kappa_1 + 1)(\Lambda - \Lambda_1 - \Lambda_2) \right\} \right\} / R^5 \\ & \quad + 120 \left\{ 1 - (\kappa_1 + 1)\Lambda_1 \right\} h^2 \left\{ 4h^2 + 3(x - \xi)^2 \right\} / R^7 \\ & \quad - 3360 \left\{ 1 - (\kappa_1 + 1)\Lambda_1 \right\} h^4 (x - \xi)^2 / R^9, \dots (2 \cdot a) \\ K_{yz}'(\xi, \eta, x, y) &= -3(x - \xi)(y - \eta) \\ & \quad \left\{ \left\{ (3 - \kappa_1) + 2(\kappa_1 + 1)(\Lambda - \Lambda_1 - \Lambda_2) \right\} / R^5 \right. \\ & \quad \left. - 40 \left\{ 1 - (\kappa_1 + 1)\Lambda_1 \right\} h^2 (3/R^7 - 28h^2/R^9) \right\}, \dots (2 \cdot b) \\ K_{zx}'(\xi, \eta, x, y) &= -12h(x - \xi) \left\{ (\kappa_1 + 1)(\Lambda_1 - \Lambda_2) / R^5 \right. \\ & \quad \left. - 20 \left\{ 1 - (\kappa_1 + 1)\Lambda_1 \right\} h^2 (3/R^7 - 28h^2/R^9) \right\}, \dots (2 \cdot c) \\ K_{zz}''(\xi, \eta, x, y) &= -2 \left\{ 2 - (\kappa_1 + 1)(\Lambda_1 + \Lambda_2) \right\} / R^3 \\ & \quad + 24h^2 \left\{ \left\{ (\kappa_1 + 1)(2\Lambda_1 - \Lambda_2) - 1 \right\} / R^5 \right. \\ & \quad \left. - 80 \left\{ 1 - (\kappa_1 + 1)\Lambda_1 \right\} h^2 (1/R^7 - 7h^2/R^9) \right\}, \dots (2 \cdot d) \\ K_{yz}''(\xi, \eta, x, y) &= K_{zz}' \{ x \rightarrow y, \xi \rightarrow \eta \} \dots (2 \cdot e) \\ K_{zx}''(\xi, \eta, x, y) &= K_{yz}' \{ x \leftrightarrow \xi, y \leftrightarrow \eta \} \dots (2 \cdot f) \\ K_{zz}'''(\xi, \eta, x, y) &= K_{zz}'' \{ x \rightarrow y, \xi \rightarrow \eta \} \dots (2 \cdot g) \\ K_{yz}'''(\xi, \eta, x, y) &= K_{yz}'' \{ x \leftrightarrow \xi, y \leftrightarrow \eta \} \dots (2 \cdot h) \\ K_{zx}'''(\xi, \eta, x, y) &= K_{zx}'' \{ x \leftrightarrow \xi, y \leftrightarrow \eta \} \dots (2 \cdot i) \end{aligned}$$

$x \rightarrow y$ は x を y で置換することを意味する。また、 $x \leftrightarrow \xi$ は x, ξ を入替ることを意味する。また、ここで、

$$\Lambda = \mu_2/(\mu_1 + \mu_2), \quad \Lambda_1 = \mu_2/(\mu_1 + \kappa_1\mu_2), \quad \Lambda_2 = \mu_2/(\mu_2 + \kappa_2\mu_1), \\ R^2 = r^2 + 4h^2, \quad \kappa_1 = 3 - 4\nu_1, \quad \kappa_2 = 3 - 4\nu_2 \dots (2 \cdot j)$$

式(1・a), (1・b), (1・c)はそれぞれ仮想き裂面上における境界条件 $\sigma_z = 1$, $\tau_{yz} = 0$, $\tau_{zx} = 0$ に相当する。右辺の $1/r^3, 1/r^5$ を含む項は無限体中のだ円き裂の存在を表現し、注目点 (x, y) と着力点 (ξ, η) が一致するときに特異性を示す特異項であり、 $\iint_S$ は発散積分の有限部分を表わす。左辺の $K_{zz}'(\xi, \eta, x, y)$ 等は自由表面の境界条件を満足させる関数であり、文献(11)にも示されているが、式(2・b)と(2・c)の一部にミスプリントがあるので訂正したものを示した。領域 S はき裂のない無限体中に想定しただ円形き裂となるべき仮想き裂面を表わしている。

3. 特異積分方程式の数値解析法

従来用いられていた未知関数を階段関数で近似する方法では本来滑らかで連続な関数として分布してるはずの体積力対密度 $f_{zz}(\xi, \eta)$, $f_{yz}(\xi, \eta)$, $f_{zx}(\xi, \eta)$ が不連続な関数として近似されているため応力拡大係数を求める際に外挿しなければならないことや、応力拡大係数の滑らかな分布

を求めることが難しい等の問題があった。そこで、体積力対密度 $f_z(\xi, \eta)$, $f_{yz}(\xi, \eta)$, $f_{zx}(\xi, \eta)$ を以下のように近似する。

$$\left. \begin{aligned} f_{zz}(\xi, \eta) &= F_{zz}(\xi_a, \eta_b) w_{zz}(\xi_a, \eta_b) \\ f_{yz}(\xi, \eta) &= F_{yz}(\xi_a, \eta_b) w_{yz}(\xi_a, \eta_b) \\ f_{zx}(\xi, \eta) &= F_{zx}(\xi_a, \eta_b) w_{zx}(\xi_a, \eta_b) \\ w_{zz}(\xi_a, \eta_b) &= \frac{4(1-\nu)^2 b \sigma_z^\infty}{(1-2\nu)E(k)} \sqrt{1-\xi_a^2-\eta_b^2} \\ w_{yz}(\xi_a, \eta_b) &= \frac{2b(1-\nu)k^2 \tau_{yz}^\infty}{C(k)} \sqrt{1-\xi_a^2-\eta_b^2} \\ w_{zx}(\xi_a, \eta_b) &= \frac{2b(1-\nu)k^2 \tau_{zx}^\infty}{B(k)} \sqrt{1-\xi_a^2-\eta_b^2} \\ B(k) &= (k^2 - \nu)E(k) + \nu k'^2 K(k) \\ C(k) &= (k^2 + \nu k'^2)E(k) - \nu k'^2 K(k) \\ k' &= b/a \leq 1 \quad k = \sqrt{1-(b/a)^2} \quad \xi_a = \xi/a \quad \eta_b = \eta/b \\ K(k) &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\lambda}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \lambda}} \\ E(k) &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \lambda} d\lambda \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

ここで $w_{zz}(\xi_a, \eta_b)$, $w_{yz}(\xi_a, \eta_b)$, $w_{zx}(\xi_a, \eta_b)$ は基本密度関数と呼ばれるもので無限体中の xy 平面上にあるだ円き裂の遠方で、それぞれ σ_z^∞ , τ_{yz}^∞ , τ_{zx}^∞ が作用したときの、だ円き裂の応力場を厳密に表現する体積力密度に相当する (実際の数値計算では $\sigma_z^\infty = \tau_{yz}^\infty = \tau_{zx}^\infty = 1$ とおく)。式(3)のような表現を用いれば例えば式(1.a)は基本密度にかける重み関数 $F_{zz}(\xi_a, \eta_b)$, $F_{yz}(\xi_a, \eta_b)$, $F_{zx}(\xi_a, \eta_b)$ を未知関数とす式(4)で表現される。

$$\left. \begin{aligned} &\frac{b}{2\pi E(k)} \left[\iint_S \frac{F_{zz}(\xi_a, \eta_b)}{r^3} \sqrt{1-\xi_a^2-\eta_b^2} d\xi d\eta \right. \\ &+ \left. \iint_S \frac{1}{4} K_{zz}^f(\xi, \eta, x, y) F_{zz}(\xi_a, \eta_b) \sqrt{1-\xi_a^2-\eta_b^2} d\xi d\eta \right] \\ &+ \frac{bk^2}{8\pi} \left[\frac{1}{C(k)} \iint_S K_{yz}^f(\xi, \eta, x, y) F_{yz}(\xi_a, \eta_b) \sqrt{1-\xi_a^2-\eta_b^2} d\xi d\eta \right. \\ &+ \left. \frac{1}{B(k)} \iint_S K_{zx}^f(\xi, \eta, x, y) F_{zx}(\xi_a, \eta_b) \sqrt{1-\xi_a^2-\eta_b^2} d\xi d\eta \right] = -\sigma_z^\infty \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

ここで重み関数 $F_{zz}(\xi_a, \eta_b)$, $F_{yz}(\xi_a, \eta_b)$, $F_{zx}(\xi_a, \eta_b)$ としては問題の対称性ならびに、なるべく少ない項数で多様な関数形を表現できることを考慮した多項式を用いる。具体的には式(5)のように z 方向引張り型体積力対のと表現を採用し、 zx 方向せん断型体積力対のときの重み関数 $F_{zz}(\xi_a, \eta_b)$ は γ_i を係数とする ξ_a の奇数乗と η_b の偶数乗の組み合わせによる多項式の表現を採用した。すなわち $F_{zz}(\xi_a, \eta_b)$, $F_{yz}(\xi_a, \eta_b)$, $F_{zx}(\xi_a, \eta_b)$ は以下のように表される。

$$\left. \begin{aligned} F_{zz}(\xi_a, \eta_b) &= \alpha_0 \xi_a^0 \eta_b^0 + \alpha_1 \xi_a^0 \eta_b^2 + \dots + \alpha_{n-1} \xi_a^0 \eta_b^{2(n-1)} + \alpha_n \xi_a^0 \eta_b^{2n} \\ &+ \alpha_{n+1} \xi_a^2 \eta_b^0 + \alpha_{n+2} \xi_a^2 \eta_b^2 + \dots + \alpha_{2n} \xi_a^2 \eta_b^{2(n-1)} \\ &\vdots \\ &+ \alpha_l \xi_a^{2n} \eta_b^0 \\ &= \sum_{i=0}^l \alpha_i G_i(\xi_a, \eta_b) \\ F_{yz}(\xi_a, \eta_b) &= \beta_0 \xi_a^0 \eta_b^3 + \beta_1 \xi_a^0 \eta_b^5 + \dots + \beta_{n-1} \xi_a^0 \eta_b^{2n-1} + \beta_n \xi_a^0 \eta_b^{2n+1} \\ &+ \beta_{n+1} \xi_a^2 \eta_b^3 + \beta_{n+2} \xi_a^2 \eta_b^5 + \dots + \beta_{2n} \xi_a^2 \eta_b^{2n-1} \\ &\vdots \\ &+ \beta_l \xi_a^{2n} \eta_b^3 \\ &= \sum_{i=0}^l \beta_i Q_i(\xi_a, \eta_b) \\ F_{zx}(\xi_a, \eta_b) &= \gamma_0 \xi_a^1 \eta_b^0 + \gamma_1 \xi_a^1 \eta_b^2 + \dots + \gamma_{n-1} \xi_a^1 \eta_b^{2(n-1)} + \gamma_n \xi_a^1 \eta_b^{2n} \\ &+ \gamma_{n+1} \xi_a^3 \eta_b^0 + \gamma_{n+2} \xi_a^3 \eta_b^2 + \dots + \gamma_{2n} \xi_a^3 \eta_b^{2(n-1)} \\ &\vdots \\ &+ \gamma_l \xi_a^{2n+1} \eta_b^0 \\ &= \sum_{i=0}^l \gamma_i R_i(\xi_a, \eta_b), \quad l = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ G_0(\xi_a, \eta_b) &= 1, G_1(\xi_a, \eta_b) = \eta_b^2, \dots \\ &\dots, G_{n+1}(\xi_a, \eta_b) = \xi_a^2, \dots, G_l(\xi_a, \eta_b) = \xi_a^{2n} \\ Q_0(\xi_a, \eta_b) &= \eta_b, Q_1(\xi_a, \eta_b) = \eta_b^3, \dots \\ &\dots, Q_{n+1}(\xi_a, \eta_b) = \xi_a^2 \eta_b, \dots, Q_l(\xi_a, \eta_b) = \xi_a^{2n} \eta_b \\ R_0(\xi_a, \eta_b) &= \xi_a, R_1(\xi_a, \eta_b) = \xi_a \eta_b^2, \dots \\ &\dots, R_{n+1}(\xi_a, \eta_b) = \xi_a^3, \dots, R_l(\xi_a, \eta_b) = \xi_a^{2n+1} \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

結局問題は重み関数 $F_{zz}(\xi_a, \eta_b)$, $F_{yz}(\xi_a, \eta_b)$, $F_{zx}(\xi_a, \eta_b)$ の $\alpha_0 \sim \alpha_l$, $\beta_0 \sim \beta_l$, $\gamma_0 \sim \gamma_l$ の $3 \cdot (l+1)$ 個の係数を未知数とする連立一次方程式(6)を解くことに帰する。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^l \left[\alpha_i (A_{zz,i}^{f_n} + B_{zz,i}^{f_n}) + \beta_i B_{yz,i}^{f_n} + \gamma_i B_{zx,i}^{f_n} \right] &= -1 \\ \sum_{i=0}^l \left[\alpha_i B_{yz,i}^{f_n} + \beta_i (A_{yz,i}^{f_n} + B_{yz,i}^{f_n}) + \gamma_i (A_{zx,i}^{f_n} + B_{zx,i}^{f_n}) \right] &= 0 \\ \sum_{i=0}^l \left[\alpha_i B_{zx,i}^{f_n} + \beta_i (A_{zx,i}^{f_n} + B_{zx,i}^{f_n}) + \gamma_i (A_{zz,i}^{f_n} + B_{zz,i}^{f_n}) \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (6 \cdot a)$$

例えば、 $A_{zz,i}^{f_n}$, $B_{zz,i}^{f_n}$, $B_{yz,i}^{f_n}$, $B_{zx,i}^{f_n}$ は以下の様に表わされる。

$$\left. \begin{aligned} A_{zz,i}^{f_n} &= \frac{b}{2\pi E(k)} \iint_S \frac{G_i(\xi_a, \eta_b)}{r^3} \sqrt{1-\xi_a^2-\eta_b^2} d\xi d\eta \\ B_{zz,i}^{f_n} &= \frac{b}{8\pi E(k)} \iint_S K_{zz}^f(\xi, \eta, x, y) G_i(\xi_a, \eta_b) \sqrt{1-\xi_a^2-\eta_b^2} d\xi d\eta \\ B_{yz,i}^{f_n} &= \frac{bk^2}{8\pi C(k)} \iint_S K_{yz}^f(\xi, \eta, x, y) Q_i(\xi_a, \eta_b) \sqrt{1-\xi_a^2-\eta_b^2} d\xi d\eta \\ B_{zx,i}^{f_n} &= \frac{bk^2}{8\pi B(k)} \iint_S K_{zx}^f(\xi, \eta, x, y) R_i(\xi_a, \eta_b) \sqrt{1-\xi_a^2-\eta_b^2} d\xi d\eta \end{aligned} \right\} \dots (6 \cdot b)$$

式(6)に含まれる積分を実行するとき B_1 の積分は特異性がないので通常の数値積分によりその値を求めることが出来る。しかし、 A_1 の積分では注目点 (x, y) と着力点 (ξ, η) が一致するとき特異性を有するため通常の数値積分によりその値を求めることが出来ない。その特異積分の計算は前報まで⁽¹²⁾と同様の方法を用いた。ここで、注目点(選点)の選び方としては図2のようにき裂前縁の位置を半径1の円に写像して幅0.1, 0.02のメッシュを x_a 軸 y_b 軸について切る。図2(a)はメッシュの幅0.1でメッシュ数が 10×10 の例である。図2(b)はメッシュの幅0.02でメッシュ数が 50×50 の例である。そして、 $x_a^2 + y_b^2 < 1$, $x_a^2 > 0$, $y_b^2 > 0$ の範囲で図2に示す格子上の点を境界条件を満足する点として選んだ。これらの選点で残留する応力が最小となるように未知係数 $\alpha_0 \sim \alpha_1$, $\beta_0 \sim \beta_1$, $\gamma_0 \sim \gamma_1$, $l = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, n は式(5)の多項式の次数) を決定する。

4. 数値計算結果と検討

4.1 応力拡大係数の無次元化表示 以上の理論に基づいて、計算プログラムを作成し、多項式の次数のパラメータ n を変化させて形状比 $a/b=1, 2, 4, 16$, ∞ ポアソン比 $\nu_1, \nu_2=0 \sim 0.5$ について数値計算を行った。式(6)の数値積分には、二重指数関数型積分公式等のサブルーチンを用いて計算した。また結果として得られた応力拡大係数 K_I, K_{II}, K_{III} をまとめるのに、以下の無次元化値 F_I, F_{II}, F_{III} を用いた。

$$\left. \begin{aligned} F_I(\beta) &= \frac{K_I(\beta)}{\sigma_z^\infty \sqrt{\pi b}} = \frac{F_{zz}}{E(k)} \left[\sin^2 \beta + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \cos^2 \beta \right]^{1/4} \\ F_{II}(\beta) &= \frac{K_{II}(\beta)}{\sigma_z^\infty \sqrt{\pi b}} = \left(F_{zx} \frac{k' \cos \beta}{B(k)} + F_{yz} \frac{\sin \beta}{C(k)} \right) \frac{k^2}{(1 - k^2 \cos^2 \beta)^{1/4}} \\ F_{III}(\beta) &= \frac{K_{III}(\beta)}{\sigma_z^\infty \sqrt{\pi b}} = \left(-F_{zx} \frac{\sin \beta}{B(k)} + F_{yz} \frac{k' \cos \beta}{C(k)} \right) \frac{(1 - \nu) k^2}{(1 - k^2 \cos^2 \beta)^{1/4}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

以下では特に $\beta = \pi/2$ の F_I, F_{II} の最大値を中心に述べる。また、村上ら⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾によって提案された $\sqrt{\text{area}}$ パラメータを用いた表示についても検討を行なった。

$$\left. \begin{aligned} F_I^* &= \frac{K_I}{\sigma_z^\infty \sqrt{\pi \sqrt{\text{area}}}} = \left(\frac{b}{\pi a} \right)^{1/4} \times F_I \\ F_{II}^* &= \frac{K_{II}}{\sigma_z^\infty \sqrt{\pi \sqrt{\text{area}}}} = \left(\frac{b}{\pi a} \right)^{1/4} \times F_{II} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ここで $\text{area} = \pi ab$, 但し $b/a \leq 0.2$ の時 $\text{area} = 20b^2$

4.2 解の収束性、選点数等の検討 形状比 $a/b=1, a/b=16$, $\nu_1, \nu_2=0.3$, $\mu_2/\mu_1=0$ のき裂について近似する式(5)の多項式の次数を変化させた時の $\beta = \pi/2$ の最大応力拡大係数 F_I, F_{II} の収束性を表1, 2に示す。表1の選点数 10×10 の場合、 $h/2b \geq 0.3$ では有効数字4桁程度収束している。 $h/2b \leq 0.3$ では特に $a/b=16$ のとき収束性が低下している。これは同じ $h/2b=0.1$ でも、 $a/b \rightarrow$ 大では界面の影響を大きく受

けることによると考えられる。表2の選点数 50×50 の場合、 $h/2b=0.1$ でも $a/b=1$ で4桁、 $a/b=16$ で3桁程度収束する。以下では、 $h/2b > 0.2$ では 10×10 の選点数を用いた。また、 $h/2b \leq 0.2$ では 50×50 の選点数を用いた。なお、式(5)の次数 n は、3桁または、4桁の収束性が得られるように選んで決めた。表3においてはき裂の形状比 $a/b=1$, ポアソン比 $\nu_1=0.3, \mu_2/\mu_1=0$ の応力拡大係数 F_I, F_{II} の値と Sahin-Erdogan⁽¹⁵⁾ の円板状き裂の解との比較を示す。 $h/2b \geq 0.1$ では有効数字4桁程度一致している。

4.3 ポアソン比の影響 次にポアソン比の影響を調べるため、形状比 $a/b=16$ と $a/b=1$ の場合に界面に比較的近い場合 ($h/2b=0.4$) を中心として表4に示す。ポアソン比の影響は複雑であり、例えば $\mu_1/\mu_2 = \infty$ では $\nu_1=0 \rightarrow 0.5$ と変化するにつれて F_I の値は $\nu_1 \approx 0.18$ で極値をとる(図3)。 $a/b=16, h/2b=0.4$ ではポアソン比の影響によって結果が最大11%程度変化する。しかし $a/b=1, h/2b=0.4$ では5%程度の変化となっており、ポアソン比を $(\nu_1, \nu_2) = (0, 0.5), (\nu_1, \nu_2) = (0.5, 0)$ のように極端に変えてもその影響は比較的小さい。よって、以下では簡単のため $\nu_1, \nu_2=0.3$ として計算する。

4.4 界面に平行な3次元き裂の応力拡大係数

表5は剛性比 $\mu_2/\mu_1=0, 0.5, 2, \infty$ で、形状比 $a/b=1, 2$,

Fig.2 Boundary collocation points.

Table 1 Convergence of the results F_I, F_{II} when $\mu_2/\mu_1=0, \beta=\pi/2, \nu_1, \nu_2=0.3$, Number of collocation points 10×10 .

a/b	h/2b	n	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	1.0	2.0
1	F_I	4	2.469	1.300	0.9867	0.8508	0.77816	0.66731	0.64142
		5	2.473	1.299	0.9868	0.8508	0.77816	0.66731	0.64142
		6	2.495	1.299	0.9868	0.8508	0.77816	0.66731	0.64142
	F_{II}	4	1.087	0.346	0.1613	0.08787	0.05196	0.00696	0.00058
		5	1.099	0.346	0.1613	0.08787	0.05196	0.00696	0.00058
		6	1.110	0.346	0.1613	0.08787	0.05196	0.00696	0.00058
16	F_I	4	5.96	2.902	2.0748	1.7085	1.5062	1.1590	1.04000
		5	5.98	2.897	2.0757	1.7090	1.5064	1.1589	1.04000
		6	6.03	2.896	2.0748	1.7087	1.5063	1.1589	1.04000
	F_{II}	4	2.98	0.993	0.4912	0.2874	0.1838	0.03624	0.00521
		5	3.01	0.990	0.4917	0.2876	0.1837	0.03623	0.00521
		6	2.99	0.992	0.4913	0.2874	0.1838	0.03623	0.00521

Table 2 Convergence of the results F_I, F_{II} when $\mu_2/\mu_1=0, \beta=\pi/2, \nu_1, \nu_2=0.3$, Number of collocation points 50×50 .

a/b	h/2b	n	0.1	0.2	h/2b	n	0.1	0.2
1	F_I	4	2.463	1.299	16	4	5.956	2.898
		5	2.463	1.299		5	5.932	2.892
		6	2.461	1.299		6	5.943	2.898
	F_{II}	4	1.105	0.3457		4	3.025	0.9902
		5	1.106	0.3457		5	3.016	0.9904
		6	1.105	0.3457		6	3.023	0.9903

4, 16, ∞ の場合に $h/2b = 0.1 \sim \infty$ として, $F_I, F_{II}, F_I^*, F_{II}^*$ の $\beta = \pi/2$ の最大値をまとめたものである。ここで, $a/b = \infty$ は先に行なった2次元問題の解析プログラム⁽¹⁶⁾によって求めた。表5にはそれぞれの μ_2/μ_1 と $h/2b$ の組み合わせにおいて $a/b=1$ の結果と $a/b=\infty$ の結果の比も $((a/b=1)/(a/b=\infty))$ として示す。 F_I の比は, 0.41 ~ 0.69 の範囲となっているのに対して F_I^* の比は $h/2b \leq 1.0, \mu_2/\mu_1 = 0$ の場合を除いては 0.97 ~ 1.10 ≈ 1 となっており形状比の影響は小さく $\sqrt{area}$ による整理が有効であるといえる。 $h/2b \leq 0.5, \mu_2/\mu_1 = 0$ では, F_{II} の値が F_I の1割以上となって無視できないのに対して, それ以外の場合には F_{II} の値は F_I の数%程度以下である。

図4は $\mu_2/\mu_1 = 0, \infty$ のとき, F_I, F_{II} と $h/2b$ の関係を示す。一方, 図5は $\mu_2/\mu_1 = 0, \infty$ のとき F_I^*, F_{II}^* と $h/2b$ の関係を示す。両者を比べると F_I^*, F_{II}^* はき裂形状に不敏感であり, 狭い範囲に整理されることがわかる。

Table 3 Results of a penny-shaped crack.

$h/2b$	F_I		F_{II}	
	Sahin-Erdogan	Present analysis	Sahin-Erdogan	Present analysis
5	0.6369	0.6369	0.0000	0.0000
2		0.6414		0.0006
1	0.6673	0.6673	0.0070	0.0070
0.5	0.7781	0.7782	0.0520	0.0520
0.4		0.8507		0.8787
0.375	0.8763	0.8766	0.1013	0.1013
0.3		0.9868		0.1613
0.25	1.1061	1.1061	0.2297	0.2297
0.2		1.2991		0.3457
0.125	1.9620	1.9611	0.7704	0.7700
0.1		2.461		1.105
0.05	5.5317	5.50	3.2759	3.24

$a/b=1, \nu_1=0.3,$
 $\mu_2/\mu_1=0.$

Table 4 Dimensionless stress intensity factors F_I, F_{II} in Fig.1.

a/b	$h/2b$	16				1	
		0.4				0.4	1.0
	μ_2/μ_1	0	0.5	2.0	∞	0.5	0.5
F_I	$\nu_1=0.0, \nu_2=0.0$	1.7090	1.0857	0.9251	0.798	0.8710	0.6429
	$\nu_1=0.5, \nu_2=0.5$	1.7092	1.1316	0.8938	0.760	0.8901	0.6465
	$\nu_1=0.0, \nu_2=0.5$	1.7090	1.0352	0.8794	0.798	0.8586	0.6415
	$\nu_1=0.5, \nu_2=0.0$	1.7092	1.1628	0.9168	0.760	0.8971	0.6472
	$\nu_1=0.3, \nu_2=0.3$	1.7090	1.1073	0.9134	0.800	0.8800	0.6446
F_{II}	$\nu_1=0.0, \nu_2=0.0$	0.288	0.0371	-0.0280	-0.084	0.0141	0.0014
	$\nu_1=0.5, \nu_2=0.5$	0.287	0.0530	-0.0362	-0.082	0.0214	0.0022
	$\nu_1=0.0, \nu_2=0.5$	0.288	0.0119	-0.0509	-0.084	0.0104	0.0011
	$\nu_1=0.5, \nu_2=0.0$	0.287	0.0683	-0.0247	-0.082	0.0249	0.0024
	$\nu_1=0.3, \nu_2=0.3$	0.287	0.0446	-0.0308	-0.075	0.0176	0.0018

Fig.3 Effect of Poisson's ratio when $a/b=16, h/2b=0.4, \mu_2/\mu_1=\infty$. Fig.4 Variation of F_I, F_{II} in Fig.1 when (a) $\mu_2/\mu_1=0$, (b) $\mu_2/\mu_1=\infty$ with $\nu_1, \nu_2=0.3$. Fig.5 Variation of F_I^*, F_{II}^* in Fig.1 when (a) $\mu_2/\mu_1=0$, (b) $\mu_2/\mu_1=\infty$ with $\nu_1, \nu_2=0.3$.

Table 5 Dimensionless stress intensity factors $F_I, F_{II}, F_I^*, F_{II}^*$ at $\beta = \pi/2$ when $\nu_1, \nu_2 = 0.3$ in Fig.1.

h/2b	a/b	F_I				F_I^*				F_{II}				F_{II}^*			
		$\mu/\mu_1=0$	$\mu/\mu_1=0.5$	$\mu/\mu_1=2.0$	$\mu/\mu_1=\infty$	$\mu/\mu_1=0$	$\mu/\mu_1=0.5$	$\mu/\mu_1=2.0$	$\mu/\mu_1=\infty$	$\mu/\mu_1=0$	$\mu/\mu_1=0.5$	$\mu/\mu_1=2.0$	$\mu/\mu_1=\infty$	$\mu/\mu_1=0$	$\mu/\mu_1=0.5$	$\mu/\mu_1=2.0$	$\mu/\mu_1=\infty$
0.1	1	2.461	0.7397	0.5699	0.4779	1.8485	0.5556	0.4281	0.3590	1.105	0.0520	-0.0344	-0.0847	0.8300	0.0391	-0.0258	-0.0636
	2	4.830	0.9756	0.7295	0.5975	3.0507	0.6132	0.4608	0.3774	2.378	0.0735	-0.0485	-0.1190	1.5020	0.0464	-0.0306	-0.0752
	4	5.692	1.1041	0.8221	0.6694	3.0232	0.5864	0.4366	0.3555	2.784	0.0855	-0.0855	-0.1397	1.5265	0.0454	-0.0302	-0.0742
	16	5.943	1.175	0.875	0.7122	2.8103	0.5556	0.4138	0.3368	3.02	0.092	-0.0616	-0.152	1.4281	0.0435	-0.0291	-0.0719
0.2	$-\infty$	5.95	1.183	0.882	0.717	2.8136	0.5594	0.4171	0.3390	3.03	0.093	-0.0622	-0.153	1.5619	0.0440	-0.0293	-0.0723
	1	0.4136	0.6253	0.8461	0.6665	0.6570	0.9932	1.0263	1.0590	0.3345	0.5591	0.5548	0.5536	0.5314	0.8886	0.8805	0.8797
	2	1.2991	0.7160	0.5637	0.5105	0.9758	0.5378	0.4384	0.3834	0.3457	0.0378	-0.0250	-0.0674	0.2597	0.0284	-0.0188	-0.0456
	4	2.3369	0.9554	0.7424	0.6299	1.4760	0.6034	0.4689	0.3979	0.7456	0.0577	-0.0367	-0.0882	0.4709	0.0364	-0.0232	-0.0557
0.3	1	2.7735	1.0829	0.8355	0.7033	1.4731	0.5752	0.4438	0.3735	0.9327	0.0678	-0.0434	-0.1048	0.4954	0.0360	-0.0230	-0.0557
	2	2.898	1.152	0.890	0.749	1.3704	0.5447	0.4209	0.3542	0.9903	0.0731	-0.0473	-0.1150	0.4683	0.0346	-0.0224	-0.0544
	4	2.9052	1.1594	0.8966	0.7546	1.3738	0.5482	0.4240	0.3568	0.9940	0.0737	-0.0477	-0.1161	0.4700	0.0349	-0.0226	-0.0549
	$-\infty$	0.4472	0.6176	0.6510	0.6765	0.7296	0.9810	1.0340	1.0746	0.3478	0.5129	0.5241	0.5228	0.5526	0.8137	0.8319	0.8306
0.4	1	0.9868	0.6958	0.5945	0.5355	0.7412	0.5226	0.4465	0.4022	0.1613	0.0263	-0.0184	-0.0450	0.1212	0.0198	-0.0138	-0.0338
	2	1.6567	0.9347	0.7535	0.6551	1.0464	0.5904	0.4759	0.4138	0.3512	0.0442	-0.0290	-0.0693	0.2218	0.0279	-0.0183	-0.0438
	4	1.9806	1.0321	0.8468	0.729	1.0519	0.5641	0.4498	0.3872	0.4570	0.0535	-0.0350	-0.0838	0.2427	0.0284	-0.0186	-0.0445
	16	2.075	1.129	0.9023	0.776	0.9812	0.5339	0.4267	0.3669	0.491	0.058	-0.038	-0.092	0.2322	0.0274	-0.0180	-0.0435
0.5	$-\infty$	2.0809	1.1365	0.9090	0.7828	0.9840	0.5374	0.4298	0.3702	0.4936	0.0586	-0.0387	-0.0937	0.2334	0.0277	-0.0183	-0.0443
	1	0.4742	0.6122	0.6540	0.6841	0.7533	0.9725	1.0389	1.0864	0.3268	0.4488	0.4755	0.4803	0.5193	0.7148	0.7541	0.7630
	2	0.8507	0.6800	0.6043	0.5565	0.6390	0.5108	0.4539	0.4180	0.0879	0.0176	-0.0130	-0.0326	0.0660	0.0132	-0.0098	-0.0245
	4	1.3540	0.9143	0.7641	0.6777	0.8552	0.5775	0.4826	0.4280	0.1941	0.0322	-0.0223	-0.0540	0.1226	0.0210	-0.0141	-0.0341
1.0	1	1.6254	1.0417	0.8573	0.7520	0.8633	0.5533	0.4553	0.3994	0.2631	0.0406	-0.0278	-0.0672	0.1397	0.0216	-0.0148	-0.0357
	2	1.7090	1.1073	0.9134	0.800	0.8129	0.5236	0.4319	0.3783	0.287	0.0446	-0.0308	-0.075	0.1357	0.0211	-0.0146	-0.0355
	4	1.7138	1.1145	0.9204	0.8073	0.8104	0.5270	0.4332	0.3817	0.2890	0.0450	-0.0311	-0.0761	0.1367	0.0213	-0.0147	-0.0360
	$-\infty$	0.4964	0.5939	0.6566	0.6893	0.7885	0.9693	1.0429	1.0951	0.3042	0.3911	0.4180	0.4284	0.4828	0.6197	0.6667	0.6806
2.0	1	0.7881	0.6684	0.6120	0.5741	0.5920	0.5021	0.4597	0.4312	0.0520	0.0116	-0.0090	-0.0230	0.0391	0.0087	-0.0068	-0.0173
	2	1.1879	0.8963	0.7742	0.6995	0.7503	0.5661	0.4890	0.4418	0.1167	0.0227	-0.0166	-0.0410	0.0737	0.0143	-0.0105	-0.0260
	4	1.4278	1.0234	0.8674	0.7734	0.7583	0.5436	0.4607	0.4108	0.1649	0.0301	-0.0216	-0.0530	0.0876	0.0160	-0.0115	-0.0281
	16	1.5063	1.0881	0.9240	0.8233	0.7123	0.5145	0.4369	0.3893	0.1838	0.0336	-0.0243	-0.0602	0.0869	0.0159	-0.0115	-0.0285
∞	$-\infty$	1.5110	1.0952	0.9311	0.8302	0.7145	0.5179	0.4403	0.3926	0.1849	0.0339	-0.0246	-0.0610	0.0874	0.0160	-0.0116	-0.0288
	1	0.5216	0.6103	0.6573	0.6915	0.8286	0.9695	1.0441	1.0983	0.2812	0.3422	0.3658	0.3770	0.4474	0.5438	0.5862	0.6007
	2	0.66731	0.64461	0.62992	0.61883	0.50123	0.48418	0.47315	0.46482	0.0696	0.0182	-0.00152	-0.00406	0.0523	0.00137	-0.00114	-0.00305
	4	0.91536	0.84817	0.80735	0.77768	0.57816	0.53572	0.50994	0.49067	0.01653	0.00414	-0.00340	-0.00889	0.01044	0.00261	-0.00215	-0.00562
2.0	1	1.08299	0.96904	0.90318	0.85624	0.57520	0.51468	0.47902	0.45477	0.02801	0.00882	-0.00550	-0.01426	0.01488	0.00362	-0.00292	-0.00757
	2	1.1589	1.03320	0.96027	0.90720	0.54801	0.48857	0.45408	0.42899	0.03623	0.00878	-0.00713	-0.01871	0.01713	0.00415	-0.00337	-0.00885
	4	1.16322	1.03975	0.96772	0.91518	0.55010	0.49167	0.45761	0.43276	0.03675	0.00895	-0.00728	-0.01921	0.01738	0.00423	-0.00344	-0.00908
	$-\infty$	0.57363	0.61997	0.65093	0.67618	0.91162	0.98477	1.0339	1.07408	0.18939	0.20335	0.20879	0.21135	0.3092	0.3239	0.33139	0.33590
∞	1	0.64142	0.63790	0.63552	0.63667	0.48179	0.47914	0.47736	0.47597	0.00059	0.00016	-0.00013	-0.00036	0.00044	0.00012	-0.00010	-0.00027
	2	0.84108	0.82982	0.82225	0.81643	0.51324	0.52413	0.51935	0.51567	0.00038	-0.00032	-0.00032	-0.00086	0.00090	0.00024	-0.00020	-0.00054
	4	0.96518	0.94118	0.92529	0.91311	0.51263	0.49989	0.49135	0.48498	0.00276	-0.00073	-0.00062	-0.00164	0.00147	0.00039	-0.00033	-0.00087
	16	1.04000	1.00538	0.98233	0.96418	0.49179	0.47541	0.46452	0.45593	0.00521	-0.00138	-0.00117	-0.00314	0.00246	0.00065	-0.00055	-0.00148
∞	$-\infty$	1.04507	1.01196	0.98978	0.97201	0.49418	0.47853	0.46804	0.45964	0.00548	0.00145	-0.00124	-0.00339	0.00259	0.00069	-0.00059	-0.00160
	1	0.61376	0.63036	0.64208	0.65192	0.97493	1.00127	1.01991	1.03552	0.10766	0.11034	0.10484	0.10819	0.16988	0.17391	0.16949	0.16875
	2	0.82572	0.82572	0.82572	0.82572	0.52154	0.52154	0.52154	0.52154	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	4	0.93297	0.93297	0.93297	0.93297	0.49552	0.49552	0.49552	0.49552	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
∞	16	0.99275	0.99275	0.99275	0.99275	0.46944	0.46944	0.46944	0.46944	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	$-\infty$	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.47287	0.47287	0.47287	0.47287	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	1	0.63662	0.63662	0.63662	0.63662	0.47818	0.47818	0.47818	0.47818	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	2	0.82572	0.82572	0.82572	0.82572	0.52154	0.52154	0.52154	0.52154	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
∞	4	0.93297	0.93297	0.93297	0.93297	0.49552	0.49552	0.49552	0.49552	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	16	0.99275	0.99275	0.99275	0.99275	0.46944	0.46944	0.46944	0.46944	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	$-\infty$	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.47287	0.47287	0.47287	0.47287	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	1	0.63662	0.63662	0.63662	0.63662	0.47818	0.47818	0.47818	0.47818	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

図 6 (a)では $a/b=1$, $\nu_1, \nu_2=0.3$, $\mu_2/\mu_1=0$ のとき, 図 6 (b)では $a/b=2$, $\nu_1, \nu_2=0.3$, $\mu_2/\mu_1=0$ のとき, 図 6 (c)では $a/b=4$, $\nu_1, \nu_2=0.3$, $\mu_2/\mu_1=0$ での $h/2b=0.1, 0.5, \infty$ の応力拡大係数 F_I, F_{II}, F_{III} の分布を示す. 図より $\beta=\pi/2$ に生じる F_I, F_{II} の最大値は $h/2b \rightarrow 0$ に従って界面の影響をより大きく受ける. なお, F_{III} の値は表 5 に示していないが, $a/b=1$ では $F_{III}=0$ であり, その最大値は $a/b=2 \sim 16$ では $\beta=\pi/6 \sim \pi/4$ 程度に生じる. 本研究の範囲では最大でも, $F_{III}=0.154$ 程度である ($\mu_2/\mu_1=0$, $h/2b=0.1$, $a/b=2$ のとき).

5. 結 言

異材接合界面に平行に存在する3次元だ円形き裂 (図 1) を対象として界面からの距離, き裂の形状比, 及び材料の剛性比, ポアソン比を変化させてそれらのパラメータがき裂の応力拡大係数に及ぼす影響を検討した. その結果, 以下のような点が明らかになった.

Fig. 6 Variation of F_I, F_{II}, F_{III} in Fig. 1 when (a) $a/b=1$, (b) $a/b=2$, (c) $a/b=4$ with $\mu_2/\mu_1=0$, $\nu_1, \nu_2=0.3$.

(1) 界面に平行に存在するだ円形き裂が遠方で引張りの荷重を受ける問題を体積分法の特異積分方程式を解析して考察した. 未知関数を基本密度と多項式の積で近似することによってき裂の形状比 $a/b=1 \sim 16$ で界面との距離 $h/2b \geq 0.1$ で有効数字 4 桁程度の収束性 (表 1, 2) が得られた.

(2) $\mu_2/\mu_1=0 \sim \infty$, $h/2b=0.1 \sim \infty$, $a/b=1 \sim \infty$, $\nu_1, \nu_2=0.3$ について系統的な計算を行い正確な応力拡大係数の値を得た (表 5). ポアソン比の影響を調べると, $a/b=16$, $h/2b=0.4$ ではポアソン比の変化によって結果が最大 11% 程度変化する. しかし $a/b=1$, $h/2b=0.4$ では 5% 程度の変化となっており, ポアソン比の影響は小さい.

(3) 異材接合界面に平行な3次元き裂を $\sqrt{area}$ パラメータで整理すると全体としては形状比 a/b の影響は小さく大部分で $a/b=1$ と $a/b \rightarrow \infty$ の F_I^* の比 ≈ 1.0 となる. よって, この場合も $\sqrt{area}$ パラメータで3次元き裂の結果を整理することが有用である. 但し, $\mu_2/\mu_1=0$ で $h/2b \leq 1.0$ の場合では a/b が大きくなると, 界面の K_I, K_{II} の最大値への影響が大きく生じるので, 形状比 a/b によって F_I^* の値が変化する.

文 献

- (1) Erdogan, F., and Aksogan, O., Bonded Half Planes Containing an Arbitrarily Oriented Crack, Int. J. Solids Structures, **10** (1974), 569-585.
- (2) Cook, T.S., and Erdogan, F., Stresses in Bonded Materials with a Crack Perpendicular to the Interface, Int. J. Engng. Sci., **10** (1972), 677-697.
- (3) 石田誠・野口博司, 任意分布き裂群を持つ接合半無限体の面内荷重問題, 機論, **49**-437 A (1983), 36-45.
- (4) Willis, J.R., The Penny-Shaped Crack on an Interface, Q.J. Mech. & Appl. Math., **25** (1972), 367-385.
- (5) Erdogan, F., and Arin, K., Penny-Shaped Interface Crack Between an Elastic Layer and a Half-Space, Int. J. Solids Structures, **8** (1972), 93-109.
- (6) Kassir, M.K., and Bregman, A.M., The Stress Intensity Factor for a Penny-Shaped Crack Between Two Dissimilar Materials, ASME Journal of Applied Mechanics, **39** (1972), 308-301.
- (7) Lee, J.C., Farris, T.N., and Keer, L.M., Stress Intensity Factors for Cracks of Arbitrary Shape Near an Interfacial Boundary, Engineering Fracture Mechanics, **27**-1, (1987), 27-41.
- (8) Shibuya, T., et al., Stress Analysis of the Vicinity of an Elliptical Crack at the Interface of Two Bounded Half-Spaces, JSME Int. J., **32** (1989), 485-491.
- (9) Nakamura, T., Three-Dimensional Stress Fields of Elastic Interfaces Cracks, ASME Journal of Applied Mechanics, **58** (1991), 939-946.
- (10) 結城良治・許金泉, 三次元異材継手・異材界面き裂のBEM解析, 機論, **58**-545, A (1992), 39-46.
- (11) Chen, M.-C., Noda, N.-A., and Tang, R., Application of Finite-Part Integrals to Planar Interfacial Fracture Problems in Three-Dimensional Bimaterials, ASME Journal of Applied Mechanics, **66** (1999), 885-890.
- (12) 野田尚昭・三好伸介, 特異積分方程式による半だ円表面き裂先端の応力拡大係数の分布の解析, 機論, **61**-586, A (1995), 1232-1240.
- (13) 村上敬宜・石田誠, 任意形状表面き裂の応力拡大係数の解析と表面近傍の応力場, 機論, **51**-464, A (1985), 1050-1056.
- (14) 村上敬宜・児玉昭太郎・小沼静代, 高強度鋼の疲労強度に及ぼす介材物の影響の定量的評価法, 機論, **54**-500, A (1988), 688-696.
- (15) Sahin, A., and Erdogan, F., The Axisymmetric Crack Problem in a Semi-Infinite Nonhomogeneous Medium, US Army Research Office Grant No. DAAH 04-95-1-0232 (1997).
- (16) Oda, K., Noda, N.-A., and Hashim, M.J., Analysis of Interaction Between Interface Cracks and Internal Cracks Using Singular Integral Equation of Body Force Method, in Damage and Fracture Mechanics, Computational Mechanics Publications, Southampton, (1998), 34-42.